
بسم الله الرحمن الرحیم

ریاضی عمومی ۱

باسمه تعالی

با سلام و احترام، با توجه به شیوع بیماری منحوس و تعطیلی
کلاس های درسی در این اندک فرصت از مطالب مرتبط با درس ریاضی ۲ و آمار
به صورت ساده و خلاصه عرضه شده تا عزیزان آمادگی لازم برای ادامه
این درس به صورت حضوری و مجازی بعد عید را داشته باشند. قبلاً و قلباً
از خداوند منان برای عزیزان و کادر اداری دانشگاه آرزوی سلامتی و موفقیت را
خواستارم.

مهدی رحیمی

یادآوری: هرگاه a, b دو عدد حقیقی باشند به طوری که $a \neq 0$ معادله ای به شکل $ax+b=0$ را معادله ی درجه ی اول گوییم، هدف از حل این معادله محاسبه ی مقدار عددی x است که به ازای آن معادله برقرار است. یعنی اگر به جای x عدد مورد نظر را قرار دهیم $ax+b$ برابر صفر خواهد شد. در حالت کلی برای محاسبه ی x به صورت زیر عمل می کنیم:

روش اول) $ax+b=0 \Rightarrow ax=-b \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$

روش دوم) $ax+b=0 \Rightarrow ax+\cancel{b}\cancel{-b}=0-b \Rightarrow ax=-b$

$$\Rightarrow \frac{ax}{a}=\frac{-b}{a} \Rightarrow x=-\frac{b}{a}$$

به عنوان نمونه: $3x+5=0 \Rightarrow 3x=-5 \Rightarrow x=\frac{-5}{3}$

هرگاه a, b, c عدد حقیقی باشند به طوری که $a \neq 0$ معادله ای به شکل $ax^2+bx+c=0$ را معادله ی درجه ی دوم گوییم. مانند حالت قبل هدف از حل این معادله محاسبه ی مقدار عددی x است که به ازای آن معادله برقرار است.

نکته: هرگاه a عدد یک باشد مانند $x^2+5x+6=0$ می توان از روش تجزیه استفاده کرد. دو عدد خواهیم یافت که ضرب آنها عدد 6 و جمع آنها عدد 5 است آن دو عدد 2، 3 هستند معادله فوق را می توان به صورت

$(x+2)(x+3)=0$ تجزیه کرد

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2=0 \Rightarrow x=-2 \\ x+3=0 \Rightarrow x=-3 \end{cases}$$

این روش در بعضی از حالات قابل اجرا است. در حالت عمومی برای محاسبه ی x می توان از روش دلتا Δ استفاده نمود.

برای حل معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ تعریف می‌کنیم $\Delta=b^2-4ac$ بعد از محاسبه‌ی

Δ سه حالت زیر قابل بحث هم است.

الف) هرگاه $\Delta>0$ آنگاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد اگر یکی از ریشه‌ها را x_1 و دیگری

را x_2 اسم گذاری کنیم از رابطه‌های زیر x_1 و x_2 قابل محاسبه است.

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\quad,\quad x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$$

ب) هرگاه $\Delta=0$ معادله یک ریشه‌ی مضاعف دارد به صورت زیر:

$$x_1=x_2=\frac{-b}{2a}$$

ج) هرگاه $\Delta<0$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد.

مثال) ریشه‌ی چند جمله‌ای $y=2x^2-3x+1$ را می‌بینیم[?].

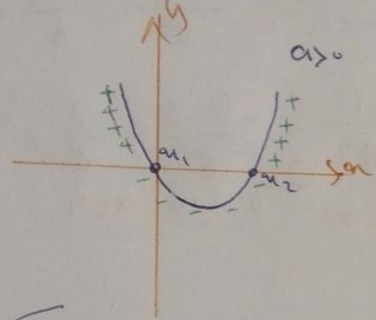
حل) در این مثال $a=2$، $b=-3$، $c=1$ قرار می‌دهیم

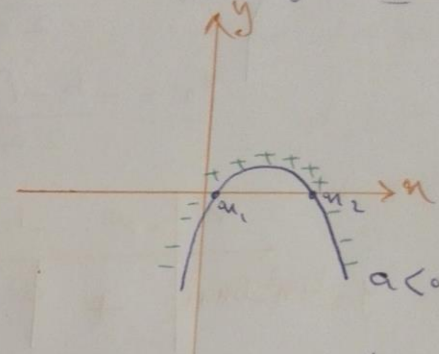
$$\Delta=b^2-4ac$$
$$=(-3)^2-4(2)(1)=9-8=1$$

چون $\Delta=1>0$ آنگاه معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد.

