

فیزیک

جلد اول

(ویراست چهارم)

رابرت رزنیک، دیوید هالیدی، کنت اس. کرین

ترجمه

جلال الدین پاشایی زاد، محمد خرمی، محمدرضا بهاری

مرکز نشر دانشگاهی، تهران



Physics
(4 th Edition)
Volume 1
Robert Resnick, David Halliday, Kenneth S. Krane
John Wiley & Sons, 1992

فیزیک
(ویراست چهارم)
جلد اول
تألیف رابرت رزنیکی، دیوید هالییدی، کیت اس. کرین
ترجمه دکتر جلال‌الدین پاشایی راد، دکتر محمد خرمی، محمدرضا بهاری
نسخه پرداز: زهرا دلاوری
حروفچین: پروین حاج‌اسماعیل زنجانی
مرکز نشر دانشگاهی، تهران
چاپ اول ۱۳۸۱
تعداد ۵۰۰۰
چاپ و صحافی: معراج
حق چاپ برای مرکز نشر دانشگاهی محفوظ است
فهرست‌نویسی پیش از انتشار کتابخانه ملی جمهوری اسلامی ایران

رزنیکی، رابرت، ۱۹۲۳ - ۴.
فیزیک / رابرت رزنیکی، دیوید هالییدی، کیت اس. کرین؛ ترجمه جلال‌الدین پاشایی راد، محمد خرمی،
محمدرضا بهاری. - تهران: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۸۱.
ج: مصور، جدول، نمودار. - (مرکز نشر دانشگاهی؛ ۱۰۹۲، فیزیک؛ ۹۵)
ISBN 964-01-8176-5 (دوره)
ISBN 964-01-1092-2 (ج. ۱)
فهرست‌نویسی براساس اطلاعات فیبا.
عنوان اصلی:
Physics 4th ed, 1992.
در چاپهای قبلی دیوید هالییدی به‌عنوان نویسنده اول ذکر شده است.
واژه‌نامه.
۱. فیزیک. الف. هالییدی، دیوید، ۱۹۱۶ - ۴. Halliday, David، ب. کرین، کنت Krane, Kenneth S.
ج. پاشایی راد، جلال‌الدین، ۱۳۲۴ - مترجم. د. خرمی، محمد، ۱۳۲۸ - مترجم. ه. بهاری،
محمدرضا، ۱۳۲۷ - مترجم. و. مرکز نشر دانشگاهی. ز. عنوان.
۵۳۰ Q۴۲۱/۲/۵۲۶۸۷
۱۳۸۱
کتابخانه ملی ایران
۴۱-۳۷۸۵۹

بسم الله الرحمن الرحيم

فهرست

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۴۱	۳ بردارها	۱	پیشگفتار
۴۱	۱-۳ بردار و اسکالر		
۴۲	۲-۳ جمع بردارها: روش نموداری	۳	۱ اندازه گیری
۴۳	۳-۳ مؤلفه های بردار	۳	۱-۱ کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاها
۴۵	۴-۳ جمع بردارها: روش مؤلفه ای	۴	۲-۱ سیستم بین المللی یکاها
۴۷	۵-۳ ضرب بردارها	۵	۳-۱ استاندارد زمان
۵۰	۶-۳ قوانین برداری در فیزیک	۶	۴-۱ استاندارد طول
۵۲	پرسشها	۹	۵-۱ استاندارد جرم
۵۳	مسئله ها	۱۰	۶-۱ دقت و رقمهای بامعنی
		۱۱	۷-۱ تحلیل ابعادی
۵۸	۴ حرکت دوبعدی و سه بعدی	۱۲	پرسشها
۵۸	۱-۴ مکان، سرعت، و شتاب	۱۳	مسئله ها
۶۰	۲-۴ حرکت با شتاب ثابت		
۶۲	۳-۴ ✓ حرکت پرتابی	۱۷	۲ حرکت در یک بعد
۶۶	۴-۴ حرکت دایره ای یکنواخت	۱۷	۱-۲ سینماتیک ذره
۶۸	۵-۴ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره ای (اختیاری)	۱۷	۲-۲ توصیف حرکت
۷۰	۶-۴ حرکت نسبی	۱۹	۳-۲ سرعت متوسط
۷۴	پرسشها	۲۰	۴-۲ سرعت لحظه ای
۷۵	مسئله ها	۲۳	۵-۲ حرکت شتابدار
		۲۵	۶-۲ حرکت با شتاب ثابت
۸۶	۵ نیرو و قوانین نیوتون	۲۷	۷-۲ ✓ سقوط آزاد اجسام
۸۶	۱-۵ مکانیک کلاسیک	۲۹	۸-۲ گالیله و سقوط آزاد (اختیاری)
۸۷	۲-۵ قانون اول نیوتون	۳۰	۹-۲ اندازه گیری شتاب سقوط آزاد (اختیاری)
۸۸	۳-۵ ✓ نیرو	۳۱	پرسشها
		۳۳	مسئله ها

ردیف	عنوان	صفحه	ردیف
۱۸۱	۵-۸ سیستمهای پایستار دو و سه بعدی (اختیاری)	۸۹	۴-۵ جرم
۱۸۲	۶-۸ پایستگی انرژی در دستگاه ذرات	۹۱	۵-۵ قانون دوم نیوتون
۱۸۶	۷-۸ جرم و انرژی (اختیاری)	۹۲	۶-۵ قانون سوم نیوتون
۱۸۸	۸-۸ کوانتس انرژی (اختیاری)	۹۵	۷-۵ یکاهای نیرو
۱۹۰	پرسشها	۹۵	۸-۵ وزن و جرم
۱۹۱	مسئله‌ها	۹۷	۹-۵ اندازه‌گیری نیرو
		۹۸	۱۰-۵ کاربردهای قوانین نیوتون
۲۰۱	۹ سیستمهای ذرات	۱۰۲	۱۱-۵ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون
۲۰۱	۱-۹ سیستمهای دودره‌ای	۱۰۵	پرسشها
۲۰۳	۲-۹ سیستمهای پس-ذره‌ای	۱۰۷	مسئله‌ها
۲۰۸	۳-۹ مرکز جرم اجسام صلب		
۲۱۰	۴-۹ تکانه خطی ذره	۱۱۶	۶ دینامیک ذرات
۲۱۱	۵-۹ تکانه خطی سیستمی از ذرات	۱۱۶	۱-۶ قوانین نیرو
۲۱۲	۶-۹ پایستگی تکانه خطی	۱۱۷	۲-۶ نیروی اصطکاک ✓
۲۱۵	۷-۹ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)	۱۲۲	۳-۶ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت
۲۱۹	۸-۹ سیستمهای با جرم متغیر (اختیاری)	۱۲۵	۴-۶ معادلات حرکت: نیروهای ثابت و متغیر
۲۲۳	پرسشها	۱۲۷	۵-۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای تحلیلی
۲۲۵	مسئله‌ها	۱۲۸	۶-۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای عددی (اختیاری)
۲۳۲	۱۰ برخورد	۱۲۹	۷-۶ اصطکاک شاره‌ها و حرکت پرتابی
۲۳۲	۱-۱۰ برخورد چیست؟	۱۳۲	۸-۶ چارچوبهای ناختم و شبه‌نیرو (اختیاری)
۲۳۳	۲-۱۰ ضربه و تکانه	۱۳۴	۹-۶ محدودیتهای قوانین نیوتون (اختیاری)
۲۳۵	۳-۱۰ پایستگی تکانه در حین برخورد	۱۳۶	پرسشها
۲۳۷	۴-۱۰ برخورد در یک‌بعد	۱۳۸	مسئله‌ها
۲۴۰	۵-۱۰ برخورد در دو‌بعد		
۲۴۴	۶-۱۰ چارچوب مرجع مرکز جرم	۱۴۸	۷ کار و انرژی
۲۴۷	۷-۱۰ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)	۱۴۸	۱-۷ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد
۲۴۹	پرسشها	۱۵۱	۲-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک‌بعدی
۲۵۱	مسئله‌ها	۱۵۴	۳-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دو‌بعدی (اختیاری)
۲۵۹	۱۱ سینماتیک دورانی	۱۵۶	۴-۷ انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی
۲۵۹	۱-۱۱ حرکت دورانی	۱۵۸	۵-۷ توان
۲۶۰	۲-۱۱ متغیرهای حرکت دورانی	۱۵۹	۶-۷ چارچوبهای مرجع (اختیاری)
۲۶۲	۳-۱۱ دوران با شتاب زاویه‌ای ثابت	۱۶۱	۷-۷ انرژی جنبشی در سرعت‌های زیاد (اختیاری)
۲۶۳	۴-۱۱ کمیتهای دورانی به‌صورت کمیتهای برداری	۱۶۳	پرسشها
۲۶۵	۵-۱۱ روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای: صورت اسکالر	۱۶۳	مسئله‌ها
۲۶۷	۶-۱۱ روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای: صورت برداری (اختیاری)	۱۷۰	۸ پایستگی انرژی
۲۶۸	پرسشها	۱۷۰	۱-۸ نیروهای پایستار
۲۷۰	مسئله‌ها	۱۷۳	۲-۸ انرژی پتانسیل
		۱۷۴	۳-۸ سیستمهای پایستار یک‌بعدی
		۱۷۷	۴-۸ سیستمهای پایستار یک‌بعدی: حل کامل

صفحه	عنوان	صفحه	عنوان
۲۷۴	۲-۱۴ گرانیگاه	۲۷۴	۱۲ دینامیک دورانی
۲۷۴	۳-۱۴ مثالهایی از تعادل	۲۷۴	۱-۱۲ دینامیک دورانی: مرور کلی
۲۷۵	۴-۱۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب	۲۷۵	۲-۱۲ انرژی جنبشی ناشی از دوران و لختی دورانی
۲۷۸	در میدان گرانشی	۲۷۸	۳-۱۲ لختی دورانی اجسام صلب
۲۸۱	۵-۱۴ کشسانی	۲۸۱	۴-۱۲ گشتاور نیروی وارد بر یک ذره
۲۸۳	پرسشها	۲۸۳	۵-۱۲ دینامیک دورانی جسم صلب
۲۸۸	مسئله‌ها	۲۸۸	۶-۱۲ ترکیب حرکت‌های دورانی و انتقالی
۲۹۴		۲۹۴	پرسشها
۲۹۶	پیوستها	۲۹۶	مسئله‌ها
۳۰۳	پیوست الف سیستم بین‌المللی یکاها (SI)	۳۰۳	۱۳ تکانه زاویه‌ای
۳۰۳	پیوست ب بعضی ثابت‌های بنیادی فیزیک	۳۰۳	۱-۱۳ تکانه زاویه‌ای ذره
۳۰۵	پیوست ج اطلاعات نجومی	۳۰۵	۲-۱۳ سیستم‌های ذرات
۳۰۷	پیوست د خواص عناصر	۳۰۷	۳-۱۳ تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای
۳۱۱	پیوست ه جدول تناوبی عناصر	۳۱۱	۴-۱۳ پایستگی تکانه زاویه‌ای
۳۱۷	پیوست و ذرات بنیادی	۳۱۷	۵-۱۳ فرفره چرخان
۳۱۸	پیوست ز ضرایب تبدیل	۳۱۸	۶-۱۳ کوانتس تکانه زاویه‌ای (اختیاری)
۳۱۹	پیوست ح فرمولهای ریاضی	۳۱۹	۷-۱۳ مروری بر دینامیک دورانی
۳۱۹	پیوست ط برنامه‌های کامپیوتری	۳۱۹	پرسشها
۳۲۲	پیوست ی برندگان جایزه نوبل	۳۲۲	مسئله‌ها
۳۲۹	پاسخ مسائل شماره فرد	۳۲۹	۱۴ شرایط تعادل
		۳۲۹	۱-۱۴ شرایط تعادل

پیشگفتار

اولین ویراست این کتاب با عنوان فیزیک برای دانشجویان علوم و مهندسی در سال ۱۹۶۰، و سومین ویراست آن با عنوان فیزیک در سال ۱۹۷۷ منتشر شد. کتابی که در دست دارید ویراست چهارم (۱۹۹۲) است که همکار جدیدی هم به مؤلفان قبلی آن اضافه شده است.

کتاب را روزآمد کرده‌ایم و ملاحظات مربوط به پیشرفتهای جدید فیزیک و آموزش فیزیک را در آن گنجانده‌ایم. برای تغییراتی که در این ویراست اعمال شده است، علاوه بر مطالعات خودمان در باره مباحث متعدد، از نظریات بسیاری از خوانندگان ویراستهای قبلی هم استفاده کرده‌ایم، و توصیه‌های داوران و مرورکنندگان متعهد کتاب را هم به کار گرفته‌ایم. تغییرات و اصلاحاتی که در این ویراست اعمال کرده‌ایم از این قرارند:

۱. ملاحظات مربوط به انرژی را، از قضیه کار و انرژی گرفته تا ترمودینامیک، در تمام کتاب یکدست کرده‌ایم. مثلاً، کار را همیشه کاری گرفته‌ایم که روی سیستم انجام می‌شود، و در نتیجه، چه در مکانیک و چه در ترمودینامیک، برای کار از علامت قراردادی یکسانی استفاده کرده‌ایم. توجه به این قبیل جزئیات، به دانشجویان در فهم مفاهیم مشترکی که در زمینه‌های مختلف فیزیک ظاهر می‌شوند کمک می‌کند.

۲. نسبت خاص را، که در ویراستهای قبلی به صورت یک مبحث تکمیلی آورده می‌شد، در خود متن گنجانده‌ایم. دو فصل را به نسبت خاص اختصاص داده‌ایم: یکی را بعد از امواج مکانیکی و دیگری را بعد از امواج الکترومغناطیسی آورده‌ایم. مفاهیم مربوط به نسبت خاص (از قبیل حرکت نسبی، چارچوب مرجع، تکانه، و انرژی) را در ضمن بسیاری از مباحث کتاب، در فصلهای سینماتیک، دینامیک، و الکترومغناطیس بررسی کرده‌ایم. چنین رهیافتی را باید جزئی از فیزیک کلاسیک تلقی کرد. اما برای همراهی با مدرسانی که مایل‌اند نسبت خاص را به پایان درس موکول کنند، مطالب مربوط به آن را در بخشهای مشخصی از هر فصل آورده‌ایم تا بشود فعلاً از کنارشان گذشت.

۳. در مقایسه با ویراست سوم، فصلهای ۲ و ۳ را جابه‌جا کرده‌ایم و در نتیجه سینماتیک یک‌بعدی قبل از بردارها آمده است. تمام مطالب مربوط به تکانه زاویه‌ای را به فصل ۱۳ برده‌ایم (که بعد از سینماتیک دورانی و دینامیک دورانی می‌آید، و در نتیجه ترتیب ارائه مطالب

حرکت دورانی شبیه به ترتیب ارائه مطالب حرکت انتقالی شده است). فصلهای مربوط به ترمودینامیک را قدری جابه‌جا و بازنویسی اساسی کرده‌ایم، و ضمن تأکید بیشتر بر جنبه‌های آماری، رنگ و بوی جدیدی به موضوع داده‌ایم.

۴. در پاسخ به درخواستهای خوانندگان، چندین مبحث کلاسیکی جدید، از جمله تحلیل ابعادی، نیروی مقاومت شاره‌ها، کشسانی، کشش سطحی، چسبندگی (ویسکوزیته)، و آکوستیک موسیقیایی را (به مطالب ویراست قبلی) اضافه کرده‌ایم.

۵. مفاهیم جدیدتر را هم در تمام کتاب پراکنده‌ایم: از جمله کوانتس انرژی و تکانه زاویه‌ای، واپاشی هسته‌ای و ذرات بنیادی، نظریه آشوب، نسبیت عام، و آمار کوانتومی. منظورمان از گنجاندن این مطالب، بررسی منسجم فیزیک جدید نبوده است (که مفاهیم آن را در ۸ فصل اضافی نسخه مفصل جلد دوم آورده‌ایم)، بلکه می‌خواستیم مرزهای فیزیک کلاسیک و ارتباط آن با فیزیک جدید را به دانشجو نشان بدهیم.

۶. مسئله‌های آخر فصل را افزایش چشمگیری داده‌ایم. در این ویراست ۱۵۱۹ مسئله آورده‌ایم که در مقایسه با ۹۵۸ مسئله در ویراست قبلی، یک افزایش ۵۹ درصدی است. تعداد پرسشهای آخر فصل را هم از ۶۱۴ به ۸۲۱ رسانده‌ایم، یعنی ۳۴ درصد زیاد کرده‌ایم.

۷. تعداد مثالهای داخل متن را از ۱۳۵ در ویراست قبلی، به ۱۸۳ در ویراست فعلی رسانده‌ایم (۳۶ درصد)؛ در واقع افزایش از این هم بیشتر است، چون بعضی مثالهای ویراست قبلی به بهانه معرفی مبحث جدیدی بود، در حالی که در این ویراست همه مطالب جدید را فقط در متن آورده‌ایم و غرض از مثالها فقط تمرین کاربرد این مطالب است. ۸. روشهای کامپیوتری را، از طریق بعضی مثالها و تعدادی پروژه در آخر فصلها، معرفی کرده‌ایم. چند برنامه کامپیوتری هم به صورت پیوست در انتهای کتاب آورده‌ایم تا دانشجویان به کاربردهای دیگر این روشها هم بپردازند.

۹. تعداد مراجع متن را افزایش داده‌ایم و بسیاری از مقالات این مراجع را روزآمد کرده‌ایم. منظور از بعضی مقالات (که اغلب از مجلات عمومی مثل ساینتیفیک آمریکن انتخاب شده‌اند) فراهم کردن زمینه وسیعتری برای دانشجو از طریق مطالعه کاربردهای جالب مباحث

به هم بخورد. بسته به طرح درس و مدت کلاسها، می‌شود بخشهای دیگری را هم حذف کرد یا حتی کل بعضی فصلها را به اختصار برگزار کرد. [در "راهنمای مدرس"، که جزء ضمیمه متن اصلی این کتاب است، پیشنهادهایی برای انتخاب مباحث مناسبتر برای دوره‌های کوتاهتر آمده است.] در چنین مواردی البته باید دانشجویان کنجکاو و علاقه‌مند را ترغیب کرد که خودشان مستقلاً بخشها و فصلهای حذف شده را مطالعه کنند و معلوماتشان را گسترش بدهند. برای مدرسانی که می‌خواهند مطالب را به‌طور کامل — مثلاً به دانشجویان رشته فیزیک و دانشجویان ممتاز رشته‌های دیگر علوم و مهندسی، یا به هر حال در دوره‌های سه ترمی — تدریس کنند، این کتاب به قدر کافی جامع و مفصل هست که تجربه خوبی برای دانشجویان باشد. امیدواریم که این کتاب "نقشه راههای" فیزیک باشد؛ می‌شود راههای مختلفی، مستقیم و غیر مستقیم، انتخاب کرد، و ضرورتی ندارد که در اولین سفر همه راهها را طی کنیم. مسافر مشتاق را می‌شود دوباره به نقشه احاله کرد تا در آن بگردد و راههایی را که در سفر قبلی اش طی نکرده است امتحان کند.

از همه همکاران و کسانی که در تهیه این کتاب به ما کمک کرده‌اند صمیمانه سپاسگزاریم.

سپتامبر ۱۹۹۱

دیوید هالیدی

سیاتل، واشنگتن

رابرت رزنیک

انستیتو پلی تکنیک رنسلر

کنت کرین

دانشگاه ایالتی اوهایو

مربوط است. در موارد دیگر، که معمولاً شامل موضوعاتی است که امیدواریم هم دانشجویان و هم مدرسان به اهمیت آموزشی آنها توجه کنند، به مقالاتی ارجاع داده‌ایم که از مجلاتی مانند آمریکن جورنال او فیزیکس یا فیزیکس تودی انتخاب شده‌اند.

۱۰. شکل‌های کتاب عموماً از نو ترسیم شده‌اند و تعداد آنها در جلد اول تقریباً دو برابر شده و از ۴۶۳ به ۸۹۹ رسیده است. در مواردی یک رنگ دیگر هم به شکلها اضافه کرده‌ایم تا واضح‌تر و برای آموزش مفیدتر باشند.