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)+\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{3+1}{4}=\dfrac{4}{4}=1 \\[2ex] x_2=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-(-3)-\sqrt{1}}{2\times 2}=\dfrac{3-1}{4}=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

تعیین علامت: منظور از تعیین علامت چند جمله‌ای $y=ax^2+bx+c$ بازه‌هایی از اعداد حقیقی است در آنها x منفی یا مثبت یا صفر است. توجه می‌کنیم که نمودار چند جمله‌ای درجه دوم به صورت یک سهمی است که اگر $a>0$ سهمی رو به بالا و اگر $a<0$ سهمی رو به پایین است:





توجه می‌کنیم که محل تلاقی نمودار با محور xها همان ریشه‌ی چند جمله‌ای است. در حالت کلی برای تعیین علامت یک چند جمله‌ای درجه دوم به روش زیر عمل می‌کنیم: (ابتدا برای Δ دلتای چند جمله‌ای):

الف) هرگاه $\Delta>0$

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
$y=ax^2+bx+c$	موافق علامت a	0	مخالف علامت a	0	موافق علامت a

ب) هرگاه $\Delta=0$

x	$-\infty$	$x_1=x_2$	$+\infty$
y	موافق علامت a	0	موافق علامت a

ج) هرگاه $\Delta<0$

x	$-\infty$ ریشه‌ی حقیقی ندارد $+\infty$
y	همواره موافق علامت a

سؤال) چند جمله‌ای $y = 4x^2 + 5x + 1$ را تعیین علامت کنید.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (5)^2 - 4(4)(1) = 25 - 16 = 9$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+\sqrt{9}}{2\times 4} = \dfrac{-5+3}{8} = \dfrac{-2}{8} = \dfrac{-1}{4} \\ x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5-\sqrt{9}}{2\times 4} = \dfrac{-5-3}{8} = \dfrac{-8}{8} = -1 \end{cases}$$

چون $a=4$ عددی مثبت است!

x	$-\infty$	-1		$-\frac{1}{4}$	$+\infty$
$y = 4x^2+5x+1$	+	0	−	0	+

یادآوری اتحادها: هرگاه a, b دو عدد حقیقی باشند در این صورت

$$\begin{cases} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \end{cases}$$

اتحاد مزدوج
$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

$$\begin{cases} (a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3 - b^3 \\ (a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3 \end{cases}$$

به عنوان نمونه به جای a, b هر عدد حقیقی یا مجهول می‌توان قرار داد.

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$
$$(x+1)(x-1) = x^2 - 1^2 = x^2 - 1$$

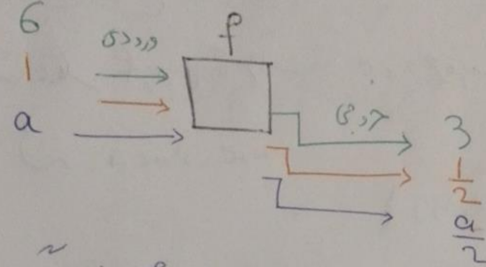
$$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$$
$$(x+2)(x^2-2x+4) = x^3 + 8$$

تابع: به صورت ساده دستگاه f را تصور کنیم که دارای یک ورودی و یک خروجی است

f به این صورت عمل می‌کند که هر عضوی یا هر شیئی که وارد آن می‌شود آن را نصف می‌کند

به عنوان نمونه اگر ورودی عدد 6 باشد خروجی عدد 3 است یا اگر ورودی عدد 1 باشد

خروجی عدد $\frac{1}{2}$ است.

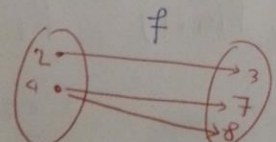


چنین دستگاهی را یک تابع گوییم ورودی ها را دامنه‌ی f و خروجی‌ها را برد f می‌نامیم اگر ورودی‌ها را با مجموعه‌ی X و خروجی‌ها را با Y اسم گذاری کنیم f یک تابع از X به سمت Y است یعنی

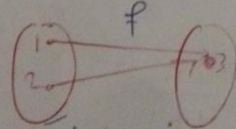
$f: X \to Y$. به عنوان نمونه f عدد 6 را به 3 انتقال می‌دهد یعنی $f(6)=3$