۱۱. بسیاری از استنتاجها، اثباتها، و استدلالها را محکم‌تر کرده‌ایم، و هر جا که فرض یا تقریبی به کار گرفته باشیم آن را به وضوح اظهار کرده‌ایم. بنابراین، بی‌آنکه سطح کتاب را بالاتر برده باشیم، دقت و استحکام آن را بیشتر کرده‌ایم. نگران این بوده‌ایم که دانشجویان قلمرو اعتبار هر استدلالی را بشناسند و می‌خواستیم او را ترغیب کنیم که چنین سؤالاتی را در نظر بگیرد که: آیا این یا آن نتیجه خاص همیشه صدق می‌کند یا فقط گاهی صادق است؟ چه اتفاق می‌افتد وقتی به حد کوانتومی یا نسبیته نزدیک می‌شویم؟

اگرچه سعی کرده‌ایم مطالبی را هم از ویراست قبلی حذف کنیم، اما اضافات ویراست جدید آنقدر زیاد بوده که در مجموع حجم کتاب را بیشتر کرده است. باید تأکید کنیم که کمتر مدرسی خواهد خواست یا خواهد توانست که به همه مطالب کتاب، از اول تا آخر، بپردازد. ما تلاش کرده‌ایم کتاب کامل و دقیقی از کلیات فیزیک تدوین کنیم، اما مدرس می‌تواند برای هر چه پر بار کردن زحماتش، به راههای متعددی عمل کند. مدرسی که می‌خواهد مباحث محدودتری را در نظر بگیرد اما عمیق‌تر به آنها بپردازد (این روشی است که اخیراً به آن "کمتری که بیشتر است" می‌گویند)، می‌تواند راه مناسبی از میان این راهها انتخاب کند. بعضی بخشها را صریحاً "اختیاری" اعلام کرده‌ایم (که با حروف کوچکتر چاپ شده‌اند)؛ منظورمان این بوده است که می‌شود این بخشها را کنار گذاشت بی‌آنکه پیوستگی مطالب کتاب

اندازه‌گیری

فیزیک، با آن همه زیبایی ریاضیاتی بعضی از پیچیده‌ترین و مجردترین نظریه‌هایش، نهایتاً یک علم تجربی است. بنابراین، کسانی که اندازه‌گیریهای دقیق انجام می‌دهند باید استانداردهای مشترکی را بپذیرند تا بتوانند نتایج اندازه‌گیریهایشان را برحسب آنها بیان کنند. به این ترتیب، نتایج هر آزمایشگاه را می‌توان به آزمایشگاههای دیگر ارائه داد، و امکان تأیید این نتایج را فراهم کرد.

در این فصل به معرفی بعضی از یکاهای اصلی کمیتهای فیزیکی و استانداردهای پذیرفته شده برای سنجش آنها می‌پردازیم. روش درست بیان نتایج محاسبات و اندازه‌گیریها را از لحاظ مناسب بودن تعداد ارقام با معنی بررسی می‌کنیم و اهمیت توجه به ابعاد کمیتهای موجود در معادلات را نشان می‌دهیم. در فصلهای بعدی، هر جا لازم باشد، یکاهای اصلی دیگر و یکاهای مشتق از آنها را هم تعریف خواهیم کرد.

خیلی از کمیتهای پیچیده‌تر را می‌توان برحسب این کمیتهای پایه بیان کرد. مثلاً تا مدتها دقت اندازه‌گیری طول و زمان از خیلی از کمیتهای فیزیکی دیگر بیشتر بود و این دو کمیت را عموماً برای تعیین استاندارد به‌کار می‌بردند. دقت اندازه‌گیری سرعت کمتر بود، و بنابراین به‌عنوان کمیتی مشتق (زمان/طول = سرعت) در نظر گرفته می‌شد. اما امروزه دقت سنجش سرعت نور، بیش از دقت استاندارد پیشین طول است؛ البته هنوز هم طول را کمیتی بنیادی می‌دانیم، اما استاندارد آن را از استاندارد سرعت و زمان به‌دست می‌آوریم.

به این ترتیب، مسئله اساسی آن است که کمترین تعداد ممکن کمیتهای فیزیکی را به‌عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کنیم و استانداردهایی برای سنجش آنها تعریف کنیم. این استانداردها باید دست‌یافتنی و تغییرناپذیر باشند، که البته ممکن است تأمین هر دوی این ویژگیها با هم کارساده‌ای نباشد. مثلاً اگر قرار است استاندارد کیلوگرم، یک جسم تغییرناپذیر باشد، باید این جسم دور از دسترس باشد، یعنی در چنان انزوایی نگهداری شود که از دستکاری، یا مثلاً خوردگی، مصون بماند.

توافقهایی مربوط به استانداردها، حاصل یک رشته مذاکرات بین‌المللی در "کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها" بوده است. این مجمع جهانی در سال ۱۸۸۹ (۱۲۶۸ شمسی) تأسیس شد و نوزدهمین دور مذاکرات آن در سال ۱۹۹۱ صورت گرفت. وقتی استاندارد پذیرفته شد، می‌توانیم آن را برای اندازه‌گیری در گستره

۱-۱ کمیتهای فیزیکی، استانداردها، و یکاها

واحدهای ساختاری فیزیک، همین کمیتهایی هستند که برای بیان قوانین این علم به‌کار می‌روند: طول، جرم، زمان، نیرو، سرعت، چگالی، مقاومت ویژه، دما، شدت روشنایی، شدت میدان مغناطیسی، و بسیاری کمیتهای دیگر. خیلی از این واژه‌ها، مثل طول و نیرو، در شمار واژه‌های روزمره‌اند. مثلاً ممکن است گفته شود: "او در طول زندگی‌اش فشار زیادی را تحمل کرده است." اما، در فیزیک نباید گول معنی روزمره این واژه‌ها را خورد. تعریف علمی دقیق طول و فشار، هیچ ربطی به معنی این دو واژه در جمله بالا ندارد.

می‌توانیم، مثلاً طول چیزی را با یک کمیت جبری دلخواه مثل L مشخص کنیم، و فرض کنیم که این کمیت دقیقاً معین است. اما اگر بخواهیم یکایی به‌مقدار خاصی از این کمیت نسبت بدهیم، ناچاریم یک استاندارد تعیین کنیم. به این ترتیب، کسانی که بخواهند طولهای مختلف را با هم مقایسه کنند، یکای یکسانی در اختیار خواهند داشت که طول را با آن می‌سنجند. زمانی یکای طول یارد بود، که از اندازه دور کمر فرمانروا به‌دست می‌آمد. تصور مشکلات ناشی از چنین استاندردی بسیار آسان است: این استاندارد برای همه کسانی که بخواهند استانداردهای ثانویه خودشان را با آن میزان کنند، به راحتی قابل وصول نیست، و دیگر اینکه با گذشت زمان، تغییرناپذیر هم نیست.

خوشبختانه لزومی به تعریف استاندارد برای همه کمیتهای فیزیکی نیست. تعیین استاندارد برای بعضی از کمیتهای پایه ساده‌تر است.

جدول ۱. یکاهای اصلی SI

یکای SI		کمیت
نماد	نام	
s	ثانیه	زمان
m	متر	طول
kg	کیلوگرم	جرم
mol	مول	مقدار ماده
K	کلوین	دمای ترمودینامیکی
A	آمپر	جریان الکتریکی
cd	کاندلا	شدت نور

جدول ۲. پیشوندهای SI*

نماد	پیشوند	ضریب	نماد	پیشوند	ضریب
d	دسی	10^{-1}	E	اگزا	10^{18}
c	سانتی	10^{-2}	P	پتا	10^{15}
m	میلی	10^{-3}	T	ترا	10^{12}
μ	میکرو	10^{-6}	G	گیگا	10^9
n	نانو	10^{-9}	M	مگا	10^6
p	پیکو	10^{-12}	k	کیلو	10^3
f	فمتو	10^{-15}	h	هکتو	10^2
a	آتو	10^{-18}	da	دکا	10^1

* پیشوندهایی که در این کتاب زیاد به کار می‌روند با حروف سیاه مشخص کرده‌ایم.

نوشت. پیشوندهای مربوط به ضریبهای بزرگتر از یک، ریشه یونانی دارند و پیشوندهای مربوط به ضریبهای کوچکتر از یک، ریشه لاتین (جز فمتو و آتو، که ریشه دانمارکی دارند).^{۲۱}

در تکمیل جدول ۱، باید هفت مجموعه دستورالعمل داشته باشیم تا بتوانیم یکاهای اصلی SI را در آزمایشگاه تولید کنیم. دستورالعملهای مربوط به زمان، طول، و جرم را در سه بخش بعدی شرح می‌دهیم.

در کنار SI، دو سیستم مهم دیگر هم برای یکاها داریم. یکی سیستم گاوسی است که در خیلی از منابع فیزیک مورد استفاده است. این سیستم را در این کتاب به کار نخواهیم برد. ضرایب تبدیل یکاهای این سیستم به سیستم SI، در پیوسته ۲ آمده است.

سیستم دیگر، سیستم بریتانیایی است، که هنوز هم در بعضی کشورها و از جمله در ایالات متحده آمریکا کاربردهای روزمره دارد. کمیته

۱. نگاه کنید به

Robert A. Nelson, "SI: The International System of Units", (American Association of Physics Teachers, 1981).

2. Le Système International d'Unités.

و سیعی به کار ببریم؛ مثلاً از ثانیه، یکای زمان، برای اندازه‌گیری زمانهایی از طول عمر پروتون (بیش از 10^{40} ثانیه) گرفته تا طول عمر ناپایدارترین ذره آزمایشگاهی (حدود 10^{-24} ثانیه) استفاده می‌کنیم. وقتی می‌گوییم عمر پروتون، برحسب یکای ثانیه، 10^{40} است، منظورمان این است که نسبت این کمیت به بازه زمانی‌ای که به عنوان ثانیه استاندارد اختیار شده است، 10^{40} است. برای انجام چنین سنجشی، باید به نحوی بتوان سنجه‌های آزمایشگاهی را با استاندارد مقایسه کرد. خیلی از این مقایسه‌ها غیرمستقیم است: هیچ سنجه‌ای نمی‌تواند در گستره 40 مرتبه بزرگی دقیق باشد. با وجود این، برای پیشرفت علم ضروری است که اگر پژوهشگری یک بازه زمانی را با سنجه‌اش ثبت می‌کند، بتواند این مقدار را به نحوی به ثانیه استاندارد مربوط کند. جستجو برای استانداردهای دقیقتر یا دست‌یافتنی‌تر، به خودی خود یک مسئله مهم علمی است که فیزیکدانان و پژوهشگران دیگری در آزمایشگاههای سراسر جهان به آن می‌پردازند. در ایالات متحد آمریکا، آزمایشگاههای "مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی" (که قبلاً دفتر ملی استانداردها نامیده می‌شد) وظیفه نگهداری، تولید، و آزمودن استانداردهایی را که پژوهشگران علوم پایه و همچنین مهندسان و علم‌پیشگان در صنعت به کار می‌برند، به عهده دارد. بهبود استانداردها در سالهای اخیر، بسیار چشمگیر بوده است: دقت ثانیه استاندارد، از زمان ویراست اول این کتاب (۱۹۶۰) تا کنون، بیش از 1000 برابر شده است.

۱-۲ سیستم بین‌المللی یکاها^۱

کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، در طی مذاکرات سالهای ۱۹۵۴ تا ۱۹۷۱ هفت کمیت را به عنوان کمیتهای اصلی انتخاب کرده است. سیستم بین‌المللی یکاها، SI^۲، مبتنی بر همین کمیتهاست، که فهرستی از آنها هم در جدول ۱ آمده است.

در این کتاب با بسیاری از یکاهای فرعی SI — مثل یکای سرعت، نیرو، و مقاومت الکتریکی — سروکار خواهیم داشت. این یکاها از یکاهای جدول ۱ مشتق می‌شوند. مثلاً یکای نیرو نیوتون (N) است. این یکا، برحسب یکاهای اصلی SI، به صورت

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

تعریف می‌شود. (در فصل ۵ خواهیم دید که چرا.)

اگر بخواهیم کمیتهایی مثل توان یک نیروگاه، یا زمان بین دو رویداد هسته‌ای را برحسب یکاهای SI بیان کنیم، با اعدادی بسیار بزرگ، یا بسیار کوچک، مواجه می‌شویم. برای ساده شدن بیان چنین کمیتهایی، کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها طی مذاکرات سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۷۵ خود توصیه کرد که از پیشوندهایی که در جدول ۲ آمده است استفاده شود. به این ترتیب، می‌توانیم توان خروجی یک نیروگاه معمولی برق، $10^9 \times 3 \text{ وات}$ ، را به صورت 3 گیگاوات یا 3 GW بیان کنیم. همچنین، یک بازه زمانی معمول در فیزیک هسته‌ای، مثل $10^{-9} \times 235$ ثانیه، را می‌شود به صورت 235 پیکوثانیه بیان کرد.

جدول ۳. مقادیر اندازه‌گیری شده چند بازه زمانی*

بازه زمانی	ثانیه
طول عمر پروتون	$> 10^{30}$
نیمه عمر واپاشی بتایی مضاعف ^{87}Se	3×10^{27}
سن جهان	5×10^{17}
سن هرم خئوس	1×10^{11}
میانگین عمر انسان (در ایالات متحد آمریکا)	2×10^1
دوره تناوب گردش زمین به دور خورشید (۱ سال)	3×10^7
دوره تناوب چرخش زمین حول محور خودش (۱ روز)	9×10^4
دوره تناوب گردش ماهواره کم ارتفاع نوعی به دور زمین	5×10^2
فاصله زمانی بین ضربانهای عادی قلب	8×10^{-1}
دوره تناوب دیابازون تولیدکننده نت لا(ی وسط)	2×10^{-2}
دوره تناوب نوسانهای میکروموج ۳cm	1×10^{-10}
دوره تناوب نوعی چرخشهای مولکولی	1×10^{-12}
کوتاهترین تپ نوری تولیدشده (تا سال ۱۹۹۰)	6×10^{-15}
طول عمر ناپایدارترین ذرات	$< 10^{-23}$

* مقادیر تقریبی‌اند.

قرنهای متمادی پدیده تکرار شونده چرخش زمین حول محور خودش، که مدت روز را تعیین می‌کند، به عنوان مقیاس زمان به کار می‌رفت. بعدها یک ثانیه (میانگین خورشیدی) برابر با $1/86400$ روز (میانگین خورشیدی) تعریف شد.

ساعتهای بلور کوآرتز، که بر اساس ابقای الکتریکی ارتعاشات دوره‌ای بلور کوآرتز کار می‌کنند، به عنوان استاندارد ثانویه زمان به کار می‌روند. ساعت کوآرتز را می‌شود با استفاده از رصدهای نجومی، برحسب چرخش زمین مدرج کرد و برای سنجش زمان در آزمایشگاه به کار برد. خطای انباشته بهترین این ساعتها، در طول سال، حداکثر $5 \mu\text{s}$ بوده است. اما حتی این دقت هم برای علوم و تکنولوژی جدید کافی نیست. برای دستیابی به استاندارد زمانی بهتر، ساعت‌های اتمی در چندین کشور ساخته شده است. شکل ۱ چنین ساعتی را نشان می‌دهد. کار این ساعت، بر اساس بسامد مشخصه تابش میکروموجی است که از اتمهای عنصر سزیم گسیل می‌شود. این ساعت، که در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی در ایالات متحد آمریکا نگهداری می‌شود، مبنای تعیین زمان جهانی هماهنگ (UTC) در این کشور است. شکل ۲ تغییرات دوره تناوب چرخشی زمین را، نسبت به ساعت

۱. برای مطالعه تاریخچه زمان‌سنجی، نگاه کنید به

Revolution in Time: Clocks and the Making of the Modern World, David S. Landes (Harvard University Press, 1983).

برای پیشرفتهای اخیر در سنجش دقیق زمان به

"Precise Measurement of Time," Norman F. Ramsey, *American Scientist*, January-February 1988, p. 42.

برای توضیح سیستمهای مختلف ثبت زمان به

"Time and the Amateur Astronomer," Alan M. MacRobert, *Sky and Telescope*, April 1989, p. 378.

و یکاهای اصلی مکانیک در این سیستم، طول (فوت)، نیرو (پاوند)، و زمان (ثانیه)‌اند. ضریب تبدیل این یکاها به یکاهای SI هم در پیوست ز آمده است. ما در این کتاب عموماً یکاهای SI را به کار برده‌ایم (و در بعضی موارد به معادلهای بریتانیایی آنها هم اشاره کرده‌ایم). تنها در سه کشور (میانمار، لیبیا، و ایالات متحد آمریکا) است که استانداردهای ملی اندازه‌گیری مبتنی بر سیستمی جز SI اند.

مثال ۱. هر کمیت فیزیکی را می‌شود در ۱ ضرب کرد (چون مقدارش را تغییر نمی‌دهد). مثلاً $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ است، پس $1 = 60 \text{ s} / 1 \text{ min}$ ؛ به همین ترتیب، $1 \text{ ft} = 12 \text{ in}$ ، پس $1 = 1 \text{ ft} / 12 \text{ in}$ است. با استفاده از ضرایب تبدیل مناسب، (الف) سرعت ۵۵ مایل بر ساعت را برحسب متر بر ثانیه، و (ب) حجم مخزنی را که ۱۶ گالن بنزین می‌گیرد برحسب سانتی‌متر مکعب به دست بیاورید.

حل: (الف) برای ضرایب تبدیل، به روابط $1 \text{ mi} = 1609 \text{ m}$ و $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$ (و $1 \text{ h} = 3600 \text{ s}$) نیاز داریم (نگاه کنید به پیوست ز). به این ترتیب

$$\text{سرعت} = 55 \frac{\text{mi}}{\text{h}} \times \frac{1609 \text{ m}}{1 \text{ mi}} \times \frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}} = 25 \text{ m/s}$$

(ب) یک گالن مایع ۲۳۱ اینچ مکعب، و $1 \text{ in} = 2.54 \text{ cm}$ است.

پس

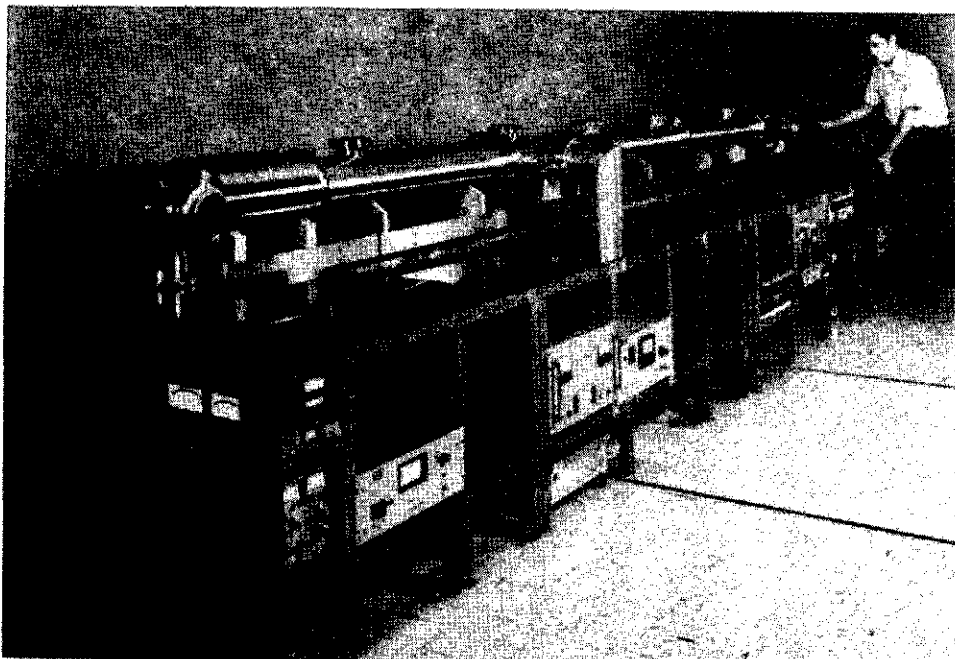
$$\text{حجم} = 16 \text{ gal} \times \frac{231 \text{ in}^3}{1 \text{ gal}} \times \left(\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} \right)^3 = 6.1 \times 10^5 \text{ cm}^3$$

توجه کنید که در این دو محاسبه، ضرایب تبدیل را چنان به کار برده‌ایم که یکاهای ناخواسته در صورت یک کسر و مخرج کسر دیگر ظاهر شوند، و یکدیگر را حذف کنند.

۱-۳ استاندارد زمان

سنجش زمان دو جنبه دارد. برای امور روزمره، و برای بعضی از مقاصد علمی، لازم است بدانیم چه وقت از روز است تا بتوانیم ترتیب وقایع را تعیین کنیم. در بسیاری از کارهای علمی، می‌خواهیم بدانیم که فلان رویداد چقدر طول می‌کشد (بازه زمانی چقدر است). پس هر استاندارد زمانی باید بتواند به این دو پرسش پاسخ بدهد. "فلان رویداد در چه زمانی وقوع یافته؟" و "چقدر طول کشیده است؟" جدول ۳ گستره بازه‌های زمانی سنجش‌پذیر را نشان می‌دهد. نسبت حدود بالا و پایین این گستره از مرتبه 10^{23} است.

هر پدیده تکرار شونده‌ای را می‌شود به عنوان مقیاس زمان به کار برد. برای سنجش زمان با چنین پدیده‌ای، عده تکرارهای پدیده را (به اضافه کسری از یک دور در صورت لزوم) می‌شماریم. به این منظور می‌توانیم مثلاً از آونگ، سیستم جرم-فنر، یا بلور کوآرتز استفاده کنیم.



شکل ۱. استاندارد بسامد اتمی (سزیم) شماره ۶-NBS در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی در بولدر کلرادو. این استاندارد اصلی یکای زمان در ایالات متحد امریکاست.

دو تا ساعت جدید سزیم، طی ۳۰۰۰۰۰ سال حداکثر ممکن است ۱s با هم اختلاف پیدا کنند. ساعت‌های میزر هیدروژن به دقت باورنکردنی ۱s در ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال رسیده‌اند. ساعت‌هایی که مبتنی بر یک تک اتم محبوس باشند شاید بتوانند این دقت را به اندازه ۳ مرتبه بزرگی زیاد کنند. شکل ۳ پیشرفت چشمگیر زمان‌سنجی را طی حدود ۳۰۰ سال نشان می‌دهد. این تاریخچه، با ساعت آونگی آغاز می‌شود، که کریستین هویگنس آن را در سال ۱۶۵۶ اختراع کرد، و با ساعت‌های میزر هیدروژن امروزی به پایان می‌رسد.

۱-۴ استاندارد طول^۲

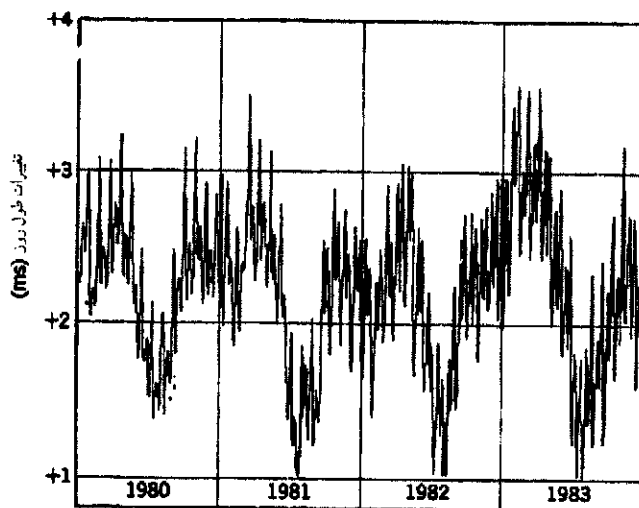
اولین استاندارد بین‌المللی طول، میله‌ای از جنس آلیاژ پلاتین-ایریدیم، به نام متر استاندارد، بود که در اداره بین‌المللی اوزان و مقیاسها، در نزدیکی پاریس، نگهداری می‌شد. یک متر، طبق تعریف، برابر بود با فاصله بین دو شیار باریک که نزدیک دو انتهای میله حک شده بود؛ در شرایطی که میله در دمای صفر درجه کلاسیوس (سانتی‌گراد)، و در وضعیت مکانیکی معینی قرار داشت. به ملاحظات تاریخی، قرار بود این متر برابر با یک ده‌میلیونیم فاصله قطب شمال تا استوا، روی نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، باشد. اما اندازه‌گیری دقیق نشان داد که طول میله متر استاندارد، کمی (در حدود ۰.۲۳ درصد) با این مقدار تفاوت دارد. از آنجا که متر استاندارد، چندان در دسترس نیست، بدلهای

۱. نگاه کنید به

"The Earth's Rotation Rate", John Wahr, *American Scientist* January-February 1985, p. 41.

۲. نگاه کنید به

"The New Definition of the Meter," P. Giacomo, *American Journal of Physics*, July 1984, p. 607.

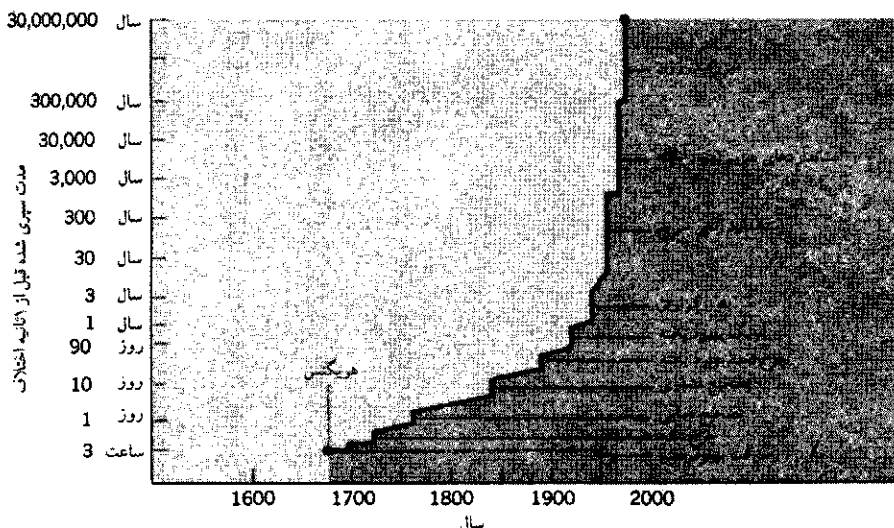


شکل ۲. تغییرات طول روز در یک دوره ۴ ساله. دقت کنید که مقیاس عمودی تنها ۰.۰۰۳ms = ۳ms است.^۱

سزیم، در یک دوره ۴ ساله نشان می‌دهد. پس ببینید که دوره تناوب چرخش زمین، برای کار دقیق، چه استاندارد ضعیفی برای زمان است. تغییراتی را که در شکل ۲ می‌بینیم می‌شود به اثرهای کشندی [جزرو مدی] ماه، و تغییرات فصلی بادهای جو زمین نسبت داد.

در سیزدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۶۷، ثانیه ساعت سزیم به‌عنوان استاندارد جهانی زمان پذیرفته شد. تعریف ثانیه این است:

یک ثانیه برابر است با مدت ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ ارتعاش تابشی (با طول موج خاص) که از اتم سزیم گسیل



شکل ۳. پیشرفت زمان‌سنجی در طی قرون. ساعتهای آونگی اولیه، در هر چند ساعت یک ثانیه جلو یا عقب می‌افتادند؛ ساعتهای امروزی میزرهایدروژن، هر ۳۰۰۰۰۰۰۰ سال یک ثانیه اختلاف پیدا می‌کنند.

دیگری هم دارد. اتمهای ^{86}Kr همه‌جا پیدا می‌شوند، همسان‌اند، و نوری با طول‌موج یکسان گسیل می‌کنند، طول‌موج خاصی که انتخاب شده است، مشخصه انحصاری ^{86}Kr ، و بسیار تیز و مشخص است. این ایزوتوپ را می‌شود به‌آسانی در شکل خالص‌اش فراهم کرد. تا سال ۱۹۸۳، دقتهای مورد نیاز به‌حدی رسید که دیگر استاندارد ^{86}Kr هم نمی‌توانست پاسخگوی آن باشد. در این سال، گام متهورانه‌ای برداشته شد. تعریف متر عوض شد؛ طبق تعریف جدید، متر فاصله‌ای است که نور در بازه زمانی مشخصی می‌پیماید. به بیان هفدهمین کنفرانس عمومی اوزان مقیاسها:

متر طول راهی است که نور در خلأ در بازه زمانی $1/299792458$ ثانیه می‌پیماید.

این، معادل آن است که بگوییم سرعت نور، c ، اکنون طبق تعریف برابر است با

$$c = 299792458 \text{ m/s} \quad (\text{دقیقاً})$$

این تعریف جدید لازم بود، زیرا سنجش سرعت نور چنان دقیق شده بود که صرف تکرارپذیری تولید متر ^{86}Kr ، عاملی محدودکننده به حساب می‌آمد. بنابراین، معقول می‌نمود که سرعت نور را به‌عنوان کمیتهی تعریف شده بپذیریم و آن را، همراه با استاندارد دقیقاً تعریف‌شده زمان (ثانیه)، برای تعریف جدید متر به‌کار ببریم.

جدول ۴، گستره طولهای مختلف را، برحسب استاندارد متر، نشان می‌دهد.

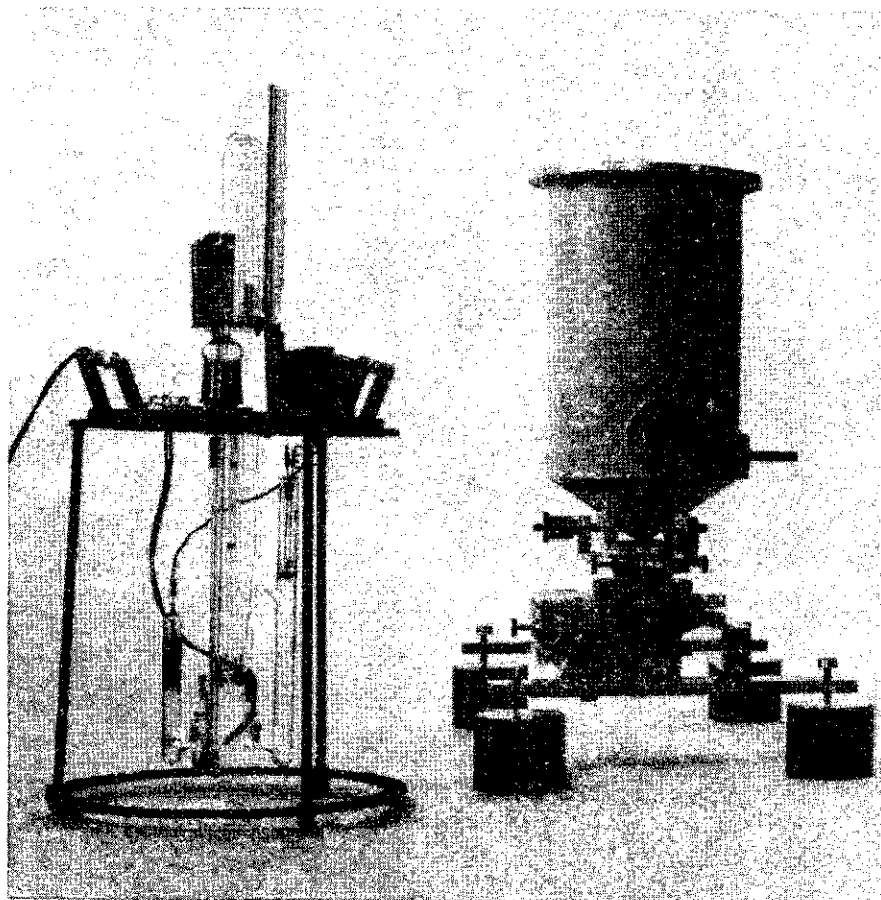
۱. شاخص ۸۶ در ^{86}Kr ، عدد جرمی (عدد پروتونها به‌اضافه‌ی عدد نوترونهای هسته) این ایزوتوپ کریبتون است. گاز کریبتون طبیعی، شامل ایزوتوپهای ۷۸، ۸۰، ۸۲، ۸۳، ۸۴ و ۸۶ است. طول‌موج تابش انتخاب شده در هر یک از این ایزوتوپها، در حدود ۱ در 10^5 با ایزوتوپهای دیگر متفاوت است. این اختلاف از دقت استاندارد، در حدود ۱ در 10^9 ، خیلی بیشتر است. در مورد ساعت سزیم، این عنصر تنها یک ایزوتوپ طبیعی دارد، که عدد جرمی آن ۱۳۳ است.

دقیقی از روی آن ساخته شد و به‌عنوان نمونه‌های اصلی در اختیار مؤسسات و آزمایشگاههای استانداردها در سراسر دنیا قرار گرفت. از این استانداردهای ثانویه، برای مدرج کردن میله‌های سنجش، که از استانداردهای ثانویه هم قابل وصولتر بودند، استفاده می‌شد. بنابراین، تا همین اواخر، مأخذ همه وسایل و میله‌های سنجش طول — که طی مقایسه‌های پیچیده‌ای به‌کمک میکروسکوپ و ابزارهای تقسیم‌کننده تولید می‌شدند — متر استاندارد بود.

دقت فرایندهای مقایسه خراشهای روی میله به‌وسیله میکروسکوپ، دیگر برای تکنولوژی و علوم جدید کافی نیست. در سال ۱۸۹۳، آلبرت مایکلسون، فیزیکدان آمریکایی، متر استاندارد را با طول‌موج نور سرخی که از اتم کادمیم گسیل می‌شود مقایسه کرد و به‌این وسیله استاندارد دقت‌تر و قابل وصولتر به‌دست آورد. مایکلسون طول میله متر را به‌دقت اندازه گرفت و دریافت که متر استاندارد، 1553163.5 برابر این طول‌موج است. در هر آزمایشگاهی، به‌راحتی می‌شد لامپ کادمیم مشابهی تهیه کرد. به‌این ترتیب، مایکلسون روشی یافت که دانشمندان سراسر جهان می‌توانستند با آن استاندارد دقیقی از طول داشته باشند، بی‌آنکه به‌میله متر استاندارد رجوع کنند.

با وجود این پیشرفت تکنولوژیکی، میله فلزی تا سال ۱۹۶۰ همچنان استاندارد رسمی طول بود، تا آنکه در این سال، در یازدهمین کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها، یک استاندارد اتمی برای متر پذیرفته شد. این استاندارد، عبارت است از طول‌موج (در خلأ) نور سرخ-نارنجی معینی که از یک ایزوتوپ خاص کریبتون ^{86}Kr ، در شرایط تخلیه الکتریکی گسیل می‌شود (شکل ۴). به‌طور مشخص، یک متر برابر با 1650763.73 طول‌موج این نور تعریف شد. با فراهم شدن امکان اندازه‌گیری طولهایی به‌اندازه کسری از طول‌موج، دانشمندان با این استاندارد جدید می‌توانستند طولها را با خطایی کمتر از 10^{-9} با هم مقایسه کنند.

انتخاب استاندارد اتمی، علاوه بر افزایش دقت سنجش طول، مزایای



شکل ۴. یک لامپ کریپتون در آزمایشگاه‌های ملی فیزیک، تدینگتون، انگلستان. لوله شیشه‌ای در سیستم طرف چپ، حاوی گاز ^{86}Kr است. این گاز، در اثر تحریک با جریان الکتریکی، نورگسیل می‌کند. لامپ را در زمای طرف راست می‌گذارند تا آن را در دمای نیتروژن مایع (-210°C) نگه دارد. نور از سوراخ کوچک زمزا مشاهده می‌شود.

جدول ۴. مقادیر اندازه‌گیری شده بعضی طولها*

طول	متر
فاصله دورترین اختروش رصد شده	2×10^{26}
فاصله کهکشان امراةالسلسله از ما	2×10^{22}
شعاع کهکشان ما	6×10^{19}
فاصله نزدیکترین ستاره از ما (پروکسیماتورس)	4×10^{16}
شعاع میانگین مدار دورترین سیاره (پلوتون)	6×10^{12}
شعاع خورشید	7×10^8
شعاع زمین	6×10^6
ارتفاع قله اورست	9×10^3
قد یک آدم معمولی	2×10^0
ضخامت هر صفحه این کتاب	1×10^{-2}
اندازه یک ویروس معمولی	1×10^{-6}
شعاع اتم هیدروژن	5×10^{-11}
شعاع مؤثر پروتون	1×10^{-15}

* مقادیر تقریبی‌اند.

از ما ($4.0 \times 10^{16} \text{m}$) چند سال نوری است.
حل: ضریب تبدیل سال به ثانیه عبارت است از

$$1 \text{ y} = 1 \text{ y} \times \frac{365,25 \text{ d}}{1 \text{ y}} \times \frac{24 \text{ h}}{1 \text{ d}} \times \frac{60 \text{ min}}{1 \text{ h}} \times \frac{60 \text{ s}}{1 \text{ min}}$$

$$= 3,16 \times 10^7 \text{ s}$$

سرعت نور، تا سه رقم با معنی $3,00 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. بنابراین، نور در یک سال، مسافت

$$(3,00 \times 10^8 \text{ m/s})(3,16 \times 10^7 \text{ s}) = 9,48 \times 10^{15} \text{ m}$$

را می‌پیماید. پس

$$1 \text{ سال نوری} = 9,48 \times 10^{15} \text{ m}$$

فاصله پروکسیماتورس از ما برابر است با

$$(4,0 \times 10^{16} \text{ m}) \times \frac{1 \text{ سال نوری}}{9,48 \times 10^{15} \text{ m}} = 4,2 \text{ سال نوری}$$

نزدیکترین ستاره از زمین در فاصله ۴,۲ سال نوری قرار دارد.

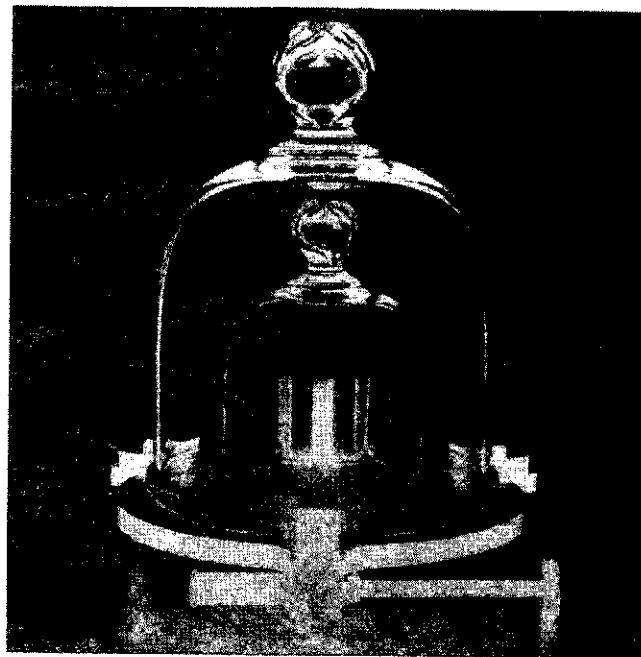
مثال ۲. سال نوری که یک مقیاس طول است (نه مقیاس زمان) برابر با مسافتی است که نور در یک سال می‌پیماید. ضریب تبدیل سال نوری به متر را حساب کنید، و تعیین کنید که فاصله

۱-۵ استاندارد جرم

استاندارد SI جرم، استوانه‌ای از جنس پلاتین-ایریدیم است که در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها نگهداری می‌شود، و بنابر توافق بین‌المللی، جرم آن ۱ کیلوگرم تعیین شده است. استانداردهای ثانوی برای مؤسسات استاندارد به‌همه کشورهای جهان فرستاده می‌شوند. جرم اجسام دیگر را می‌توان، با استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای یا بازوهای یکسان، با دقت ۱ در 10^8 تعیین کرد.

نسخه بدلی از استاندارد بین‌المللی جرم، به نام کیلوگرم سرنمونه شماره ۲۰، در ایالات متحد آمریکا در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی، زیر یک سرپوش، نگهداری می‌شود (شکل ۵). این استاندارد را، حداکثر سالی یک‌بار، برای کنترل مقادیر استانداردهای سوم از زیر سرپوشها بیرون می‌آورند. سرنمونه شماره ۲۰ را از سال ۱۸۸۹ تاکنون دوبار به‌فرانسه برده‌اند و با کیلوگرم اصلی مجدداً مقایسه کرده‌اند. هنگامی که این جسم را از زیر سرپوش خارج می‌کنند، همیشه دو نفر حضور دارند: یکی کیلوگرم را با پنس نگه می‌دارد، و دومی مراقب است که اگر کیلوگرم از دست اولی افتاد آن را بگیرد.

جدول ۵ اندازه‌های چند جرم را نشان می‌دهد. توجه کنید که حدود گستره این جرمها تا 10^{23} مرتبه بزرگی با هم اختلاف دارند. بیشترین جرمها را به‌طور غیرمستقیم با کیلوگرم استاندارد مقایسه کرده‌اند. مثلاً، برای تعیین جرم زمین می‌توان نیروی جاذبه گرانشی بین دو کره سربی را در آزمایشگاه، سنجید و آن را با جاذبه زمین بریک جرم معین مقایسه کرد (بخش ۱۶-۳). جرم کره‌ها را باید با مقایسه مستقیم با استاندارد کیلوگرم به‌دست آورد.



شکل ۵. استاندارد ملی سرنمونه کیلوگرم شماره ۲۰، زیر سرپوش دوگانه‌اش در مؤسسه ملی استانداردها و تکنولوژی ایالات متحد آمریکا.

جدول ۵. مقادیر اندازه‌گیری شده بعضی از جرمها*.

کیلوگرم	جسم
10^{53}	عالم شناخته‌شده (نخمين)
2×10^{23}	کهکشان ما
2×10^{20}	خورشيد
6×10^{22}	زمين
7×10^{22}	ماه
7×10^7	کشتی اقیانوس‌یما
4×10^3	فيل
6×10^1	انسان
3×10^{-2}	دانه انگور
7×10^{-10}	ذره غبار
1×10^{-15}	دیروس
5×10^{-17}	مولکول بنی‌سیلین
4×10^{-26}	اتم اورانیم
2×10^{-27}	پروتون
9×10^{-31}	الکترون

* مقادیر تقریبی‌اند.

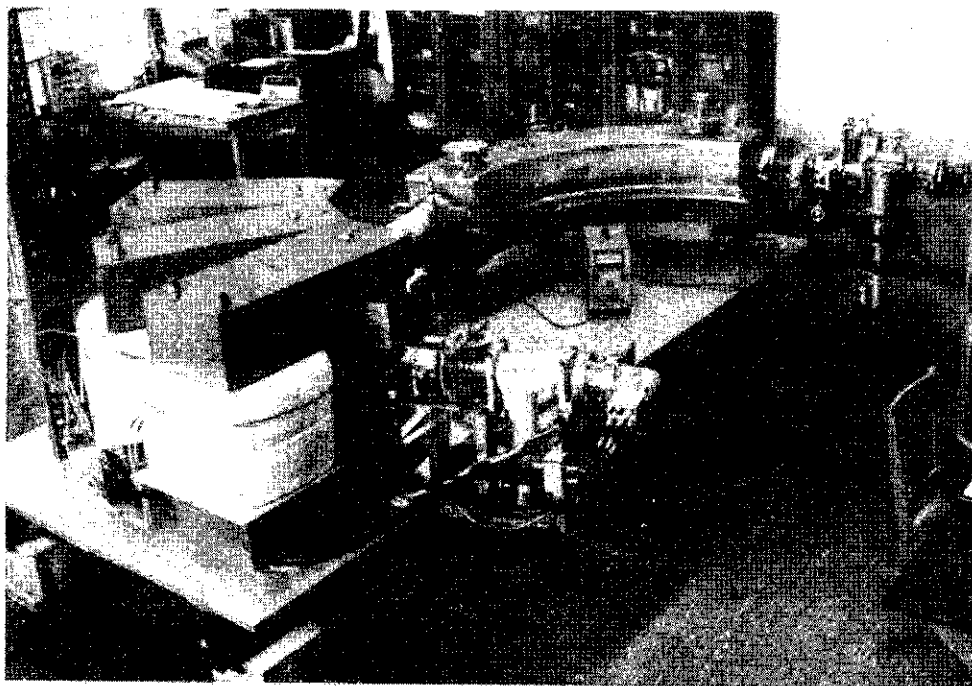
جدول ۶. نتایج اندازه‌گیری جرم چند اتم.