و همچنین $f(1)=\frac{1}{2}$ در حالت کلی $\boxed{f(x)=\frac{x}{2}}$ این رابطه را ضابطه‌ی تابع گوییم

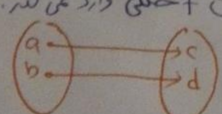
توجه: تابع $f: X \to Y$ زمانی یک تابع است که هر x از مجموعه‌ی X فقط به یک y از مجموعه‌ی Y انتقال داده شود (تصویر شود). به عنوان نمونه:



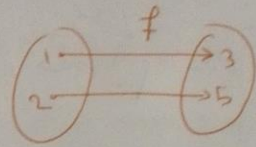
f در این مثال تابع نیست چون عدد 4 به دو عدد 7, 8 انتقال شده است



توجه می‌کنیم که در مثال مقابل تابع f یک تابع است چون هر x فقط به یک y تصویر شده است. توجه می‌کنیم که عدد 1 و عدد 2 هر دو به 3 تصویر شده‌اند این موضوع به تابع بودن f خللی وارد نمی‌کند.



تابع است ←

تابع f به صورت  را می‌توان به صورت زوج مرتب زیر نوشت:

$$f=\{(1,3),(2,5)\}$$

که در این موضوع عدد اول مربوط به xها و عدد دوم مربوط به yها هستند. از لحاظ زوج مرتب عنصر f زمانی تابع است که زوج مرتب‌ها دارای مؤلفه‌ی اول برابر (و مؤلفه‌ی دوم مختلف) نباشند. به عنوان نمونه

$$f=\{(1,2),(3,4),(1,5)\}$$

تابع نیست چون عدد یک در دو زوج مرتب مشاهده می‌شود. یعنی عدد یک به عدد 2, 5 نسبت داده شده است که این با تعریف تابع متضاد است.

تابعی با ضابطه‌ی $f(x)=3x$ را تصور کنید هرگاه بخواهیم $f(2)$ را حساب کنیم کافی است به جای x در معادله عدد 2 را قرار دهیم یعنی

$$f(2)=3\times2=6$$

مثال) با فرض اینکه $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ مطلوب است محاسبه‌ی $f(1)$, $f(2)$ و $f(a)$ ، $f(a+1)$, $f(a)+1$ که در آن a عدد حقیقی دلخواه است ($a\neq-1$)

حل)

$$\rightarrow\quad f(a)=\frac{a-1}{a+1}$$

$$\rightarrow\quad f(a+1)=\frac{(a+\cancel{1})-\cancel{1}}{(a+1)+1}=\frac{a}{a+2}$$

$$\rightarrow\quad f(a)+1=\frac{a-1}{a+1}+1=\frac{a\cancel{-1}+a\cancel{+1}}{a+1}=\frac{2a}{a+1}$$

$$\rightarrow\quad f(2)=\frac{2-1}{2+1}\quad و \rightarrow f(1)=\frac{1-1}{1+1}=\frac{0}{2}=0$$

دامنه‌ی یک تابع: منظور از دامنه‌ی یک تابع مانند $y=f(x)$ مجموعه‌ای از اعداد است که به ازای آنها $f(x)$ قابل تعریف است. به عنوان مثال در تابع $y=\frac{1}{x}$ به جای x هر عددی را می‌توان قرار داد به جز عدد صفر چون $\frac{1}{0}$ تعریف نشده است در این صورت خواهیم گفت دامنه‌ی تابع $y=\frac{1}{x}$ یا $f(x)=\frac{1}{x}$ کل اعداد حقیقی هست به جز عدد صفر و خواهیم نوشت

$$D_f=\mathbb{R}-\{0\}$$

در ادامه دامنه‌ی تعدادی از توابع مطرح می‌شود.

☐ دامنه‌ی توابعی که به صورت چندجمله‌ای هستند مانند $y=x^2+5x+7$ کل اعداد حقیقی هست چون به ازای هر عدد حقیقی y قابل تعریف است در این صورت خواهیم نوشت

$$D_f=\mathbb{R}$$

☐ دامنه‌ی توابعی که به صورت کسری هستند که صورت و مخرج چندجمله‌ای هستند برابر است با کل اعداد حقیقی به جز ریشه‌ی مخرج چون در نقاطی که مربوط به ریشه‌ی مخرج هستند مخرج صفر است و عدد تقسیم بر صفر تعریف نشده است.