خطا (u)	جرم (u)	ایزوتوپ
$1.000000000 \times 10^{-8}$	۱.۰۰۷۸۲۵۰۴	^1H
(دقیق)	۱۲.۰۰۰۰۰۰۰۰	^{12}C
$1.700000000 \times 10^{-8}$	۶۳.۹۲۹۷۶۵۶	^{63}Cu
$1.200000000 \times 10^{-8}$	۱۰۱.۹۱۱۱۹۵	^{107}Ag
$6.000000000 \times 10^{-8}$	۱۳۶.۹۰۷۰۷۳	^{137}Cs
$7.000000000 \times 10^{-8}$	۱۸۹.۹۵۹۹۱۷	^{195}Pt
$2.400000000 \times 10^{-7}$	۲۳۸.۰۴۹۵۵۴۶	^{238}Pu

در مقیاس اتمی، استاندارد دیگری برای جرم وجود دارد که جزو یکاهای SI نیست. این استاندارد، جرم اتم ^{12}C است که، طبق توافق بین‌المللی، دقیقاً برابر با ۱۲ یکای جرم اتمی (u) تعریف می‌شود. جرم اتمهای دیگر را می‌توان، به‌کمک طیف‌سنج جرمی، با دقت خوبی تعیین کرد (شکل ۶؛ و بخش ۲۳-۲). جدول ۶ جرم چند اتم را، همراه با برآورد خطاهای سنجش آنها، نشان می‌دهد. علت نیاز به چنین استانداردی برای جرم آن است که، به‌لطف روشهای آزمایشگاهی امروزی، دقت مقایسه جرم اتمهای مختلف می‌تواند بیش از آنی باشد که با کیلوگرم استاندارد امکان دارد. به‌رحال در جانشین کردن یک استاندارد اتمی جرم به‌جای استاندارد کیلوگرم پیشرفتهایی حاصل شده است. رابطه تقریبی استاندارد اتمی فعلی و استاندارد اصلی چنین است

$$1 \text{ u} = 1.661 \times 10^{-27} \text{ kg}$$

یکای دیگری در SI که به یکای بالا مربوط می‌شود مول است،



شکل ۶. یک طیف‌سنج جرم با قدرت تفکیک زیاد در دانشگاه مانیتوبا در کانادا. از چنین ابزارهایی برای تعیین دقیق جرم اتمها، مانند آنهایی که در جدول ۶ آمده است، استفاده می‌شود.

$3.1416 \times 10^9 \text{ m}$ است. اگر واقعاً مطمئن باشیم که $x = 3.14159 \times 10^9 \text{ m}$ است و بگوییم $x = 3 \text{ m}$ ، اطلاعاتی را حذف کرده‌ایم که می‌تواند مهم باشد. اگر بیش از $x = 3 \text{ m}$ چیزی ندانیم و بگوییم $x = 3.14159 \times 10^9 \text{ m}$ ، اطلاعات اضافی داده‌ایم، اطلاعاتی که نمی‌دانیم درست است یا نه. دقت در تعداد رقمهای بامعنی، در بیان نتایج آزمایش و محاسبه، اهمیت دارد، و ارائه رقمهای بامعنی به تعداد بیشتری کمتر از آنچه باید، هر دو به یک میزان نادرست است.

برای تعیین تعداد رقمهای بامعنی چند قاعده ساده وجود دارد.

قاعده ۱. از چپ شروع کنید و بدون در نظر گرفتن صفرهای سمت چپ عدد، تعداد رقمها را تا نخستین رقم مشکوک بشمارید. به این ترتیب $x = 3 \text{ m}$ تنها یک رقم بامعنی دارد و نوشتن آن به شکل $x = 3.000 \times 10^9 \text{ km}$ نیز تعداد رقمهای بامعنی را تغییر نمی‌دهد. اما اگر بنویسیم $x = 3.0 \text{ m}$ (یا $x = 3.000 \times 10^9 \text{ km}$)، که هم‌ارز همان است، معنی‌اش این است که مقدار x را تا دو رقم بامعنی می‌دانیم. به‌ویژه به یاد داشته باشید که، اگر دقت داده‌های اولیه به شما اجازه نمی‌دهد، نباید همه ۹ یا ۱۰ رقمی را که روی صفحه ماشین حسابتان ظاهر می‌شود در نتیجه بنویسید! بیشتر محاسباتی که ما در این کتاب انجام می‌دهیم تا دو یا سه رقم بامعنی است.

مراقب نمادگذارهای مبهم باشید: معلوم نیست که $x = 3.0 \text{ m}$ یک رقم بامعنی، دو رقم بامعنی، یا سه رقم بامعنی دارد؛ نمی‌توان گفت که صفرهای این عبارت، اطلاعاتی دربر دارند یا صرفاً برای مشخص کردن مرتبه رقم ۳ اند. در این مورد برای روشنتر کردن وضعیت رقمهای بامعنی، باید بنویسیم $x = 3 \times 10^9 \text{ m}$ یا $x = 3.0 \times 10^9 \text{ m}$ یا $x = 3.00 \times 10^9 \text{ m}$.

قاعده ۲. هنگام ضرب و تقسیم، تعداد رقمهایی که در نتیجه نگه

که برای سنجش مقدار ماده به‌کار می‌رود. یک مول اتم ^{12}C ، مقدار ماده‌ای است که دقیقاً ۱۲ گرم جرم دارد و تعداد اتمهای آن برابر با ثابت آووگادرو، N_A ، است

$$N_A = 6.0221367 \times 10^{23} \text{ ذره بر مول}$$

این عدد با آزمایش به‌دست می‌آید و خطای آن در حدود یک در میلیون است. یک مول از هر ماده‌ای شامل همین تعداد جزء بنیادی (اتم، مولکول، یا هر چیز دیگر) از آن ماده است. پس ۱ مول گاز هلیوم N_A اتم He دارد، ۱ مول اکسیژن شامل N_A مولکول O_2 است، و ۱ مول آب N_A مولکول H_2O دارد.

برای ارتباط دادن یکاهای اتمی جرم به یکاهای بزرگ، باید از ثابت آووگادرو استفاده کرد. جانشین کردن استاندارد کیلوگرم با استانداردهای اتمی مستلزم آن خواهد بود که دقت سنجش مقدار N_A ، حداقل دو مرتبه بزرگی بیشتر شود تا بتوان جرم اجسام را با دقت ۱ در 10^8 تعیین کرد.

۶-۱ دقت و رقمهای بامعنی

با بهتر شدن کیفیت سنجها و پیچیده‌تر شدن روشهای سنجش، می‌توان دقت آزمایشها را مدام بالا برد؛ یعنی می‌توان نتایجی با رقمهای بامعنی بیشتر به‌دست آورد و خطای اندازه‌گیری را کم کرد. هم تعداد رقمهای بامعنی، و هم خطا، نشانه‌هایی حاکی از برآورد ما از دقت نتیجه‌اند. یعنی مثلاً $x = 3 \text{ m}$ اطلاعات کمتری از $x = 3.14159 \text{ m}$ دربردارد. وقتی اظهار می‌کنیم $x = 3 \text{ m}$ است، منظورمان این است که تا حد معقولی مطمئنیم که x بین 2 m و 4 m است. اما زمانی که می‌گوییم $x = 3.14159 \text{ m}$ ، منظور این است که x احتمالاً 3.14158 m - -

خطای مطلق سنجش وزن شخص و کره یکسان است (11D)، اما خطای نسبی سنجش وزن شخص، یک مرتبه بزرگی از خطای نسبی سنجش وزن کره کمتر است. اگر با این روش بخواهید یک بچه کره یک پاوندی را وزن کنید، خطای نسبی سنجش 10% می‌شود. این نشان می‌دهد که تقریب دو عدد نزدیک به هم چه خطری دارد: خطای نسبی حاصل تقریب می‌تواند بسیار بزرگ باشد.

می‌دارید نباید بیشتر از تعداد رقمهای بامعنی عددی باشد که کمترین دقت را دارد. پس

$$2.3 \times 3.14159 = 7.2$$

گاهی لازم است که این قاعده را با دقت بیشتری به‌کار ببریم. مثلاً

$$9.8 \times 1.03 = 10.1$$

زیرا اگرچه 9.8 به‌لحاظ فنی تنها دو رقم بامعنی دارد، اما خیلی نزدیک به عددی با سه رقم بامعنی است. بنابراین، حاصل ضرب را باید با سه رقم بامعنی بیان کرد.

قاعده 3. هنگام جمع و تفریق، کم‌معنی‌ترین رقمهای حاصل در همان جای (نسبی) ای ظاهر می‌شوند که در اعداد اولیه بوده‌اند. در این موارد آنچه اهمیت دارد تعداد رقمهای بامعنی نیست، بلکه جای قرارگرفتن آنهاست. مثلاً

$$\begin{array}{r} 103.9 \text{ kg} \\ 2.10 \text{ kg} \\ \hline 106.0 \text{ kg} \end{array} \quad \text{یا} \quad \begin{array}{r} 103.9 \text{ kg} \\ 2.10 \text{ kg} \\ \hline 106.0319 \text{ kg} \end{array}$$

کم‌اهمیت‌ترین رقم، یا نخستین رقم مشکوک، را با حرف سیاه نشان داده‌ایم. طبق قاعده 1، باید فقط یک رقم مشکوک داشته باشیم. پس نتیجه را باید به صورت 106.3 kg بیان کنیم، زیرا اگر "3" مشکوک باشد، "19" ای که بعد از آن آمده است اطلاعاتی در بر ندارد و بی‌فایده است.

۷-۱ تحلیل ابعادی

به هر کمیتی که می‌سنجیم یا محاسبه می‌کنیم، معمولاً بعدی وابسته است، مثلاً مقدار جذب صوت در یک محیط بسته و احتمال وقوع واکنشهای هسته‌ای، هر دو بعد مساحت دارند. هر کمیت را می‌توان برحسب یکاهای متفاوتی بیان کرد، اما این کار بعد کمیت را عوض نمی‌کند: مساحت را چه برحسب m^2 بیان کنند، چه برحسب ft^2 ، چه برحسب هکتار، چه برحسب سایرین (برای جذب صوت)، و چه برحسب بارن (برای واکنشهای هسته‌ای)، به هر حال مساحت است و بعد مساحت دارد. پیش از این، استانداردهای سنجش را به‌عنوان کمیت‌های بنیادی تعریف کردیم. به‌همین ترتیب، می‌توانیم مجموعه‌ای از ابعاد بنیادی را، براساس استانداردهای مستقل، انتخاب کنیم. در میان کمیت‌های مکانیکی، جرم، طول، و زمان، بنیادی و مستقل از یکدیگرند و کمیت‌های دیگر را می‌توان برحسب آنها تعریف کرد. پس اینها را به‌عنوان ابعاد بنیادی می‌گیریم و، به ترتیب، با M ، L ، و T نشان می‌دهیم.

هر معادله‌ای باید از نظر ابعادی سازگار باشد؛ یعنی بعد کمیت‌های در طرف معادله باید یکی باشد. در خیلی از موارد، توجه به بعد کمیت‌ها می‌تواند جلوی اشتباه را بگیرد. مثلاً در فصل بعد نشان می‌دهیم که مسافت x ، که متغیری با شروع از حالت سکون، و حرکت با شتاب ثابت a ، طی زمان t می‌پیماید، $x = \frac{1}{2}at^2$ است. یکای شتاب، چیزی مثل m/s^2 است. بعد هر کمیت را، با کرشه نشان می‌دهیم: $[x] = L$ و $[t] = T$. بنابراین، $[a] = L/T^2$ یا $[a] = LT^{-2}$. اگر به‌یکای x در نتیجه به بعد شتاب توجه داشته باشیم، هیچ‌وقت رابطه‌ای مثل $x = \frac{1}{2}at^2$ یا $x = \frac{1}{2}at$ نخواهیم نوشت.

تحلیل ابعادی خیلی وقتها می‌تواند در به‌دست آوردن معادلات هم مفید باشد. روش کار را در دو مثال زیر شرح می‌دهیم.

مثال 4. برای اینکه جسمی را واداریم که با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، به نیرویی به نام "نیروی مرکزگرا" نیاز داریم. (حرکت دایره‌ای در فصل 4 بررسی می‌شود). نیروی مرکزگرا را تحلیل ابعادی کنید.

حل: اول از خودمان می‌پرسیم که "نیروی مرکزگرای F ، به‌چند متغیرهای دینامیکی‌ای می‌تواند بستگی داشته باشد؟" این جسم

مثال 3. شخصی می‌خواهد یک کره خانگی را وزن کند. تنها وسیله‌ای که در اختیار دارد یک ترازوی معمولی خانگی است. این ترازو رقمی است و نتیجه را به شکل عددی صحیح، برحسب پاوند، بیان می‌کند. بنابراین، شخص ابتدا خودش را وزن می‌کند: 119 پاوند. سپس کره را بغل می‌گیرد و وزن مجموع خودش و کره را تعیین می‌کند: 128 پاوند. خطای نسبی یا درصد خطای اندازه‌گیری وزن شخص و وزن کره چقدر است؟ حل: کم‌معنی‌ترین رقم، رقم یکان است. بنابراین، خطای سنجش وزن شخص، در حدود یک پاوند است؛ یعنی ترازو همه مقادیر بین 118.5 lb و 119.5 lb را 119 lb نشان می‌دهد. بنابراین، خطای نسبی برابر است با

$$\frac{1 \text{ lb}}{119 \text{ lb}} = 0.008 \text{ یا } 0.8\%$$

وزن کره $9 \text{ lb} = 119 \text{ lb} - 118 \text{ lb}$ است. اما خطای سنجش وزن کره هم حدود 1 lb است. پس خطای نسبی در این مورد برابر است با

$$\frac{1 \text{ lb}}{9 \text{ lb}} = 0.11 \text{ یا } 11\%$$

فرض می‌کنیم بستگی زمان پلانک به این ثابتها به صورت زیر باشد

$$t_P \propto c^i G^j h^k$$

باید نماهای i ، j ، و k را پیدا کنیم. معادله ابعادی رابطه بالا عبارت است از

$$[t_P] = [c^i][G^j][h^k]$$

$$T = (LT^{-1})^i (L^2 T^{-2} M^{-1})^j (ML^2 T^{-1})^k \\ = L^{i+2j+2k} T^{-i-2j-k} M^{-j+k}$$

نماهای دوطرف را برابر می‌گذاریم، نتیجه می‌شود که

$$\circ = i + 3j + 2k \quad : \text{نمای L}$$

$$1 = -i - 2j - k \quad : \text{نمای T}$$

$$\circ = -j + k \quad : \text{نمای M}$$

این سه معادله را حل می‌کنیم و سه مجهول را به دست می‌آوریم

$$i = -\frac{5}{2}, \quad j = \frac{1}{2}, \quad k = \frac{1}{2}$$

بنابراین

$$t_P \propto c^{-5/2} G^{1/2} h^{1/2} = \sqrt{\frac{Gh}{c^5}} \\ = \sqrt{\frac{(6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ kg})(6.63 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s})}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^5}} \\ = 1.35 \times 10^{-43} \text{ s}$$

ثابت پلانک، طبق تعریف معمول، با یک ضریب $(2\pi)^{-1/2}$ با عبارت بالا فرق می‌کند. چنین ضرایب بی‌بعدی را نمی‌توان با تحلیل ابعادی به دست آورد.

به همین ترتیب، می‌توانیم طول پلانک و جرم پلانک را هم به دست بیاوریم (مسائل ۴۱ و ۴۲). این کمیتها هم تعبیرهای بنیادی دارند.

پرسشها

۱. این گفته را نقد کنید: "یک استاندارد، یکبار که انتخاب شد، به صرف "استاندارد" بودنش، تغییرناپذیر است."

۲. به نظر شما یک استاندارد، به جز دسترس‌پذیری و تغییرناپذیری، چه خواص مطلوب دیگری باید داشته باشد؟

۳. آیا می‌توانیم سیستمی از یکاهای پایه (جدول ۱) داشته باشیم که زمان جزء آن نباشد؟

متحرک تنها سوزنی دارد که می‌تواند مهم باشند: جرم m ، سرعت v ، و شعاع مسیر دایره‌ای r . بنابراین، نیروی مرکزگرای F ، صرفنظر از ثابتهای بی‌بعد، باید از چنین معادله‌ای به دست بیاید:

$$F \propto m^a v^b r^c$$

که در آن، \propto یعنی "متناسب است با"، و a و b و c نماهایی عددی‌اند که باید از تحلیل ابعادی به دست بیایند. چنانکه در بخش ۱-۲ گفتیم (و در فصل ۵ خواهیم دید)، یکای نیرو kg m/s^2 است، یعنی بعد آن $[F] = \text{MLT}^{-2}$ است. پس معادله ابعادی نیروی مرکزگرا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$[F] = [m^a][v^b][r^c]$$

$$\text{MLT}^{-2} = \text{M}^a (\text{L/T})^b \text{L}^c$$

$$= \text{M}^a \text{L}^{b+c} \text{T}^{-b}$$

سازگاری ابعادی مستلزم آن است که ابعاد بنیادی دوطرف معادله یکسان باشد. پس نماها را در دو طرف برابر می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$a = 1 \quad : \text{نمای M}$$

$$b = 2 \quad : \text{نمای T}$$

$$b + c = 1 \quad : \text{نمای L} \quad \text{و از آنجا} \quad c = -1$$

بنابراین

$$F \propto \frac{mv^2}{r}$$

رابطه واقعی نیروی مرکزگرا، که از قوانین نیوتون و هندسه حرکت دایره‌ای به دست می‌آید، $F = mv^2/r$ است. می‌بینیم که تحلیل ابعادی، بستگی دقیق این نیرو با متغیرهای مکانیکی را به ما داده است! اما همیشه هم نتیجه به این خوبی نیست، چون تحلیل ابعادی چیزی در مورد ثابتهای بی‌بعد نمی‌گوید، در این مورد خاص، ثابت موردنظر ۱ بوده است.

مثال ۵. یکی از مراحل مهم تحول جهان، بلافاصله پس از مهبانگ، زمان پلانک t_P است. مقدار این کمیت به سه ثابت بنیادی بستگی دارد: (۱) سرعت نور (ثابت بنیادی نسبیت)، $c = 3.00 \times 10^8 \text{ m/s}$ ؛ (۲) ثابت گرانش نیوتون (ثابت بنیادی گرانش)، $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}^2 \text{ kg}$ ؛ و (۳) ثابت پلانک (ثابت بنیادی مکانیک کوانتومی)، $h = 6.63 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2/\text{s}$. مقدار زمان پلانک را، با استفاده از تحلیل ابعادی، به دست بیاورید. حل: با توجه به یکاهای این سه کمیت، ابعاد آنها را می‌نویسیم

$$[c] = [\text{m/s}] = \text{LT}^{-1}$$

$$[G] = [\text{m}^2/\text{s}^2 \text{ kg}] = \text{L}^2 \text{T}^{-2} \text{M}^{-1}$$

$$[h] = [\text{kg m}^2/\text{s}] = \text{ML}^2 \text{T}^{-1}$$

۱۸. چرا شرکت‌کنندگان در کنفرانس عمومی اوزان و مقیاسها در سال ۱۹۸۳، سرعت نور را دقیقاً برابر با $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ تعریف نکردند؟ آیا این انتخاب، کار را ساده‌تر نمی‌کرد؟ چرا سرعت نور را دقیقاً 1 m/s اختیار نکردند؟ آیا امکان هر دو انتخاب بالا برای آنها وجود داشت؟ اگر داشت، چرا هر دو را کنار گذاشتند؟

۱۹. روشی برای سنجش (الف) شعاع کره زمین، (ب) فاصله میان خورشید و زمین، و (ج) شعاع خورشید، پیشنهاد کنید.

۲۰. روشی برای سنجش (الف) ضخامت یک صفحه کاغذ، (ب) ضخامت یک حباب صابون، و (ج) قطر اتم، پیشنهاد کنید.

۲۱. اگر کسی بگوید که ابعاد همه اجسام، یک شبه نصف شده است، چگونه می‌توان ادعای او را رد کرد؟

۲۲. آیا استاندارد فعلی کیلوگرم برای جرم، قابل حصول، تغییرناپذیر، قابل بازسازی، و تخریب‌ناپذیر هست؟ آیا مقایسه جرمهای مختلف با آن ساده است؟ آیا استانداردهای اتمی، از هر نظر بهتر نیستند؟ چرا برای جرم هم، مثل طول و زمان، استاندارد اتمی اختیار نمی‌کنیم؟

۲۳. چرا داشتن دو استاندارد جرم، یکی کیلوگرم و یکی جرم اتم 12C ، مفید است؟

۲۴. رابطه میان جرم کیلوگرم استاندارد و جرم اتم 12C چگونه به دست می‌آید؟

۲۵. برای تعیین جرم اجسام جدول ۵، روشهایی عملی پیشنهاد کنید. ۲۶. اجسامی پیشنهاد کنید که جرم آنها در گستره وسیع بین جرم کشتی اقیانوسپیما و جرم ماه (جدول ۵) واقع باشد و این جرمها را تخمین بزنید.