مثال) دامنه‌ی تابع $y=\frac{x^2+6x+5}{x^2-4}$ را به دست آورید.

حل) ابتدا می‌بایستی خواهیم کرد که مخرج در کجا صفر است یعنی ریشه‌ی مخرج را به دست خواهیم آورد

$$x^2-4=0 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$$

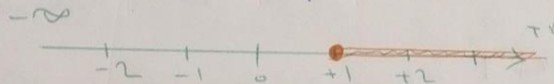
یعنی اگر به جای x عدد 2 یا -2 قرار داده شود مخرج برابر صفر خواهد شد پس دامنه‌ی تابع بالا کل اعداد حقیقی است به جز عدد -2 و $+2$.

$$D_f=\mathbb{R}-\{-2,+2\}$$

تمرین: دامنه‌ی تابع $y=\frac{x+1}{x^2-5x+6}$ را بیابید.

□ توابعی که به صورت رادیکالی با فرجه‌ی زوج هستند لزوماً باید داخل رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد به عنوان نمونه در تابع $y=f(x)=\sqrt{x-1}$ لزوماً باید $x-1\geq 0$ یعنی $x\geq 1$ پس دامنه‌ی این تابع تمام مقادیر از اعداد حقیقی هستند که $x\geq 1$ یعنی:

$$D_f=\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq 1\}=[1,+\infty)$$



مثال) دامنه‌ی تابع $y=f(x)=\sqrt{4x^2+5x+1}$ را بیابید.

حل) ابتدا باید چندجمله‌ای $y=4x^2+5x+1$ تعیین علامت شود.

$$y=4x^2+5x+1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=(5)^2-4(4)(1)=25-16=9$$

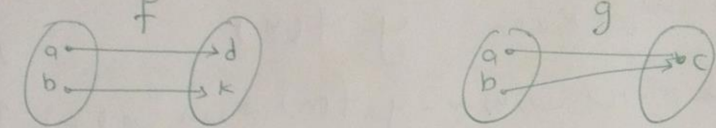
$$\Rightarrow \begin{cases} x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+\sqrt{9}}{2\times 4}=\frac{-5+3}{8}=\frac{-2}{8}=\frac{-1}{4} \\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-\sqrt{9}}{2\times 4}=\frac{-5-3}{8}=\frac{-8}{8}=-1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{4}$		$+\infty$
y		$+$	0	$-$	0	$+$	

با توجه به اینکه باید داخل رادیکال بزرگتر مساوی صفر باشد لزوماً باید اعداد از -1 کوچکتر مساوی و بزرگتر مساوی $\frac{-1}{4}$ باشند یعنی

$$D_f=(-\infty,-1]\cup[-\tfrac{1}{4},+\infty)$$

تابع یک به یک: دو تابع زیر را در نظر بگیرید (هر دو تابع هستند)



با این تفاوت که در تابع g عددهای a,b به عدد c تصویر شده‌اند یعنی c تصویر دو عدد a,b است چنین تابعی یک به یک نیست. تابعی یک به یک است که هر $y\in Y$ تصویر حداکثر یک $x\in X$ باشد. (از لحاظ زوج مرتب هم باید مولفه‌های دوم تکراری نداشته باشد)

از لحاظ نمادی تابع $y=f(x)$ که از X به سمت Y تعریف شده است زمانی یک به یک است که به ازای هر x_1, x_2 دلخواه از دامنه‌ی تابع f هرگاه $f(x_1)=f(x_2)$ باشد نتیجه حاصل شود که $x_1=x_2$

$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow x_1=x_2$$

مثال) آیا تابع $f(x)=5x-7$ یک به یک است؟ تحقیق کنید

حل) x_1,x_2 را از دامنه‌ی تابع دلخواه فرض کنید

$$f(x_1)=f(x_2)$$

$$5x_1-\cancel{7}=5x_2-\cancel{7} \Longrightarrow 5x_1=5x_2 \Longrightarrow \frac{5x_1}{5}=\frac{5x_2}{5}$$

$$\Longrightarrow x_1=x_2 \Longrightarrow$$ تابع f یک به یک است.