۲۷. مخالفان سیستم متریک (در کشورهایی که این سیستم را نپذیرفته‌اند) اغلب سفسطه می‌کنند که، مثلاً، "به جای اینکه ۱۱b کره بخرید، باید 454kg کره بخرید." منظورشان این است که زندگی مشکلتر می‌شود. این نوع استدلالها را چگونه باید رد کرد؟

مسئله‌ها

بخش ۱-۲ سیستم بین‌المللی یکاها

۱. با استفاده از پیشوندهای جدول ۲، این عبارتها را بیان کنید. (الف) 10^6 فون؛ (ب) 10^{-6} فون؛ (ج) 10^1 کارت؛ (د) 10^1 لو؛ (ه) 10^{12} ورس؛ (و) 10^{-1} مال؛ (ز) 10^{-2} مانتال؛ (ح) 10^{-9} مسکن؛ (ط) 10^{-12} لو؛ (ی) 10^{-18} ماتیک؛ (ک) $10^2 \times 2$ مرغ. خودتان هم عبارتهای مشابهی بسازید.^۱

۲. بعضی از پیشوندهای یکاهای SI، وارد زندگی روزمره هم شده‌اند. (الف) حقوق سالانه $36K$ (یعنی $36k\$$) معادل هفته‌ای چقدر است؟ (ب) جایزه بزرگ یک بخت‌آزمایی، 10 مگادالر است که طی

۴. از هفت یکای پایه جدول ۱، تنها یکی — کیلوگرم — پیشوند دارد (جدول ۲). آیا معقولتر نیست که جرم استوانه پلاتین-ایریدیم (در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاسها) را، به جای 1kg برابر با 1g تعریف کنند؟ ۵. پیشوند "میکرو" در عبارت "اجاق میکروموج" نشانه چیست؟ پیشنهاد شده است که به مواد غذایی که با تابش پرتو گاما قابلیت نگهداری آن را زیاد کرده‌ایم، "پیکوموجیده" بگوییم. فکر می‌کنید معنی این اصطلاح چیست؟

۶. خیلی از پژوهشگران، براساس شواهدی، معتقدند که ادراکات فراحسی واقعیت دارند. با فرض اینکه چنین پدیده‌ای واقعاً در طبیعت وجود داشته باشد، برای توصیف کمی آن دنبال کدام کمیت یا کمیت‌های فیزیکی باید گشت؟

۷. عده‌ای از فیزیکدانها و فیلسوفها معتقدند که اگر نتوان روشی برای تعیین یک کمیت فیزیکی توصیف کرد، آن کمیت آشکارناپذیر است؛ کمیتی است که باید آن را رها کرد زیرا واقعیت فیزیکی ندارد. همه دانشمندان چنین نظری ندارند. به نظر شما، نکات مثبت و منفی این دیدگاه چیست؟ ۸. چند پدیده تکرارشونده طبیعی نام ببرید که بتواند استانداردهای مناسب زمان باشند.

۹. می‌شد "۱ ثانیه" را به عنوان زمان یک نبض رئیس وقت اتحادیه معلمان فیزیک آمریکا تعریف کرد. گالیله هم در بعضی کارهایش ضربان نبض خود را به عنوان زمان سنج به کار گرفت. چرا تعریفی که براساس ساعت‌های اتمی باشد بهتر است؟

۱۰. ویژگیهای یک ساعت خوب چیست؟ ۱۱. با توجه به آنچه درباره آونگ می‌دانید، بگویید که اشکالات استفاده از دوره تناوب آونگ به عنوان استاندارد زمان چیست.

۱۲. در روز ۳۰ ژوئن سال ۱۹۸۱، دقیقه بین ساعت ۵۹ : ۱۰ و ساعت ۰۰ : ۱۱ صبح را 61s گرفتند. همچنین، روز آخر سال ۱۹۸۹ را هم، به اندازه ۱۸، طولانیتر اختیار کردند. گاه‌به‌گاه، این یک ثانیه اضافی (کیبسه) را وارد می‌کنند، چون سرعت چرخش زمین براساس استاندارد اتمی، در حال کند شدن است. چرا این کار، یعنی تنظیم دوباره ساعتها به این شکل، کار خوبی است؟

۱۳. یک ایستگاه رادیویی "روی ۸۹.۵ باند FM" برنامه پخش می‌کند. معنی این عدد چیست؟

۱۴. چرا در SI، یکای پایه‌ای برای مساحت یا حجم وجود ندارد؟ ۱۵. در ابتدا متر را برابر با یک ده‌میلیونیم فاصله قطب شمال تا استوا، از طریق نصف‌النهاری که از پاریس می‌گذرد، تعریف کرده بودند. این تعریف، به مقدار 23.0% با میله متر تفاوت دارد. آیا معنی‌اش این است که میله متر استاندارد تا این اندازه خطا دارد؟

۱۶. آیا می‌توان طول یک خط خمیده را اندازه گرفت؟ اگر می‌شود، چگونه؟

۱۷. هنگامی که میله متر را به عنوان استاندارد طول برگزیدند، مشخص کردند که این تعریف، در چه دمایی است. آیا می‌توان طول را ویژگی بنیادی نامید در حالی که برای تعیین استاندارد آن باید کمیت فیزیکی دیگری، مثل دما، را مشخص کرد؟

۱. رجوع کنید به صفحه ۶۱ کتاب

A Random Walk in Science, compiled, R. L. Weber; Crane, Russak & Co., New York, 1974.

ساعت	یکشنبه	دوشنبه	سه‌شنبه	چهارشنبه	پنجشنبه	جمعه	شنبه
A	۱۲:۳۶:۴۰	۱۲:۳۶:۵۶	۱۲:۳۷:۱۲	۱۲:۳۷:۲۷	۱۲:۳۷:۴۴	۱۲:۳۷:۵۹	۱۲:۳۸:۱۴
B	۱۱:۵۹:۵۹	۱۲:۰۰:۰۲	۱۱:۵۹:۵۷	۱۲:۰۰:۰۷	۱۲:۰۰:۰۲	۱۱:۵۹:۵۶	۱۲:۰۰:۰۳
C	۱۵:۵۰:۴۵	۱۵:۵۱:۴۳	۱۵:۵۲:۴۱	۱۵:۵۳:۳۹	۱۵:۵۴:۳۷	۱۵:۵۵:۳۵	۱۵:۵۶:۳۳
D	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۵۲	۱۲:۰۱:۴۵	۱۲:۰۰:۳۸	۱۱:۵۹:۳۱	۱۱:۵۸:۲۴	۱۱:۵۷:۱۷
E	۱۲:۰۳:۵۹	۱۲:۰۲:۴۹	۱۲:۰۱:۵۴	۱۲:۰۱:۵۲	۱۲:۰۱:۳۲	۱۲:۰۱:۲۲	۱۲:۰۱:۱۲

میکروسکوپیکی به‌کار می‌رود. هر شیک 10^{-8} است. تعداد شیکهای یک ثانیه بیشتر است یا تعداد ثانیه‌های یک سال؟ (ب) قدمت انسان در حدود 10^6 سال است، در حالی‌که سن جهان در حدود 10^{10} سال است. اگر سن جهان را ۱ روز بگیریم، قدمت انسان چند ثانیه می‌شود؟ ۸. رکوردهایی که دو دوند در دو مسابقه متفاوت دو به مسافت یک مایل به‌دست آورده‌اند؛ ۳ دقیقه و $58^{\circ}5$ ثانیه، و ۳ دقیقه و $58^{\circ}20$ ثانیه، است. حداکثر خطا در تعیین مسافت دو مسابقه برحسب فوت چقدر باید باشد تا بتوانیم نتیجه بگیریم که دونده‌ای که این مسافت را در زمان کمتری طی کرده، واقعاً سریعتر دویده است؟ ۹. یک ساعت آونگی (با صفحه ۱۲ ساعته) به‌اندازه 1 min/day جلو می‌رود. اگر این ساعت را میزان کنیم چقدر طول می‌کشد تا دوباره زمان درست را نشان بدهد؟

۱۰. پنج دستگاه ساعت در آزمایشگاهی آزمایش می‌شوند. هر روز درست سر ظهر، که با ساعت اتمی معلوم می‌شود، رقمی که ساعتها نشان می‌دهند ثبت می‌شود. این کار به‌مدت یک هفته ادامه می‌یابد. نتایج آزمایش در جدول بالا آمده است. این ساعتها را به‌ترتیب بهتر بودن زمان‌سنجی آنها مرتب کنید. علت انتخاب خودتان را بیان کنید. ۱۱. سن جهان در حدود 10^{17} s است؛ دوام کوتاهترین تپ [پالس] نور که (تا سال ۱۹۹۰) در آزمایشگاه تولید شده است، تنها 10^{-15} s بوده است (جدول ۳). یک بازه زمانی فیزیکی ذکر کنید که، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً وسط این دو عدد باشد.

۱۲. با این فرض که طول روز، به‌طور یکنواخت، به‌مقدار 1 s در هر قرن زیاد می‌شود، اثر جمعی این پدیده بر سنجش زمان در طی ۲۰ قرن را حساب کنید. چنین کاهشی در سرعت چرخش زمین را از روی مشاهدات مربوط به‌کسوف در این دوره (۲۰ قرن) پیدا کرده‌اند.

۱۳. زمانی که طول می‌کشد تا ماه، نسبت به ستاره‌های ثابت، به‌مکان اولیه خود برگردد، ۲۷٫۳ روز است و آن را ماه نجومی می‌نامند. بازه زمانی بین دو وضعیت یکسان ماه را ماه قمری می‌نامند. ماه قمری از ماه نجومی طولانیتر است. چرا و چقدر؟

بخش ۴-۱ استاندارد طول

۱۴. قد شخصی 1.9 m است. این کمیت برحسب یکاهای بریتانیایی چقدر است؟

۲۰ سال پرداخت می‌شود. برنده جایزه، هر ماه چقدر پول می‌گیرد؟ (ج) ظرفیت دیسک سخت یک کامپیوتر 30 MB است. اگر هر کلمه ۸ بایت را اشغال کند، این کامپیوتر چند کلمه گنجایش دارد؟ مقصود کامپیوتر کارها از کیلو، 10^3 (یعنی 2^10) است، نه 10^10 .

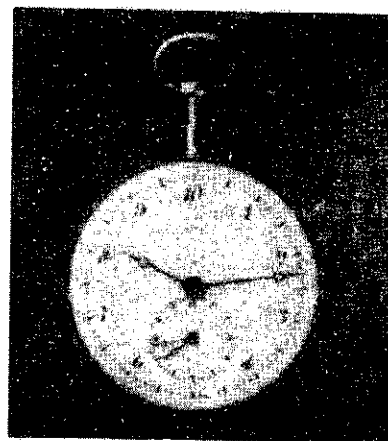
بخش ۳-۱ استاندارد زمان

۳. انریکو فرمی زمانی گفته بود که مدت استاندارد یک جلسه درس (50 min) نزدیک به یک میکروقرن است. هر میکروقرن چند دقیقه است و درصد اختلاف این رقم با تقریب فرمی چقدر است؟

۴. فاصله نیویورک و لوس‌آنجلس در حدود 3000 mi است؛ اختلاف زمانی این شهرها، 3 h است. محیط زمین چقدر است؟

۵. یکی از ارقام معمول برای تعداد ثانیه‌های موجود در یک سال، $10^7 \times \pi$ است. این مقدار چند درصد خطا دارد؟

۶. کمی پس از انقلاب فرانسه، کنوانسیون ملی به‌عنوان بخشی از برنامه معرفی سیستم‌متریک، تلاش کرد زمان را هم بدهد کند. در این تلاش، که البته موفق نشد، هر شبانه‌روز که از نیمه‌شب آغاز می‌شد، به ۱۰ ساعت بدهی تقسیم شده بود، و هر ساعت برابر با ۱۰۰ دقیقه بدهی بود. عقربه‌های ساعتی که از آن دوران باقی مانده است، روی ساعت ۸ بدهی و دقیقه ۲۲٫۸ بدهی متوقف شده‌اند. ساعت (به‌معیار خودمان) چند است؟ (شکل ۷).

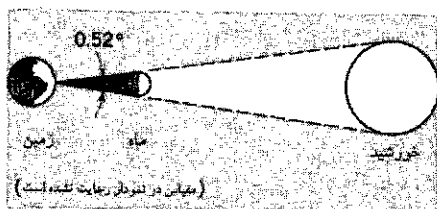


شکل ۷. مسئله ۶

کنید. در نوشته‌های عامه‌خوان از سال نوری خیلی استفاده می‌شود، اما پارسک را عموماً اخترشناسان به‌کار می‌برند.

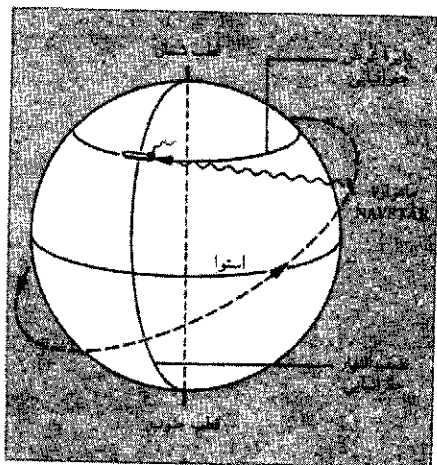
۲۴. شعاع مؤثر پروتون $10^{-15} \times 1$ است؛ شعاع جهان مشاهده‌پذیر (براساس فاصله دورترین اخترش مشاهده‌پذیر) $10^{26} \times 2$ است (جدول ۴). یک مسافت فیزیکی ذکر کنید که مقدار آن، در مقیاس لگاریتمی، تقریباً در وسط این دو عدد باشد.

۲۵. فاصله متوسط خورشید از زمین، 390 برابر فاصله متوسط ماه از زمین است. کسوف کامل را در نظر بگیرید (ماه بین زمین و خورشید؛ شکل ۸) و (الف) نسبت قطر خورشید به قطر ماه، و (ب) نسبت حجم خورشید به حجم ماه را حساب کنید. (ج) ماه از زمین تحت زاویه 0.52° دیده می‌شود و فاصله زمین از ماه 384×10^3 km است. قطر ماه را حساب کنید.



شکل ۸. مسئله ۲۵

۲۶. سیستم ناوبری یک نفتکش، با استفاده از ماهواره‌های سیستم جهانی تعیین موقعیت (GPS/NAVSTAR)، عرض و طول جغرافیایی مکان را به ترتیب برابر با $33^\circ 36' 25.3'' N$ و $77^\circ 31' 48.2'' W$ تعیین می‌کند (شکل ۹). اگر خطای این اعداد $\pm 0.5''$ باشد، خطای سنجش موقعیت نفتکش در راستای (الف) شمال-جنوب (نصف‌النهار) که از آن نقطه می‌گذرد و (ب) شرق-غرب (مداری که از آن نقطه می‌گذرد) چقدر است؟ (ج) نفتکش در کجاست؟



شکل ۹. مسئله ۲۶

۱۵. (الف) هم مسافت دو 10^6 یارد داریم و هم مسافت دو 10^6 متر. کدام یک طولانی‌تر است؟ چند متر؟ چند فوت؟ (ب) هم رکوردهای دو یک مایل را ثبت می‌کنند و هم رکوردهای دو یک مایل متریک (1500 متر) را. این دو مسافت را با هم مقایسه کنید.

۱۶. پایداری ساعت‌های سزومی که به‌عنوان استاندارد اتمی زمان به‌کار می‌روند، چنان است که دو ساعت سزومی در طی حدود 3000000 سال حداکثر 18 با هم اختلاف خواهند داشت. اگر فاصله میان نیویورک و سان‌فرانسیسکو (2572 mi) هم با همین دقت تعیین شده باشد، اختلاف دو بار سنجش این مسافت چقدر خواهد بود؟

۱۷. جنوبگان تقریباً به شکل نیم‌دایره‌ای به شعاع 2000 km است. ضخامت متوسط پوشش یخی آن 3000 m است. جنوبگان چند سانتی‌متر مکعب یخ دارد؟ (خمیدگی زمین را در نظر نگیرید).

۱۸. هکتار یکی از یكاهای مساحت است که معمولاً برای سنجش مساحت زمینها به‌کار می‌رود. هر هکتار طبق تعریف 10^4 m² است. در یک معدن روباز زغال‌سنگ، هر سال 77 هکتار زمین به عمق 26 m حفاری می‌شود. چند کیلومتر مکعب خاک در سال از این معدن بیرون می‌آید؟

۱۹. زمین تقریباً به شکل کره‌ای است به شعاع 6370 km $\times 10^3$. (الف) محیط آن چند کیلومتر است؟ (ب) مساحت سطح آن چند کیلومتر مربع است؟ (ج) حجم آن چند کیلومتر مکعب است؟

۲۰. مقدار تقریبی حداکثر سرعت چند جانور برحسب یكاهای متفاوت، در سطرهای پایین ذکر شده است. این سرعتها را به m/s تبدیل کنید و جانوران را به ترتیب صعودی حداکثر سرعتشان مرتب کنید: سنجاب، 19 km/h؛ خرگوش، 30 گره؛ حلزون، 30 mi/h؛ عنکبوت، 1.8 ft/s؛ چیتا، 19 km/min؛ انسان، 100 cm/s؛ روباه، 1100 m/min؛ شیر، 1900 km/day.

۲۱. سرعت یک سفینه فضایی 19200 mi/h است، این سرعت برحسب سال نوری بر قرن، چقدر است؟

۲۲. یک نوع اتمیبل جدید، مجهز به یک نمایشگر میزان مصرف سوخت است. راننده می‌تواند، با یک کلید، یكاهای بریتانیایی یا SI را انتخاب کند. اعداد نمایش بریتانیایی برحسب mi/gal اند، اما نمایش SI برعکس آن، یعنی برحسب L/km است. نمایش SI برای معادل 30 mi/gal چه عددی است؟

۲۳. فاصله‌های نجومی در مقایسه با ابعاد زمینی آنقدر بزرگ‌اند که برای درک آسانتر فواصل نسبی اشیای نجومی از یكاهای طولی استفاده می‌شود که خیلی از یكاهای معمولی بزرگ‌ترند: یک یكای نجومی (AU) برابر است با فاصله متوسط زمین از خورشید، یعنی 1.5×10^8 km. یک پارسک (pc) مسافتی است که طول یک یكای نجومی از آن فاصله، تحت یک ثانیه قوسی دیده شود، یک سال نوری (ly) مسافتی است که نور، با سرعت 3×10^8 km/s در خلا طی یک سال می‌پیماید. (الف) فاصله زمین تا خورشید را برحسب پارسک و سال نوری بیان کنید. (ب) سال نوری و پارسک را برحسب کیلومتر بیان

شده بود. یک طول موج این تابش، برحسب نانومتر، چقدر است؟ نتیجه را با تعداد مناسبی از رقمهای بامعنی بیان کنید.

۳۸. (الف) $۰.۱۳۲ + ۳۷.۷۶$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید. (ب) $۱۶.۲۶۳۲۵ - ۱۶.۲۶۴$ را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

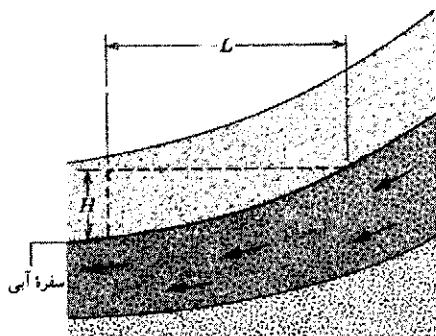
۳۹. (الف) طول یک صفحه مستطیلی فلزی ۸.۴۳cm و عرض آن ۵.۱۲cm است. مساحت این صفحه را، با رقمهای بامعنی به تعداد درست حساب کنید. (ب) شعاع یک صفحه فلزی گرد ۳.۷cm است. مساحت صفحه را، با تعداد درست رقمهای بامعنی، حساب کنید.

بخش ۷-۱ تحلیل ابعادی

۴۰. سنگهای متخلخل می‌توانند آب زیرزمینی را از خودشان عبور دهند. حجم V آب، که در زمان t از سطح مقطعی به مساحت A عبور می‌کند، از رابطه

$$\frac{V}{t} = KA \frac{H}{L}$$

به دست می‌آید، که در آن H برابر با مقدار کاهش ارتفاع سطح بستر نسبت به افق، در طی مسافت L است (شکل ۱۰). این رابطه را قانون دارسی^۱ می‌نامند. کمیت K رسانندگی هیدرولیکی بستر است یکای SI کمیت K چیست؟



شکل ۱۰. مسئله ۴۰

۴۱. در مثال ۵، ثابتهای h ، G ، و c را ترکیب کردیم و کمیتی با بعد زمان به دست آوردیم. با تکرار همین کار کمیتی با بعد طول به دست بیاورید و مقدار عددی آن را محاسبه کنید. ثابتهای بی‌بعد را کنار بگذارید. این طول پلانک است؛ اندازه جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

۴۲. روش مسئله ۴۱ را تکرار کنید و کمیتی با بعد جرم به دست بیاورید. این کمیت جرم پلانک است، یعنی جرم جهان مشاهده‌پذیر در زمان پلانک.