مثال) آیا تابع $f(x)=3x^2+6$ یک به یک است؟ تحقیق کنید

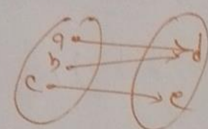
$$f(x_1)=f(x_2) \Longrightarrow 3x_1^2+\cancel{6}=3x_2^2+\cancel{6} \Longrightarrow \cancel{3}x_1^2=\cancel{3}x_2^2$$

$$\Longrightarrow x_1^2=x_2^2 \Longrightarrow x_1=\pm x_2$$

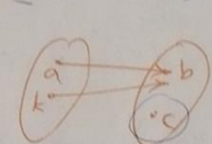
توجه می‌کنیم که هرگاه توان دوم دو عدد با هم مساوی باشند یا آن دو عدد با هم مساوی هستند یا یک منفی اختلاف دارند. با توجه به اینکه نتیجه‌ی قطعی حاصل نشد که $x_1=x_2$ لذا تابع یک به یک نیست.

تابع پوشا (پوشش): $f: X \longrightarrow Y$

تابع $y=f(x)$ زمانی پوشا است که به ازای هر $y \in Y$
$x \in X$ ای یافت شود که $y=f(x)$. به عبارت ساده‌تر هر y متعلق به Y
توسط یک عضو از X پوشش داده شود (یعنی $y=f(x)$). یعنی تمام yها توسط اعضای X
پوشش داده شود و عضو خالی یا تنها موجود نباشد.



پوشا است



عضو تنها

پوشا نیست

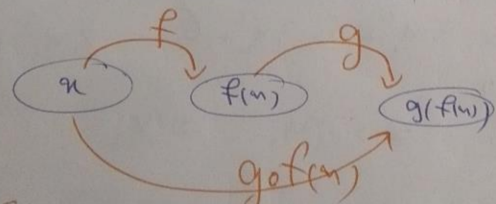
ترکیب توابع (تابع مرکب):

دو تابع f و g را در نظر می‌گیریم، در شکل زیر تابع f، x را به $f(x)$، و تابع g، $f(x)$ را
به $g(f(x))$ انتقال می‌دهد. تابعی که x را مستقیماً به $g(f(x))$ تصویر کند تابع مرکب
نامیده می‌شود یعنی:

$$g \circ f(x)$$

$$\boxed{g \circ f(x) = g(f(x))}$$

در واقع



در حالت دوم منظور از $g \circ f(x)$ همان $g(f(x))$ است یعنی

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

مثال) هرگاه $f(x)=x+5$, $g(x)=x^2-1$ مطلوب است محاسبه‌ی ضابطه‌ی تابع $gof(x)$, $fog(x)$.

$$fog(x)=f(g(x))=f(x^2-1)=(x^2-1)+5$$

$$=x^2+4$$

در این جا ابتدا $g(x)$ را جایگذاری کرده و سپس در ضابطه‌ی $f(x)$ به جای x عبارت $g(x)$ یعنی همان x^2-1 را جایگذاری می‌کنیم.

$$gof(x)=g(f(x))=g(x+5)=(x+5)^2-1$$

$$=x^2+10x+25-1=x^2+10x+24$$

تمرین: اگر $f(x)=x+5$, $fog(x)=x-1$ مطلوب است محاسبه‌ی $g(x)$.

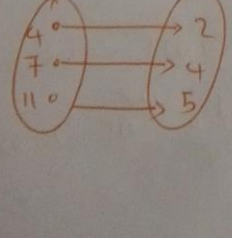
معکوس یک تابع: فرض تابع $f: X\to Y$ یک به یک و پوشا باشد

$f=\{(x,y)\mid(x,y)\in f\}$ در این صورت معکوس این تابع یعنی

$$f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\}$$

را وارون یا معکوس تابع f می‌گوییم. در واقع f^{-1} عملی عکس عمل f را انجام می‌دهد.

به عنوان نمونه



$$f=\{(4,2),(7,4),(11,5)\}$$

$$\Rightarrow f^{-1}=\{(2,4),(4,7),(5,11)\}$$

توجه: هرگاه $y=f(x)$ به صورت ضابطه داده شود، برای به دست آوردن ضابطه x را برحسب y به دست خواهیم آورد، در ضابطه‌ی حاصل شده به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x را جایگذاری خواهیم کرد.

مثال) معکوس تابع یک به یک و پوشای $y=\frac{x-5}{3}$ را به دست آورید.

حل)

$$y=\frac{x-5}{3} \overset{\text{طرفین وسطین}}{\Longrightarrow} y\times 3 = 1\times(x-5)$$

$$\Rightarrow 3y = x-5 \Rightarrow x = 3y+5$$

به جای x، $f^{-1}(x)$ و به جای y، x $\Rightarrow f^{-1}(x)=3x+5$

تمرین: معکوس تابع $y=\frac{2x}{2x-1}$ را به دست آورید.

تابع قدرمطلق: به زبان ساده قدرمطلق یک عدد یا یک تابع به اعدادی که داخل آن قرار می‌گیرند حاصل یک عدد مثبت خارج می‌شود. (چه آن عدد مثبت باشد چه منفی یا صفر)

نمادی که برای قدرمطلق استفاده می‌کنیم $y=|x|$ است.

$$|+3|=+3 \quad , \quad |-3|=+3 \quad , \quad |0|=0$$

دو حالت اتفاق می‌افتد هرگاه عدد داخل قدرمطلق عدد مثبت یا صفر باشد حاصل خود آن عدد است ولی اگر عدد منفی باشد حاصل قرینه‌ی آن عدد یعنی یک عدد مثبت است.

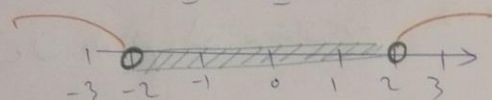
یعنی:

$$|x|=\begin{cases} x & x\geq 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$$

نکته: سؤال این است که قدر مطلق چه عددهایی کوچکتر از (۲) است یعنی

$$|x| < 2$$

با توجه به محور اعداد حقیقی دو ناحیه نارنجی و سبز را فرض کنید عددهایی که داخل کادر سبز



قرار دارند عددهایی هستند که قدر مطلق آنها کوچکتر از 2 است ولی اعدادی که در کادر نارنجی قرار دارند عددهایی هستند که قدر مطلق آنها بزرگتر از ۲ است در حالت کلی:

$$|x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

$$|x| > 2 \iff x > 2 \text{ یا } x < -2$$

در حالت کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت باشد

$$|x| < a \iff -a < x < a$$

$$|x| \leq a \iff -a \leq x \leq a$$

$$|x| > a \Rightarrow x > a \text{ یا } x < -a$$

$$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \text{ یا } x \leq -a$$

مثال) نامعادلهای زیر را حل کنید: $|x+5| \leq 3$

با توجه به اینکه $|x+5| \leq 3$ یعنی قدر مطلق عبارت $x+5$ کوچکتر از 3 است لزوماً عبارت $x+5$ مابین 3 و 3- قرار دارد پس:

حل) $-3 \leq x+5 \leq 3$

$$\Rightarrow -3-5 \leq x+\cancel{5}-\cancel{5} \leq 3-5$$

$$\Rightarrow \boxed{-8 \leq x \leq -2}$$

تابع جزء صحیح: عدد 1,7 را در نظر بگیرید این عدد دارای یک قسمت صحیح یعنی عدد 1 و یک قسمت اعشار، یعنی 0,7 است. قسمت صحیح عدد 1,7 را با نماد $[1,7]=1$ نشان خواهیم داد. به عنوان نمونه $2,3=2+0,3$ در این صورت:

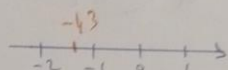
$$[2,3]=2$$

در حالت عمومی با توجه به محور اعداد حقیقی x عددی که مابین دو عدد صحیح n, $n+1$ قرار دارد

$$n \leq x < n+1$$

عددی که سمت چپ قرار دارد جزء صحیح x است یعنی $[x]=n$

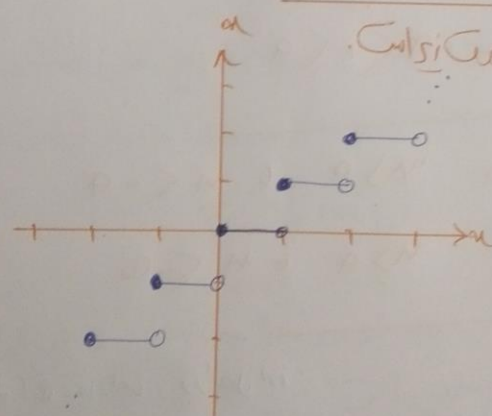
به عنوان نمونه عدد $-1,3$ بین عدد -2 و -1 قرار دارد



در این صورت جزء صحیح آن عدد -2 (یعنی عددی که سمت چپ $-1,3$ است) می‌باشد.

$$[-1,3]=-2$$

نمودار تابع $y=[x]$ به صورت زیر است.



مثال: معادله‌ی $[5x+3]=4$ را حل کنید.