بخش ۵-۱ استاندارد جرم

۲۷. با استفاده از ضرایب تبدیل و داده‌های این فصل، حساب کنید که در ۱.۰kg هیدروژن چند اتم هیدروژن وجود دارد؟

۲۸. مولکول آب (H_2O) دو اتم هیدروژن و یک اتم اکسیژن دارد. جرم اتم هیدروژن ۱.۰u و جرم اتم اکسیژن ۱۶u است. (الف) جرم یک مولکول آب چند کیلوگرم است؟ (ب) در آب اقیانوسهای جهان چند مولکول آب وجود دارد؟ جرم کل اقیانوسهای جهان $۱.۰^{۲۱}\text{kg}$ است. (الف) ۱.۴×۱۰^{۲۱} است. ۲۹. در قاره اروپا، یک "پاوند" نیم کیلوگرم است. کدام یک از این خریدها بصرفه‌تر است؟ یک پاوند پاریسی قهوه به قیمت ۳.۰ دلار یا یک پاوند نیویورکی به قیمت ۲.۴ دلار؟

۳۰. ابعاد یک اتاق $۱۲\text{ft} \times ۱۳\text{ft} \times ۲۱\text{ft}$ است. جرم هوای موجود در آن چقدر است؟ چگالی هوا، در دمای اتاق و فشار عادی جو، $۱.۲\text{kg/m}^۳$ است.

۳۱. طول ضلع یک حبه قند معمولی ۱cm است. طول ضلع جعبه‌ای که درست یک مول حبه قند در آن جا بگیرد چقدر است؟

۳۲. شخصی، با رژیم غذایی، هفته‌ای ۲.۳kg (حدود ۵lb) وزن کم می‌کند. آهنگ کاهش وزن این شخص برحسب میلی‌گرم بر ثانیه چقدر است؟

۳۳. فرض کنید ۱۲h طول می‌کشد که مخزنی محتوی $۵۷۰۰\text{m}^۳$ آب خالی شود. آهنگ خروج آب (برحسب kg/s) از این مخزن چقدر است؟ چگالی آب $۱۰۰۰\text{kg/m}^۳$ است.

۳۴. شعاع متوسط دانه‌های ماسه در ساحل کالیفرنیا $۵۰\mu\text{m}$ است. مساحت کل چه جرمی از این ماسه‌ها برابر با مساحت سطح مکعبی به ضلع ۱m است؟ ماسه از جنس سیلیسیم‌دی‌اکسید است، که جرم هر مترمکعب آن ۲۶۰۰kg است.

۳۵. کیلوگرم استاندارد (شکل ۵) به شکل استوانه‌ای است که ارتفاع آن با قطرش برابر است. نشان بدهید که در میان استوانه‌هایی با حجم یکسان، استوانه‌ای که قطر و ارتفاعش برابر باشد کمترین مساحت سطح را دارد. به این ترتیب، آثار سایش و آلودگی سطحی استوانه استاندارد به حداقل می‌رسد.

۳۶. برای تخمین فاصله بین دو اتم یا دو مولکول مجاور در یک ماده جامد، می‌توان دو برابر شعاع کره‌ای را در نظر گرفت که حجم آن برابر با حجم بر اتم آن ماده باشد. فاصله بین اتمهای مجاور را (الف) در آهن و (ب) در سدیم حساب کنید. چگالی آهن و سدیم به ترتیب $۷۸۷۰\text{kg/m}^۳$ و $۱۰۱۳\text{kg/m}^۳$ است. جرم هر اتم آهن $۹.۰ \times ۱۰^{-۲۶}\text{kg}$ و جرم هر اتم سدیم $۳.۸۲ \times ۱۰^{-۲۶}\text{kg}$ است.

بخش ۶-۱ دقت و ارقام بامعنی

۳۷. طی سالهای ۱۹۶۰ تا ۱۹۸۳، متر برابر با ۱۶۵۰۷۶۳.۷۳ طول موج نور قرمز-نارنجی خاصی که از اتمهای کریپتون گسیل می‌شود تعریف

1. Darcy

۲

حرکت در یک بُعد

مکانیک، قدیمی‌ترین شاخه علوم فیزیکی، علم بررسی حرکت اجسام است. از محاسبه مسیر توپ بیسبال یا مسیر سفینه فضایی‌ای که به مریخ می‌رود گرفته تا تحلیل رد حرکت‌های ذرات بنیادی‌ای که از برخورد ذرات در بزرگترین شتابدهنده‌ها حاصل می‌شوند، همه جزو مسائل مکانیک‌اند. بخشی از مکانیک که به توصیف حرکت اختصاص دارد سینماتیک نامیده می‌شود (سینماتیک برگرفته از معادل واژه حرکت در زبان یونانی است؛ "سینما" به معنی تصاویر متحرک را هم از همین واژه گرفته‌اند). به آن بخشی از مکانیک که به تحلیل علل حرکت مربوط می‌شود دینامیک می‌گویند، (برگرفته از معادل یونانی واژه نیرو؛ دینامیک هم از همین واژه می‌آید). در این فصل، تنها به سینماتیک در یک بعد می‌پردازیم. در دو فصل بعدی این نتایج را به دو و سه بعد تعمیم می‌دهیم. مطالعه دینامیک را در فصل ۵ آغاز خواهیم کرد.

آن، با حرکت نقاط روی محورش فرق می‌کند. (اما چرخ لغزان این خاصیت را دارد. بنابراین چرخ را هم مثل اجسام دیگر، می‌توانیم برای بعضی از محاسبات مانند ذره در نظر بگیریم و برای بعضی دیگر نمی‌توانیم.) تا جایی که تنها با متغیرهای سینماتیکی سروکار داریم، علتی وجود ندارد که حرکت قطار و الکترون را بر یک اساس بررسی نکنیم. هر دو نمونه‌هایی از حرکت ذره‌اند.

همه انواع حرکت راست‌خط ذره را بررسی می‌کنیم. ذره ممکن است سرعت بگیرد، سرعت کم کند، و حتی بایستد و برگردد. به دنبال توصیفی می‌گردیم که همه این امکانات را در برداشته باشد.

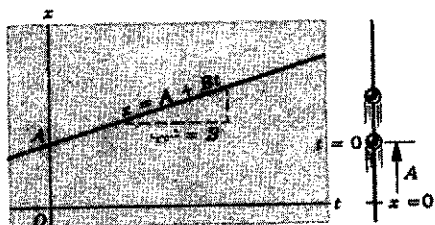
۲-۲ توصیف حرکت

حرکت ذره را به دو طریق توصیف می‌کنیم: با معادلات ریاضی و با نمودار. هر دو راه برای مطالعه سینماتیک مفیدند، و ما هم از هر دو استفاده می‌کنیم. معمولاً روش ریاضی برای حل مسائل بهتر است، زیرا دقت بیشتری از روش نموداری دارد. روش نموداری از این جهت مفید است که خیلی وقتها بصیرت فیزیکی بیشتری، نسبت به معادلات ریاضی، به‌دست می‌دهد.

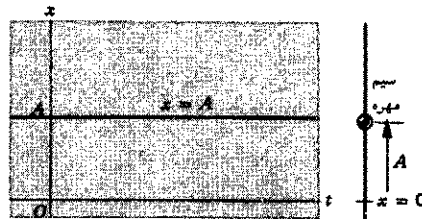
اگر بستگی ریاضی مکان x ذره (نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع معین) به زمان t را برای همه زمانها داشته باشیم، توصیف کاملی از حرکت ذره به‌دست می‌آید. این همان تابع $x(t)$ است. در مثالهای زیر، چند نمونه از انواع ممکن حرکت را همراه با توابع و نمودارهای توصیف‌کننده آنها در نظر می‌گیریم:

۱-۲ سینماتیک ذره

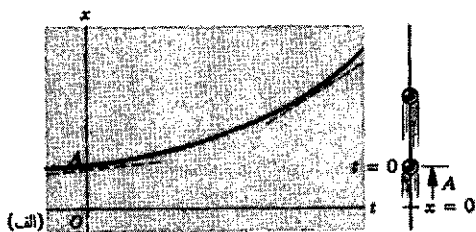
برای شروع مطالعه، مورد ساده‌ای را در نظر می‌گیریم: ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند. حرکت راست‌خط خوبی‌اش این است که با آن می‌توانیم مفاهیم بنیادی سینماتیک، مثل سرعت و شتاب را بدون نیاز به ریاضیات مربوط به بردارها، که معمولاً برای تحلیل حرکت‌های دوبعدی و سه‌بعدی به‌کار می‌رود، به‌سادگی معرفی کنیم. البته در همین شکل محدود حرکت هم می‌توانیم خیلی از وضعیت‌های واقعی را بررسی کنیم: سنگ در حال سقوط، قطار شتابدار، اتومبیل در حال ترمز، گوی هاکلی در حال لغزش، صندوقی که از شیبی بالا کشیده می‌شود، الکترونهای سریع لامپ پرتو x ، و نظایر آنها نمونه‌هایی از این مواردند. در این موارد حالت حرکت می‌تواند تغییر کند (مثلاً ممکن است به گوی هاکلی ضربه بزیم تا شروع به حرکت کند)، جهت حرکت هم می‌تواند تغییر کند (مثلاً می‌شود سنگ را به هوا پرتاب کرد تا دوباره به زمین برگردد)، اما در هر حال این حرکت باید مقید به یک خط راست باشد. برای اینکه بحث را باز هم ساده‌تر کرده باشیم، فعلاً فقط به حرکت یک ذره می‌پردازیم. یعنی اجسام پیچیده را هم مثل یک نقطه‌مادی فرض می‌کنیم. به این ترتیب، می‌توانیم از همه حرکت‌های درونی ممکن چشمپوشی کنیم — مثلاً از حرکت چرخشی (فصلهای ۱۱ تا ۱۳) یا از حرکت ارتعاشی اجزای جسم (فصل ۱۵). در این بحث مواردی را در نظر می‌گیریم که همه اجزای جسم، دقیقاً در یک جهت حرکت می‌کنند. چرخ غلتان چنین خاصیتی ندارد زیرا حرکت نقاط روی لبه



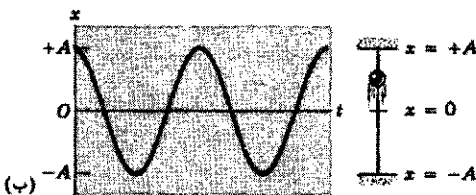
شکل ۲. مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت B در جهت مثبت x روی سیمی می‌لغزد؛ مهره در زمان صفر از $x = A$ شروع به حرکت می‌کند و حرکت آن با خط $x = A + Bt$ توصیف می‌شود.



شکل ۱. مهره‌ای که می‌تواند آزادانه در یک بعد روی سیمی حرکت کند؛ راستای (ثابت) حرکت دلخواه است و الزاماً قائم نیست. در این مورد، مهره در مختصه $x = A$ برابر با ساکن است، و "حرکت" آن با خط راست افقی $x = A$ توصیف می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۳. (الف) مهره‌ای که در یک بعد با سرعت فزاینده در جهت مثبت در روی سیم می‌لغزد. سرعت مهره برابر است با شیب منحنی‌ای که حرکت آن را توصیف می‌کند؛ می‌توانید ببینید که چگونه شیب منحنی به طور پیوسته زیاد می‌شود. (ب) مهره‌ای در یک بعد روی سیم بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند.

راست. دو نمونه از این نوع حرکت عبارت است از:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2 \quad (۳)$$

$$x(t) = A \cos \omega t \quad (۴)$$

در اولی با فرض $C > 0$ ، شیب به طور پیوسته زیاد می‌شود و حرکت ذره مدام سریعتر می‌شود (شکل ۳الف). در دومی، ذره بین $x = +A$ و $x = -A$ نوسان می‌کند (شکل ۳ب)، و سرعت آن نیز همراه با تغییر علامت شیب منحنی در شکل ۳ب، تغییر علامت می‌دهد.

توصیف کامل حرکت، معمولاً پیچیده‌تر از آن است که تا به حال با مثالهای ساده نشان داده‌ایم. به این مثالها توجه کنید:

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. اتومبیلی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، شتاب می‌گیرد، و به سرعت معینی می‌رسد. سپس مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سرانجام ترمز می‌کند و می‌ایستد. شکل ۴ این حرکت را نشان می‌دهد. این حرکت را نمی‌شود صرفاً با یک معادله توصیف کرد؛ برای حالت‌های سکون و شتابدار، باید از دو معادله جداگانه استفاده کرد. برای بخش شتابدار تندشونده

۱. سکون. در این حالت ذره همیشه در نقطه A است:

$$x(t) = A \quad (۱)$$

نمودار این "حرکت" در شکل ۱ آمده است. برای توضیح این نمودار، فرض می‌کنیم ذره مهره‌ای است که بدون اصطکاک روی سیم بلندی می‌لغزد. در این مورد، مهره در نقطه $x = A$ در حالت سکون است. دقت کنید که در نمودار، x را متغیر وابسته (روی محور قائم) و t را متغیر مستقل (روی محور افقی) می‌گیریم.

۲. حرکت با سرعت ثابت. آهنگ حرکت ذره را با سرعت آن توصیف می‌کنیم. در حرکت یک‌بعدی، سرعت می‌تواند مثبت یا منفی باشد؛ ذره اگر در جهت افزایش x حرکت کند سرعت مثبت است، و اگر در جهت کاهش x حرکت کند سرعت منفی است. اندازه سرعت هم معیار دیگری از آهنگ حرکت است. اندازه سرعت همیشه مثبت است و اطلاعی درباره جهت حرکت در بر ندارد.

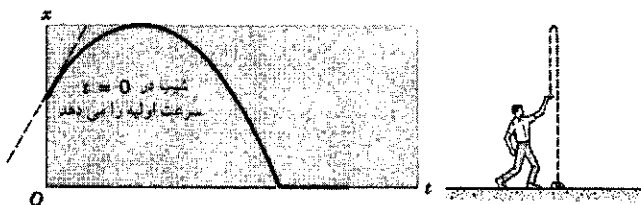
در حرکت با سرعت ثابت، نمودار مکان برحسب زمان خطی راست با شیب ثابت است. از حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌دانیم که شیب هرتابعی مشخص‌کننده آهنگ تغییر آن است. در اینجا، آهنگ تغییر مکان سرعت است، و هر چه شیب نمودار بیشتر باشد، سرعت بیشتر است. در شکل ریاضیاتی داریم

$$x(t) = A + Bt \quad (۲)$$

که نمایش معمول یک خط راست با شیب B است (البته خط را اغلب با $y = mx + b$ نشان می‌دهند).

شکل ۲ حرکت ذره‌ای را نشان می‌دهد که در زمان $t = 0$ در نقطه $x = A$ است. این ذره با سرعت ثابت در جهت افزایش x حرکت می‌کند. به این ترتیب، همان‌طور که از شیب مثبت نمودار برمی‌آید، سرعت آن مثبت است.

۳. حرکت شتابدار. در این مورد سرعت ذره تغییر می‌کند (شتاب، طبق تعریف، برابر است با آهنگ تغییر سرعت)؛ بنابراین، شیب نمودار هم متغیر است. پس نمودار چنین حرکت‌هایی منحنی است. در شکل ۳



شکل ۶. یک گلوله خمیر را به بالا پرتاب می‌کنیم؛ گلوله تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، سپس برمی‌گردد و به زمین می‌افتد، و به محض برخورد به زمین ساکن می‌شود. این منحنی حرکت گلوله را توصیف می‌کند. در حرکت واقعی، نقطه تیز در $x(t)$ کمی گرد است.

اولیه گلوله‌ای است که به طرف بالا پرتاب شده است. سرعت در اوج مسیر (که در آنجا شیب صفر است) به صفر می‌رسد و پس از آن خمیر به طرف پایین حرکت می‌کند و اندازه سرعت آن دائماً بیشتر می‌شود. هنگامی که خمیر به زمین می‌خورد، آن‌ها به حالت سکون در می‌آید و سرعت آن صفر می‌شود.

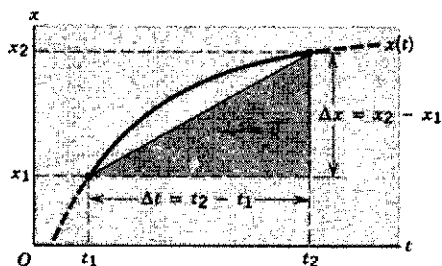
توجه داشته باشید که نمودارهای این بخش اگرچه حرکت را نمایش می‌دهند اما نشان‌دهنده شکل مسیری نیستند که ذرات واقعاً می‌پیمایند. مثلاً در شکل ۶، ذره فقط روی یک خط به بالا و پایین حرکت می‌کند و مسیر آن شبیه به منحنی این شکل نیست.

۲-۳ سرعت متوسط

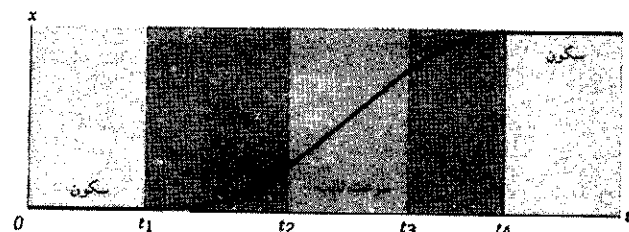
اگر حرکت ذره با نمودارهایی از نوع شکل ۱ یا ۲ توصیف شود، سرعت را می‌توانیم به سادگی در هر بازه زمانی‌ای به دست بیاوریم: سرعت ثابت، و برابر با شیب خط است. در موارد پیچیده‌تر، مثل شکل‌های ۳ تا ۶، که سرعت تغییر می‌کند، بهتر است که سرعت متوسط (\bar{v}) را تعریف کنیم. (پاره خط روی نماد هر کمیت فیزیکی برای نشان دادن متوسط آن کمیت است.)

در شکل ۷ ذره در زمان t_1 در نقطه x_1 است، و در زمان t_2 به نقطه x_2 می‌رسد. سرعت متوسط ذره در این بازه زمانی، طبق تعریف، برابر است با

$$\bar{v} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (5)$$



شکل ۷. سرعت متوسط در بازه Δt بین t_1 و t_2 از روی جابه‌جایی Δx در این بازه به دست می‌آید، شکل واقعی منحنی $x(t)$ در این بازه، در تعیین سرعت متوسط نقشی ندارد.

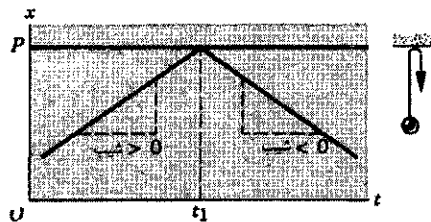


شکل ۴. این منحنی اتومبیلی را توصیف می‌کند که از $t = 0$ تا $t = t_1$ در حالت سکون است، و از این لحظه شروع به شتاب گرفتن می‌کند. در $t = t_2$ شتاب خود را از دست می‌دهد و مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در زمان $t = t_3$ ترمز می‌کند، و سرعتش به تدریج کم می‌شود تا آنکه در زمان $t = t_4$ به صفر می‌رسد.

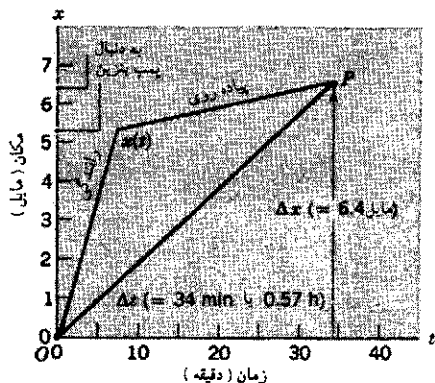
رابطه‌ای از نوع معادله ۳، برای بخش سرعت ثابت رابطه‌ای از نوع معادله ۲، و برای بخش ترمز هم رابطه‌ای دیگر، باز هم از نوع معادله ۳. دقت کنید که نمودار این حرکت دو ویژگی دارد: $x(t)$ پیوسته است (نمودار پرشی ندارد) و شیب نیز پیوسته است (نمودار نقاط تیز ندارد). انتظار داریم که $x(t)$ همواره پیوسته باشد؛ در غیر این صورت، اتومبیل در نقطه‌ای ناپدید می‌شود و در نقطه‌ای دیگر ظاهر می‌شود. بعداً خواهیم دید که نقاط تیز نمودار، نقاطی‌اند که در آنها سرعت به‌طور آتی تغییر می‌کند. این البته گویای یک وضعیت کاملاً فیزیکی نیست، اما تقریب خوبی برای بعضی وضعیتهای فیزیکی است.

۵. جسمی که به مانع برمی‌خورد و بازمی‌گردد. یک "گوی" هاکي با سرعت ثابت روی یخ می‌لغزد، به دیوار برمی‌خورد، و در جهت مخالف و با همان اندازه سرعت بازمی‌گردد. شکل ۵ این حرکت را نشان می‌دهد؛ در اینجا فرض شده است که برخورد آن‌ها جهت حرکت را معکوس می‌کند. در واقع اگر "نقطه" برخورد را دقیقاً بررسی کنیم، درمی‌یابیم که این نقطه تیز نیست بلکه کمی گرد است. این امر ناشی از کشسانی دیوار و گوی هاکي است.