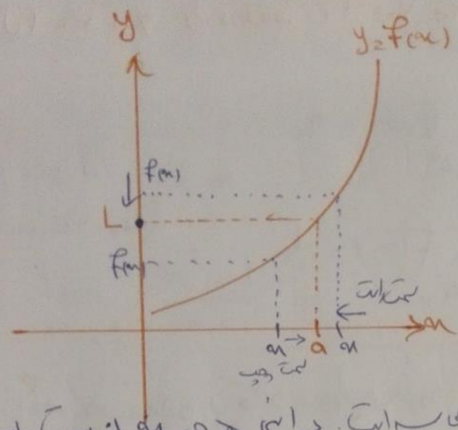
حل) عبارت $5x+3$ دارای جزء صحیح 4 است لذا بین 4, 5 است یعنی

$$4 \leq 5x+3 < 5 \xrightarrow[\text{کم خواهیم کرد}]{\text{عدد 3 را از طرفین}} 4-3 \leq 5x+3-3 < 5-3$$

$$1 \leq 5x < 2$$

$$\xrightarrow[\text{خواهیم کرد}]{\text{طرفین را به عدد 5 تقسیم}} \frac{1}{5} \leq x < \frac{2}{5}$$

حد توابع:



تابعی مانند شکل مقابل را فرض کنید. مقدار کدری تابع در نقطه‌ی a یعنی $f(a)$ برابر عدد L است.

هنگامی که x در سمت راست عدد a مانند شکل تصور کنیم $f(x)$ به صورت مقابل قابل محاسبه است. در اینجا هرچه x از سمت راست به عدد a نزدیک شود $f(x)$ ها به سمت L میل خواهند کرد. در این صورت خواهیم گفت حد راست تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر است و خواهیم نوشت:

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=L$$

نماد a^+ به این معنی است که x ها از سمت راست به عدد a نزدیک می‌شوند.

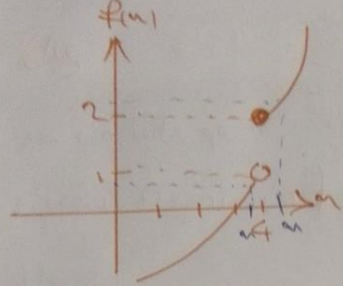
به این روش هنگامی که x ها از سمت چپ به عدد a نزدیک شوند (میل کنند) $f(x)$ ها دوباره به عدد L میل می‌کنند. خواهیم گفت حد چپ تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a برابر L است یعنی

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=L$$

هنگامی که حد چپ و راست تابع در یک نقطه برابر عدد ثابتی مانند L باشد خواهیم گفت تابع $f(x)$ در نقطه‌ی a دارای حد L است:

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

مثال) حد تابع را در نقطه‌ی $x_0=4$ محاسبه کنید.



$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to 4^-} f(x)=1$$

$\Rightarrow$ تابع حد ندارد (در نقطه‌ی $x_0=4$)

در ادامه حد تعدادی از توابع مطرح می‌شود:

□ حد توابعی که به صورت عدد ثابت هستند خود عدد ثابت است. (در هر نقطه)

به عنوان نمونه حد عدد ثابت 2 در هر نقطه خود عدد 2 است

$$\lim_{x\to 4} 2 = 2 \quad , \quad \lim_{x\to 0} 2 = 2 \quad \text{و} \ \ldots$$

□ حد توابعی که به صورت چندجمله‌ای هستند کافی است به جای x عدد مورد نظر را قرار دهیم.

$$\lim_{x\to 3} (5x^2+7) = \lim_{x\to 3} 5x^2 + \lim_{x\to 3} 7$$

$$= 5\lim_{x\to 3} x^2 + \lim_{x\to 3} 7 = 5(3)^2+7 = 45+7 = 52$$

در ادامه

$$\lim_{x\to 3} (5x^2+7) = 5(3)^2+7 = 52$$

توجه می‌کنیم که اگر تابع به صورت کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای باشد می‌توان به جای x عدد مورد نظر را قرار داد به شرطی که مخرج صفر نشود.

$$\lim_{x\to 1} \frac{5x^3-1}{x-2} = \frac{5(1)^3-1}{(1)-2} = \frac{5-1}{1-2} = \frac{4}{-1} = -4$$

در برخی از حدها بعد از جایگذاری عدد x عبارت حاصل شده $\frac{0}{0}$ یا $\frac{\infty}{\infty}$ است