۶. گلوله خمیر چسبنده. دانشجویی یک گلوله خمیر مدل‌سازی را به بالا پرتاب می‌کند؛ نقطه رها کردن توپ بالای سر دانشجو است. توپ تا ارتفاع معینی بالا می‌رود، و سپس برمی‌گردد و به زمین می‌چسبد. شکل ۶ این حرکت را نشان می‌دهد. شیب منحنی در $t = 0$ سرعت



شکل ۵. یک توپ هاکي با سرعت ثابت روی یخ حرکت می‌کند و در زمان t_1 در $x = P$ به یک دیواره صلب برمی‌خورد؛ پس از برخورد از دیواره برمی‌گردد و با سرعتی به همان اندازه سرعت اولیه ولی در خلاف جهت آن حرکت می‌کند. حرکت توپ یک بعدی است. در مورد اجسام واجهنده واقعی، نقطه تیز در $x(t)$ به این تیزی نیست.



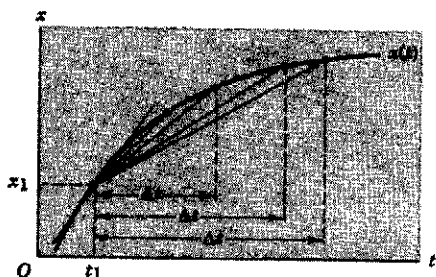
شکل ۸. مثال ۱. خطهایی که با "راندگی" و "پیاده روی" مشخص شده‌اند، حرکت با سرعت‌های ثابت متفاوت با هم را، در دو بخش سفر، نشان می‌دهند. سرعت متوسط، شیب خط OP است.

نمودار $x(t)$ در شکل ۸، به‌تصور مسئله کمک می‌کند. نقاط O و P بازه‌ای را مشخص می‌کنند که می‌خواهیم سرعت متوسط را در آن به‌دست بیاوریم. این کمیت، شیب خط راستی است که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند.

۲-۴ سرعت لحظه‌ای

سرعت متوسط برای بررسی رفتار کلی ذره در یک بازه مفید است، اما برای بررسی جزئیات حرکت کافی نیست. مناسب‌تر آن است که یک تابع ریاضی، $v(t)$ ، داشته باشیم که سرعت ذره را در هر زمان دلخواه به‌دست بدهد. این تابع، سرعت لحظه‌ای است؛ از این به بعد، همه جا منظورمان از "سرعت" همین سرعت لحظه‌ای است.

اگر سرعت متوسط را برای Δt ‌هایی که دائماً کوچکتر می‌شوند حساب کنیم (شکل ۹)، در حالت حدی $\Delta t \rightarrow 0$ ، خطی که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند به مماس بر منحنی $x(t)$ در آن نقطه میل می‌کند و سرعت متوسط نیز به سرعت لحظه‌ای در آن نقطه



شکل ۹. بازه Δt را دائماً کوچک می‌کنیم. در این مورد، t_1 را ثابت نگه داشته‌ایم و سر دیگر بازه، t_2 ، را به t_1 نزدیک می‌کنیم. در حد، بازه به صفر می‌رسد.

که در آن

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad (6)$$

و

$$\Delta t = t_2 - t_1 \quad (7)$$

Δx جابه‌جایی (یعنی تغییر در مکان ذره در بازه زمانی Δt است). از شکل ۷ می‌بینیم که \bar{v} صرفاً همان شیب خط راستی است که نقاط انتهایی بازه را به هم وصل می‌کند.

سرعت متوسط معرف رفتار متوسط در بازه زمانی Δt است. رفتار واقعی ذره بین x_1 و x_2 برای محاسبه سرعت متوسط اهمیتی ندارد. با متوسط‌گیری در واقع جزئیات حرکت بین x_1 و x_2 حذف می‌شود. اگر فرض کنیم که ساعت‌ها همیشه به جلو حرکت می‌کنند ($t_2 > t_1$)، علامت \bar{v} را علامت $\Delta x = x_2 - x_1$ تعیین می‌کند. اگر \bar{v} مثبت باشد، حرکت ذره به‌طور متوسط چنان است که x با افزایش زمان زیاد می‌شود. (ممکن است ذره در ناحیه‌ای از این بازه به عقب هم برگردد. اما به هر حال مختصه x آن در انتهای بازه، بزرگتر از همین مختصه‌اش در ابتدای بازه است.) اگر \bar{v} منفی باشد، ذره به‌طور متوسط رو به عقب حرکت می‌کند. به‌خصوص توجه کنید که طبق تعریف \bar{v} ، در هر حرکتی که نقطه انتهایی و ابتدایی یکی باشد، سرعت متوسط صفر است؛ فرقی هم نمی‌کند که قطعه خاصی در بازه مورد نظر، چقدر سریع طی شده باشد، زیرا جابه‌جایی صفر است. در مسابقات اتومبیلرانی‌ای که مسیر آنها بسته است، اگر بازه زمانی را ابتدا تا انتهای مسابقه بگیریم، سرعت متوسط صفر است!

مثال ۱. دارید اتومبیل خود را در یک جاده مستقیم می‌رانید. سرعت اتومبیل 43 mi/h است و با این سرعت 5.2 mi را می‌پیمایید. اینجا بنزین اتومبیلتان تمام می‌شود و شما ناچار می‌شوید 1.2 mi دیگر تا نزدیکترین پمپ بنزین پیاده بروید. زمان این پیاده‌روی 27 min است. سرعت متوسط شما، از زمانی که اتومبیل به‌راه افتاد تا زمانی که به پمپ بنزین رسیدید، چقدر است؟

حل: برای اینکه سرعت متوسط را از معادله ۵ به‌دست بیاورید باید Δx یعنی کل مسافتی را که پیموده‌اید (جابه‌جایی شما)، و Δt یعنی زمان سپری شده را بدانید. این دو کمیت عبارت‌اند از

$$\Delta x = 5.2 \text{ mi} + 1.2 \text{ mi} = 6.4 \text{ mi}$$

و

$$\Delta t = \frac{5.2 \text{ mi}}{43 \text{ mi/h}} + 27 \text{ min}$$

$$= 7.3 \text{ min} + 27 \text{ min} = 34 \text{ min} = 0.57 \text{ h}$$

بنابراین، از معادله ۵، نتیجه می‌شود که

$$\bar{v} = \frac{6.4 \text{ mi}}{0.57 \text{ h}} = 11.2 \text{ mi/h}$$

جدول ۱. فرایند حدگیری

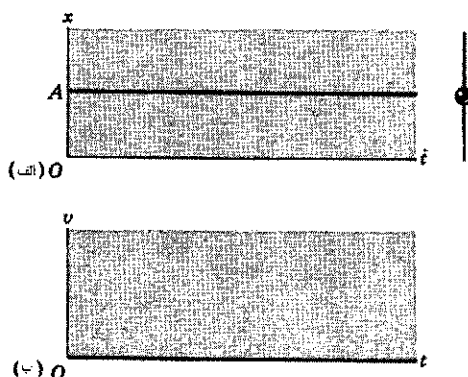
سرعت متوسط (m/s)	بازه‌ها		نقطه پایانی		نقطه ابتدایی	
	Δt (s)	Δx (m)	t_2 (s)	x_2 (m)	t_1 (s)	x_1 (m)
۷٫۰۰	۱٫۰۰۰	۷٫۰۰۰	۲٫۰۰۰	۱۳٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۶٫۰۰	۰٫۵۰۰	۳٫۰۰۰	۱٫۵۰۰	۹٫۰۰۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۸۰	۰٫۴۰۰	۲٫۳۲۰	۱٫۴۰۰	۸٫۳۲۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۵۰	۰٫۲۵۰	۱٫۳۷۵	۱٫۲۵۰	۷٫۳۷۵	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۴۰	۰٫۲۰۰	۱٫۰۸۰	۱٫۲۰۰	۷٫۰۸۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۲۰	۰٫۱۰۰	۰٫۵۲۰	۱٫۱۰۰	۶٫۵۲۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۱	۰٫۰۵۰	۰٫۲۵۵	۱٫۰۵۰	۶٫۲۵۵	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۱	۰٫۰۳۰	۰٫۱۵۲	۱٫۰۳۰	۶٫۱۵۲	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰
۵٫۰	۰٫۰۱۰	۰٫۰۵۰	۱٫۰۱۰	۶٫۰۵۰	۱٫۰۰۰	۶٫۰۰۰

تبدیل می‌شود.

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (۸)$$

طرف راست معادله ۸ در واقع مشتق $x(t)$ نسبت به t ، یا همان dx/dt است. پس

$$v = \frac{dx}{dt} \quad (۹)$$



شکل ۱۰. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در نقطه‌ای از سیم، $x = A$ در حالت سکون است.

۱. سکون. از معادله ۱ داریم $x(t) = A$ پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = 0 \quad (۱۰)$$

چون مشتق هر کمیت ثابتی صفر است. شکل ۱۰، $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

۲. حرکت با سرعت ثابت. از معادله ۲ داریم $x(t) = A + Bt$ پس

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt) = 0 + B \quad (۱۱)$$

سرعت لحظه‌ای (ثابت) B است؛ (شکل ۱۱).

۳. حرکت شتابدار. با استفاده از معادله ۳، $x(t) = A + Bt + Ct^2$ نتیجه می‌شود که

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(A + Bt + Ct^2) = 0 + B + 2Ct \quad (۱۲)$$

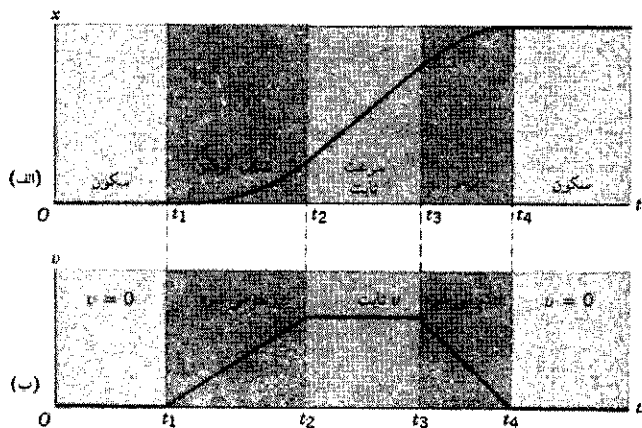
سرعت با گذشت زمان تغییر می‌کند؛ اگر $C > 0$ باشد، سرعت زیاد می‌شود. شکل ۱۲ منحنیهای $x(t)$ و $v(t)$ را نشان می‌دهد.

سرعت (لحظه‌ای) صرفاً آهنگ تغییر مکان نسبت به زمان است. جدول ۱ مثالی است از این فرایند حدگیری، و نشان می‌دهد که چگونه مقدار متوسط به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند. داده‌های جدول ۱ را با استفاده از تابع $x(t) = 3000 + 1000t + 2000t^2$ محاسبه کرده‌ایم (t برحسب s و x برحسب متر است). نقطه (t_1, x_1) را ثابت گرفته‌ایم و نقطه (t_2, x_2) را به تدریج به (t_1, x_1) نزدیک کرده‌ایم تا فرایند حدگیری را شبیه‌سازی کنیم. به نظر می‌رسد که حد سرعت متوسط در $t_1 = 1.0s$ به $v = 5.0 m/s$ میل کند؛ با مشتق‌گیری از تابع $x(t)$ عبارتی برای سرعت لحظه‌ای به دست می‌آید

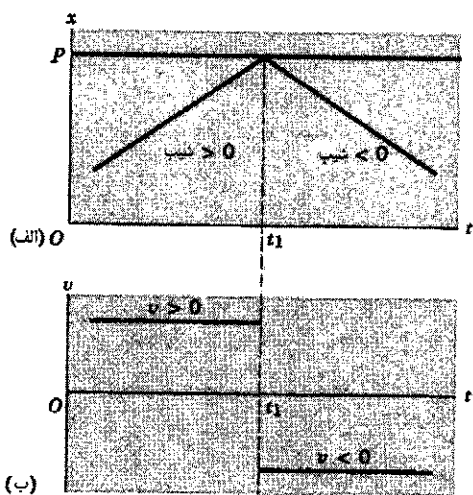
$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(3000 + 1000t + 2000t^2) = 0 + 1000 + 2(2000t) = 1000 + 4000t$$

این تابع هم به ازای $t = 1.000s$ همان مقدار $5.000 m/s$ را می‌دهد. پس معلوم است که با کوچک شدن بازه، مقدار متوسط واقعاً به مقدار لحظه‌ای میل می‌کند.

بنابراین، اگر $x(t)$ را بدانیم، می‌توانیم $v(t)$ را با مشتق‌گیری به دست بیاوریم. در روش نموداری هم می‌توان شیب (نقاط مختلف) را به دست آورد و به کمک آن $v(t)$ را رسم کرد. حالا می‌خواهیم مثالهای بخش ۲-۲ را مرور کنیم. سه مثال اول، در مورد همان مهره‌ای است که روی یک سیم راست طویل می‌لغزد.



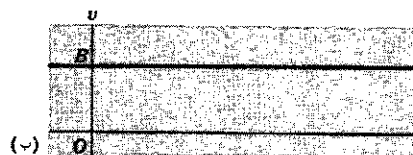
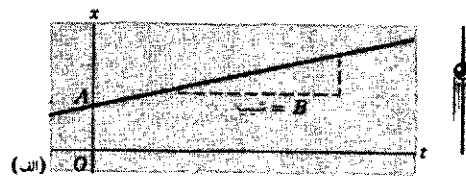
شکل ۱۳. (الف) مکان و (ب) سرعت اتومبیلی که از حالت سکون شروع می‌کند، برای مدتی سرعتش زیاد می‌شود، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و آن وقت سرعتش کم می‌شود تا دوباره به حالت سکون برسد. نمودار پایین $v(t)$ را نشان می‌دهد که دقیقاً متناظر با نمودار $x(t)$ در بالا (و نمودار شکل ۴) است. برای اتومبیل‌های واقعی، تغییر سرعت باید هموار باشد نه ناگهانی، بنابراین نقاط تیز نمودار $v(t)$ گرد می‌شود.



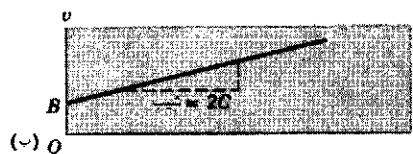
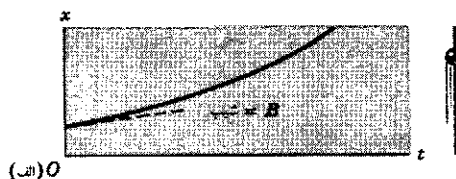
شکل ۱۴. (الف) مکان و (ب) سرعت یک "گوی" هاکی که به سطحی سخت برمی‌خورد و از آن وامی‌جهد. در این نمودار ایده‌آل، در $t = t_1$ علامت سرعت ناگهانی عوض می‌شود، اما برای گوی واقعی، تغییر سرعت در بازه‌ای کوچک (ولی غیر صفر) انجام می‌شود و نقطه تیز نمودار $x(t)$ هم گرد می‌شود.

ولی در جهت مخالف (سرعت منفی) بازمی‌گردد. شکل ۱۴، $v(t)$ را نشان می‌دهد. دقت کنید که "نقطه تیز" نمودار $x(t)$ موجب ناپیوستگی در نمودار $v(t)$ می‌شود. هیچ‌یک از این دو در واقعیت اتفاق نمی‌افتد.

۶. گلوله خمیری چسبنده. در این مورد، شکل ۱۵، v اولیه توپ مثبت است (جهت رو به بالا را مثبت اختیار کرده‌ایم)، اما به تدریج کم می‌شود. حرکت با معادله‌ای شبیه به معادله ۱۲، اما با $C < 0$ ، نقطه اوج، $v = 0$ است، پس در این نقطه،



شکل ۱۱. (الف) مکان و (ب) سرعت مهره‌ای که در یک بعد با سرعت ثابت روی سیمی می‌لغزد. سرعت برابر با شیب نمودار $x(t)$ یعنی B است. نمودار $v(t)$ همان خط افقی $v = B$ است.



شکل ۱۲. (الف) مکان و (ب) سرعت شتابدار، که در یک بعد روی سیم می‌لغزد. از شیب فزاینده $x(t)$ ، و همچنین از افزایش خطی $v(t)$ معلوم است که سرعت با گذشت زمان زیاد می‌شود.

۴. اتومبیلی که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند. منحنی $v(t)$ را می‌شود از روش شکل ۴، و بدون نوشتن $x(t)$ ، به دست آورد. در بازه اول، اتومبیل در حال سکون و $v = 0$ است. در بازه بعدی، اتومبیل شتاب می‌گیرد و $v(t)$ به شکل معادله ۱۲ است. در بازه‌ای که سرعت اتومبیل تغییر نمی‌کند، v مقدار ثابتی است (برابر با سرعت در پایان بازه‌ای که اتومبیل شتاب دارد) و بنابراین، در این بازه C صفر است. سرانجام، در مرحله ترمز گرفتن، $v(t)$ باز هم به شکل معادله ۱۲ است، اما در این مورد با $C < 0$ (شیب منفی). شکل ۱۳ نمودار این حرکت را نشان می‌دهد.

در عمل، نمی‌شود آن‌ها از حالت سکون به حالت حرکت شتابدار، یا از حالت حرکت شتابدار به حالت حرکت یکنواخت (با سرعت ثابت) رسید. یعنی در شکل ۱۳، نقاط تیز منحنی $v(t)$ را باید برای اتومبیل‌های واقعی کمی گرد کرد، و معادله حرکت هم پیچیده‌تر از معادله ۱۲ می‌شود. اینجا هم برای سادگی فرض کرده‌ایم که رفتار اتومبیل، همان رفتار ایده‌آلی است که در شکل ۱۳ می‌بینیم.

۵. گوی هاکی که به مانع برمی‌خورد و برمی‌گردد. گوی پیش از برخورد سرعت ثابتی دارد و پس از برخ

اگر تغییر سرعت در بازه‌های یکسان متوالی یکی نباشد، شتاب متغیر است. در این مورد بهتر است که شتاب لحظه‌ای تعریف کنیم:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

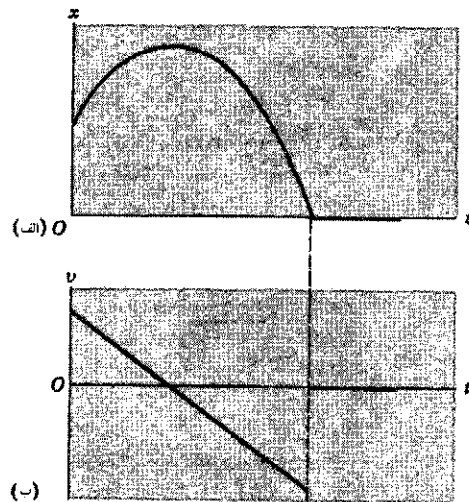
یا

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (۱۴)$$

این تعریف، مشابه معادله ۹ برای سرعت لحظه‌ای است. دقت کنید که مثبت و منفی بودن شتاب به مثبت و منفی بودن v ربطی ندارد. مثلاً ممکن است که a مثبت و v منفی باشد: شتاب a تغییر سرعت را می‌دهد؛ این تغییر، چه سرعت مثبت باشد چه منفی، می‌تواند افزایش یا کاهش باشد. مثلاً آسانسوری را در نظر بگیرید که به طرف بالا (که آن را جهت مثبت سرعت می‌گیریم). حرکت می‌کند. این آسانسور می‌تواند به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و حرکتش کند شود (اما همچنان به طرف بالا باشد). آسانسوری که به طرف پایین حرکت می‌کند هم می‌تواند به طرف پایین شتاب بگیرد ($a < 0$) و سریعتر حرکت کند، یا به طرف بالا شتاب بگیرد ($a > 0$) و حرکتش کند شود. وقتی شتاب و سرعت در جهتهای مخالف باشند، یعنی مقدار سرعت در حال کاهش باشد، می‌گوییم که ذره شتاب‌کاهنده دارد.

شتاب (معادله ۱۴) همان شیب نمودار $v(t)$ است. اگر $v(t)$ ثابت باشد، $a = 0$ است؛ اگر $v(t)$ خط راست باشد، a ثابت و برابر با شیب خط است. اگر $v(t)$ منحنی باشد، a هم تابعی از t خواهد بود که با مشتق‌گیری از $v(t)$ به دست می‌آید. اکنون می‌توانیم شتاب را هم در نمودارهای شکل ۱۰ تا شکل ۱۵ وارد کنیم. برای مثال، نمودارهای مربوط به اتومبیلی را که شتاب می‌گیرد و ترمز می‌کند در شکل ۱۶ آورده‌ایم. بقیه موارد را، به عنوان تمرین، به خواننده وامی‌گذاریم.

مثال ۲. شکل ۱۷ الف، شش "عکس لحظه‌ای" از ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. در $t = 0$ ، ذره در نقطه $x = +۱۰۰\text{m}$ در طرف راست مبدأ است؛ در $t = ۲٫۵\text{s}$ ، ذره در $x = +۵۰\text{m}$ در حال سکون است؛ در $t = ۴٫۰\text{s}$ ، به $x = ۱۰۴\text{m}$ برگشته است. شکل ۱۷ ب نمودار مکان x بر حسب زمان t است. شکل‌های ۱۷ ج و ۱۷ د هم به ترتیب سرعت و شتاب ذره را نشان می‌دهند. الف) سرعت متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. ب) شیب $x(t)$ را در نقاط B و F تخمین بزنید و با نقاط متناظر روی منحنی $v(t)$ مقایسه کنید. ج) شتاب متوسط را در بازه‌های AD و DF پیدا کنید. د) شیب $v(t)$ را در نقطه D تخمین بزنید و با مقدار $a(t)$ متناظر آن مقایسه کنید.