در این حدها برای رفع ابهام از روش‌های مختلفی می‌توان عامل صفرساز یا عاملی

که باعث مبهم بودن می‌شود را حذف کرد:

مثال)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

می‌توان برای حل این حد از اتحاد مزدوج استفاده کرد.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to -2}\frac{(x^2+5x+6)}{x+2}=\frac{(-2)^2+5(-2)+6}{(-2)+2}=\frac{0}{0}$$ مبهم

روش تجزیه

$$\lim_{x\to -2}\frac{\boxed{(x+2)(x+3)}}{x+2}=\lim_{x\to -2}x+3=(-2)+3=1$$

تمرین: حد مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{x^2-1}$$

توجه: حد بعضی از توابع را باید جداگانه حساب کرد مانند توابعی که به صورت جزء صحیح و چند ضابطه‌ای هستند.

مثال) حد تابع $f(x)=\begin{cases}x+1 & x\geq 1\\ \frac{1}{x} & x<1\end{cases}$ را در نقطه $x_0=1$ حساب کنید.

حل: باتوجه به اینکه تابع دو ضابطه‌ای است حد راست از ضابطه بالا و حد چپ از ضابطه پایین محاسبه خواهد شد.

$$\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}(x+1)=1+1=2$$

$$\lim_{x\to 1^-}f(x)=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{1}=1 \Rightarrow$$ تابع در نقطه $x_0=1$ حد ندارد چون حد چپ و راست برابر هم نیستند.

مثال) $\lim\limits_{x\to 1} [x]+2$
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} [x]+2 = 1+2 = 3 \\ \lim\limits_{x\to 1^-} [x]+2 = 0+2 = 2 \end{cases}$$

با این توضیح که جزء صحیح اعدادی که از یک کوچکتر هستند ثابته و برابر عدد صفر است
ولی اگر عدد از یک بزرگتر باشه ثابته و برابر عدد یک میشه.

پیوستگی تابع در یک نقطه: تابع $f(x)$ را در نقطه‌ی $x_0=a$ پیوسته گوییم هرگاه حد چپ و راست و مقدار تابع در آن نقطه برابر هم باشه یعنی:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$$

مثال) آیا تابع $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+1}{x+2} & x\neq 1 \\ x & x=1 \end{cases}$ در نقطه‌ی $x_0=1$ پیوسته است؟ توضیح دهید.

حل)
$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3} & \text{حد راست} \\ \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{1+1}{1+2} = \dfrac{2}{3} & \text{حد چپ} \end{cases}$$

(با توجه به اینکه برای عددهایی که مخالف یک هستند یعنی از یک بزرگتر و کوچکتر از رابطه‌ی $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ استفاده میشود.)

مقدار تابع در نقطه‌ی ۱ هم برابر است با

$$f(1) = 1$$

زیرا از رابطه‌ی پایینی استفاده شده است و به جای x عدد یک را قرار دادیم
با توجه به اینکه حد چپ و راست با هم برابر $\frac{2}{3}$ هستند ولی برابر مقدار تابع یعنی یک نمی‌باشد تابع پیوسته نیست: $\lim\limits_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ (حل)

توجه: به عبارت ساده‌تر در حالتی که حد آن حاصل کسری به صورت عدد ثابت بر صفر

باشد چند حالت متصور است:

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$$

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$$

مانند:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x-1} = \frac{1}{1^+-1} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{[x]-3}{[x]-2} = \frac{[2^-]-3}{[2^-]-2} = \frac{1-3}{1-2} = \frac{-2}{-1} = 2$$

توجه: در حالت هایی که کسر حاصل عدد تقسیم بر بینهایت است حاصل صفر است.

$$\frac{\text{عدد}}{\pm\infty} = 0$$

مانند

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{2}{x} = \frac{2}{-\infty} = 0$$

توجه می کنیم که در حالت هایی که کسری به صورت چند جمله ای است با این ترفند که توان ها و اعداد کوچک در مقابل توان های بزرگتر حذف می شود می توان حد را محاسبه کرد

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + \cancel{1}}{x^3 - \cancel{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^3}} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{5x^2 + \cancel{1}}{4x^2 - \cancel{x}} = \lim_{x \to \infty} \frac{5x^2}{4x^2} = \frac{5}{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 + 1}{x - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{3\cancel{x^2}}{\cancel{x}} = \lim_{x \to \infty} 3x = 3 \times \infty = \infty$$