شکل ۱۵. الف) مکان و ب) سرعت یک گلوله خمیر که به روش شکل ۶، به بالا پرتاب می‌شود. در دنیای واقعی، سرعت نمی‌تواند به‌طور ناگهانی از یک مقدار غیر صفر به صفر برسد، "پرش" قائم در نمودار $v(t)$ (در زمانی که گلوله به زمین می‌خورد) هم باید تدریجی‌تر باشد.

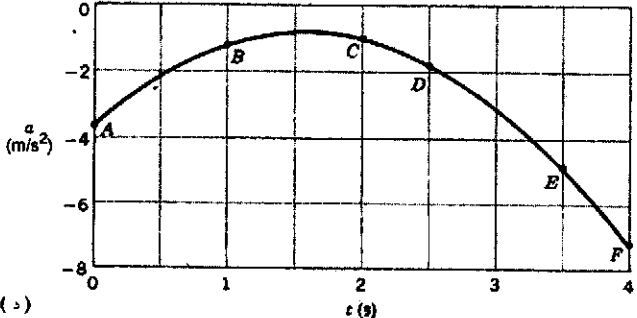
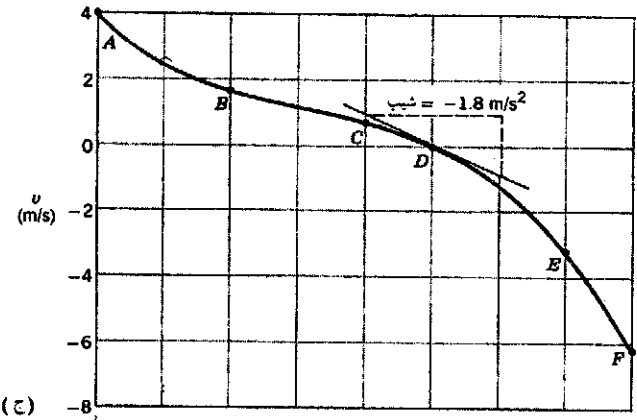
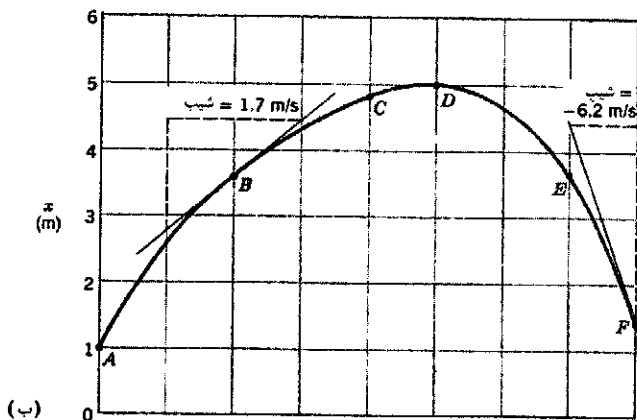
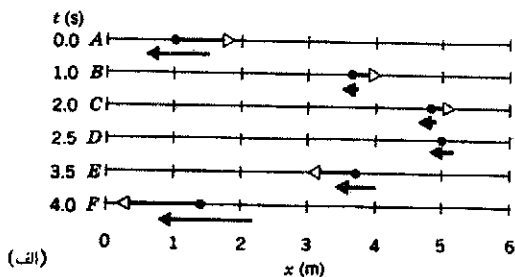
خط $v(t)$ محور را قطع می‌کند. هنگامی که خمیر به زمین می‌چسبد، v آن صفر می‌شود. (باز هم "نقطه‌ای تیز" در نمودار $x(t)$ که در $v(t)$ ناپیوستگی ایجاد می‌کند؛ در واقع امر، این نقطه گرد می‌شود و ناپیوستگی‌ای هم در کار نیست.)

۵-۲ حرکت شتابدار

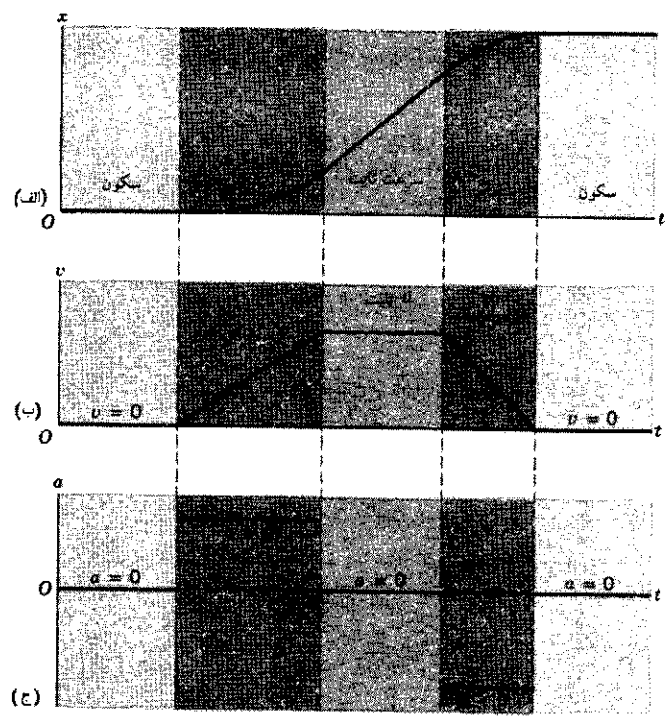
دیدیم (شکل‌های ۱۲، ۱۳، و ۱۵) که در طی حرکت، سرعت ذره می‌تواند با زمان تغییر کند، تغییر سرعت در زمان را شتاب می‌نامند. مشابه با معادله ۵ می‌توان شتاب متوسط را از روی تغییر سرعت، $v_2 - v_1 = \Delta v$ ، در بازه زمانی Δt حساب کرد:

$$\bar{a} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (۱۳)$$

یکای شتاب، سرعت بر زمان است، مثلاً متر بر ثانیه بر ثانیه، m/s^2 . از شتاب متوسط \bar{a} هم، درست مثل سرعت متوسط \bar{v} نمی‌توان تغییر $v(t)$ را در زمانهای مختلف بازه Δt به دست آورد؛ \bar{a} تنها به تفاضل سرعت در انتها و ابتدای بازه بستگی دارد. اگر \bar{a} برای همه چنین بازه‌هایی ثابت (منجمله صفر) باشد می‌توانیم نتیجه بگیریم که شتاب ثابت است. در این صورت، تغییر سرعت در همه بازه‌هایی که مدت برابر دارند یکی است. مثلاً چنانکه بعداً در همین فصل خواهیم دید، شتاب ناشی از ثقل زمین، در نزدیکی سطح آن تقریباً ثابت و برابر با $۹٫۸\text{m/s}^2$ است. سرعت اجسام افتان، هر ثانیه $۹٫۸\text{m/s}$ تغییر می‌کند؛ در ثانیه اول $۹٫۸\text{m/s}$ زیاد می‌شود، در ثانیه بعد $۹٫۸\text{m/s}$ دیگر، و به همین ترتیب.



شکل ۱۷. (الف) شش "عکس لحظه‌ای" متوالی از ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند. پیکان روی ذره سرعت لحظه‌ای، و پیکان زیر ذره شتاب لحظه‌ای آن را نشان می‌دهد. (ب) نمودار $x(t)$ برای حرکت ذره. شش نقطه A تا F متناظر با شش تصویر لحظه‌ای‌اند. (ج) نمودار $v(t)$. (د) نمودار $a(t)$.



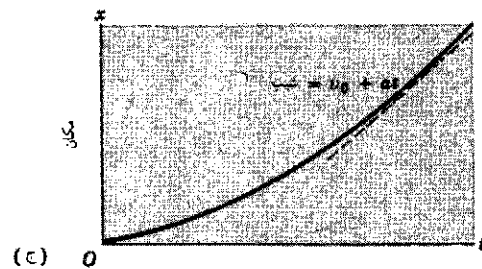
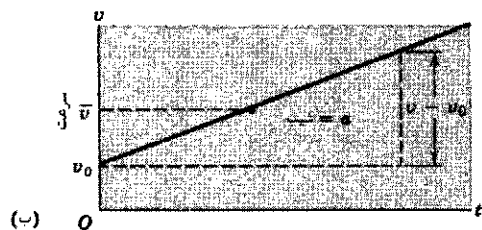
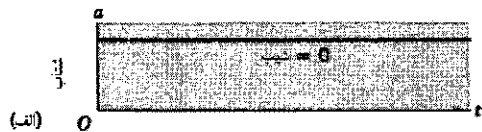
شکل ۱۶. (الف) مکان و (ب) سرعت، و (ج) شتاب اتومبیلی که از حالت سکون به راه می‌افتد، برای مدتی شتاب می‌گیرد، مدتی با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و سپس ترمز می‌کند و شتاب منفی می‌گیرد تا دوباره به حالت سکون برسد. در واقع نمی‌توان شتاب اتومبیل را به‌طور ناگهانی از مقداری به مقداری دیگر تغییر داد؛ هم $v(t)$ و هم برای اتومبیل‌های واقعی همواره پیوسته‌اند؛ منحنی‌های همواری بخشهای تخت $a(t)$ را به هم وصل می‌کنند و نقاط تیز $v(t)$ گرد می‌شوند.

حل: (الف) از معادله ۵

$$\begin{aligned} \bar{v}_{AD} &= \frac{\Delta x_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{x_D - x_A}{t_D - t_A} = \frac{5.0\text{ m} - 1.0\text{ m}}{2.5\text{ s} - 0.0\text{ s}} \\ &= \frac{4.0\text{ m}}{2.5\text{ s}} = +1.6\text{ m/s} \\ \bar{v}_{DF} &= \frac{\Delta x_{DF}}{\Delta t_{DF}} = \frac{x_F - x_D}{t_F - t_D} = \frac{1.4\text{ m} - 5.0\text{ m}}{4.0\text{ s} - 2.5\text{ s}} \\ &= \frac{-3.6\text{ m}}{1.5\text{ s}} = -2.4\text{ m/s} \end{aligned}$$

علامت مثبت \bar{v}_{AD} نشان می‌دهد که ذره در بازه AD ، به‌طور متوسط، در جهت افزایش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف راست در شکل ۱۷ الف). علامت منفی \bar{v}_{DF} نشان می‌دهد که ذره در بازه DF ، به‌طور متوسط، در جهت کاهش x حرکت می‌کند (یعنی به طرف چپ در شکل ۱۷ الف).
(ب) از مماسهای منحنی $x(t)$ در نقا

می شود این کمیتها را برآورد کرد:



شکل ۱۸. (الف) شتاب ثابت ذره، برابر با شیب (ثابت) $v(t)$. (ب) سرعت ذره $v(t)$ ، که در هر نقطه برابر با شیب منحنی $x(t)$ است. سرعت متوسط \bar{v} هم، که در حالت شتاب ثابت برابر با میانگین v و v_0 است، در شکل مشخص شده است. (ج) مکان $x(t)$ ذره‌ای که با شتاب ثابت حرکت می‌کند. مکان اولیه ذره $x_0 = 0$ فرض شده است.

فرض کنید که شتاب ثابت حرکت، a باشد (شکل ۱۸ الف). وقتی a ثابت است، شتاب متوسط و شتاب لحظه‌ای با هم برابرند، و فرمولهایی را که برای این دو به دست آوردیم می‌شود در هر دو مورد به کار برد. جسمی در زمان $t = 0$ ، با سرعت v_0 حرکت می‌کند و در زمان بعدی t سرعت آن به v می‌رسد. معادله ۱۳، برای این بازه، به شکل زیر در می‌آید:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v - v_0}{t - 0}$$

یا

$$v = v_0 + at \quad (15)$$

به کمک این نتیجه مهم، می‌توان سرعت را در همه زمانهای بعدی به دست آورد. معادله ۱۵، سرعت را به صورت تابعی از زمان به دست می‌دهد. این تابع را می‌شود با $v(t)$ نشان داد، اما ما معمولاً آن را با همان v نشان می‌دهیم. دقت کنید که معادله ۱۵ به شکل $y = mx + b$ است، که یک خط راست را توصیف می‌کند. a ، چنانکه قبلاً هم توضیح داده‌ایم، شیب است و v_0 محل تقاطع خط با محور سرعت (مقدار v در $t = 0$) است. شکل ۱۸ ب این خط راست را نشان می‌دهد. برای کامل کردن تحلیل سینماتیک شتاب ثابت، باید بستگی مکان به زمان را به دست بیاوریم. برای این منظور، به رابطه‌ای برای سرعت

$$\text{نقطه } B: \text{ شیب} = \frac{4.5 \text{ m} - 2.8 \text{ m}}{1.5 \text{ s} - 0.5 \text{ s}} = \frac{1.7 \text{ m}}{1.0 \text{ s}} = +1.7 \text{ m/s}$$

$$\text{نقطه } F: \text{ شیب} = \frac{1.4 \text{ m} - 4.5 \text{ m}}{3.0 \text{ s} - 2.5 \text{ s}} = \frac{-3.1 \text{ m}}{0.5 \text{ s}} = -6.2 \text{ m/s}$$

از منحنی $v(t)$ در نقاط B و F در شکل ۱۷ ج هم $v_B = +1.7 \text{ m/s}$ و $v_F = -6.2 \text{ m/s}$ برآورد می‌شود، که با شیب $x(t)$ سازگار است. همان طور که انتظار می‌رود، $v(t) = dx/dt$ است. (ج) از معادله ۱۳،

$$\begin{aligned} \bar{a}_{AD} &= \frac{\Delta v_{AD}}{\Delta t_{AD}} = \frac{v_D - v_A}{t_D - t_A} = \frac{0.9 \text{ m/s} - 4.9 \text{ m/s}}{2.5 \text{ s} - 0.5 \text{ s}} \\ &= \frac{-4.0 \text{ m/s}}{2.0 \text{ s}} = -2.0 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{AF} &= \frac{\Delta v_{AF}}{\Delta t_{AF}} = \frac{v_F - v_A}{t_F - t_A} = \frac{-6.2 \text{ m/s} - 4.9 \text{ m/s}}{3.0 \text{ s} - 0.5 \text{ s}} \\ &= \frac{-11.1 \text{ m/s}}{2.5 \text{ s}} = -4.4 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

(د) از خط مماس بر $v(t)$ در نقطه D این کمیت را تخمین

می‌زنیم.

$$\begin{aligned} \text{شیب} &= \frac{-0.9 \text{ m/s} - 0.9 \text{ m/s}}{3.0 \text{ s} - 2.0 \text{ s}} = \frac{-1.8 \text{ m/s}}{1.0 \text{ s}} \\ &= -1.8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

در نقطه D نمودار $a(t)$ دیده می‌شود که $a_D = -1.8 \text{ m/s}^2$. بنابراین، $a = dv/dt$ از نمودار $v(t)$ شکل ۱۷ ج، معلوم می‌شود که شیب $v(t)$ همواره منفی است. پس $a(t)$ هم باید منفی باشد. شکل ۱۷ د، هم همین را نشان می‌دهد.

۲-۶ حرکت با شتاب ثابت

موارد حرکت با شتاب ثابت (یا تقریباً ثابت) کم نیست: دو نمونه‌ای که تا به حال دیده‌ایم، یکی سقوط اجسام در نزدیکی سطح زمین و دیگری حرکت اتومبیلی است که ترمز کرده است. در این بخش، چند نتیجه مفید برای این حالت خاص به دست می‌آوریم. اما به خاطر داشته باشید که این حالت، خاص است. نتایج این بخش را نمی‌شود در مواردی که a ثابت نیست به کار برد. از نمونه‌های حرکت با شتاب متغیر، می‌توان از حرکت وزنه آونگ، حرکت موشکی که به طرف مدارش به دور زمین پرتاب می‌شود، و حرکت قطره بارانی که در هوا (در معرض مقاومت هوا) سقوط می‌کند نام برد.

جدول ۲. معادلات حرکت با شتاب ثابت^۱.

شامل					معادله	شماره معادله
t	a	v	v_0	x		
✓	✓	✓	✓	×	$v = v_0 + at$	۱۵
✓	✓	×	✓	✓	$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	۱۹
×	✓	✓	✓	✓	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	۲۰
✓	×	✓	✓	✓	$x = x_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	۲۱
✓	✓	✓	×	✓	$x = x_0 + vt - \frac{1}{2} at^2$	۲۲

۱. پیش از استفاده از معادلات این جدول باید مطمئن شوید که شتاب واقعاً ثابت است.

مطرح می‌شود: مثلاً با معلوم بودن a ذره چه مسافتی (و نه چه مدتی) باید حرکت کند تا سرعت آن از v_0 به v برسد؟ در این موارد زمان ظاهر نمی‌شود. بنابراین می‌توانیم متغیر ناخواسته t را بین معادلات ۱۵ و ۱۹ حذف کنیم:

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0) \quad (20)$$

از حذف کردن متغیرها یا پارامترهای دیگر، معادلات ۲۱ و ۲۲ حاصل می‌شوند. با این معادلات، که در جدول ۲ آمده‌اند، مجموعه معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت کامل می‌شود.

با مشتق‌گیری از معادله ۱۹، می‌توان دید که این معادله یک نتیجه درست سینماتیکی است (مشتق این معادله، باید سرعت باشد):

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2) = v_0 + at = v$$

و این همان عبارتی است که قبلاً برای سرعت به دست آوردیم. در استفاده از معادلات جدول ۲ برای حل مسائل، مبدأ دستگاه مختصات را می‌توانید هر نقطه‌ای که راحت‌تر است بگیرید. چهار تا از معادلات جدول ۲ به x بستگی دارند و در هر چهار معادله x_0 هم ظاهر شده است. در واقع، هر چهار معادله به تفاضل $x - x_0$ بستگی دارند. معمولاً مبدأ را چنان می‌گیریم که $x_0 = 0$ شود. به این ترتیب، معادلات تا حدی ساده‌تر می‌شوند. هر یک از جهت‌های محور مختصات را می‌شود جهت مثبت گرفت. با انتخاب جهت مثبت، هر جابه‌جایی، سرعت، و شتابی اگر در آن جهت باشد مثبت، و اگر در خلاف آن جهت باشد منفی است. در همه مراحل حل یک مسئله خاص، باید مبدأ و جهت محورهای مختصات ثابت بماند.

مثال ۳. راننده‌ای ترمز می‌کند و سرعت اتومبیلش را، در طی مسافت 105m ، از 85km/h به 45km/h می‌رساند. (الف) شتاب اتومبیل، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (ب) این حرکت شتابدار چقدر طول کشیده است؟ (ج) اگر راننده بخواهد اتومبیل را با همین شتاب متوقف کند، چه مدت زمان بیشتری برای این کار لازم است و در این مدت، آه‌مسا. چه مسافت اضافی‌ای را می‌پیماید؟

متوسط در بازه زمانی t تا t نیاز داریم. اگر نمودار v بر حسب زمان خط راست باشد (شکل ۱۸ ب)، مقدار متوسط v به‌ازای زمان وسط این بازه به دست می‌آید و برابر با میانگین سرعت در زمان t است:

$$\bar{v} = \frac{1}{2}(v + v_0) \quad (16)$$

با استفاده از معادله ۱۵ می‌شود v را حذف کرد:

$$\bar{v} = v_0 + \frac{1}{2} at \quad (17)$$

با استفاده از معادله ۵ (تعریف سرعت متوسط)، و با فرض اینکه ذره در زمان t در نقطه x_0 و در زمان t در نقطه x است، سرعت متوسط را می‌توان چنین نوشت

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x - x_0}{t - 0} \quad (18)$$

از ترکیب معادلات ۱۷ و ۱۸، این نتیجه برای $x(t)$ به دست می‌آید:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \quad (19)$$

پس اگر a ، و شرایط اولیه x_0 و v_0 (مکان و سرعت در $t = 0$) معلوم باشد، با استفاده از معادله ۱۹ می‌توانیم مکان x را در هر زمان بعدی به دست بیاوریم. هدف تحلیل سینماتیکی ما هم همین است. مسافت خالص پیموده شده از نقطه شروع، $x - x_0$ ، را جابه‌جایی می‌نامند. اغلب، برای سادگی، مبدأ مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که $x_0 = 0$ باشد. شکل ۱۸ نمودار x بر حسب t را برای شتاب ثابت نشان می‌دهد.

دقت کنید که چهار متغیر (x, v, a, t) و دو شرط اولیه (x_0, v_0) داریم. معادلات ۱۵ و ۱۹ به همین شکل برای تحلیل سینماتیک مسئله، به عنوان مسئله مقدار اولیه، به کار می‌روند: با داشتن شرایط فیزیکی (یعنی شتاب a) و شرایط اولیه (x_0, v_0) ، می‌توان v و x را در هر زمانی به دست آورد. اما در خیلی از موارد، مسئله به صورت متفاوتی ...

مثال ۴. یک ذره آلفا (هسته اتم هلیوم) در لوله‌ای راست و توخالی به طول 2 m حرکت می‌کند. این لوله بخشی از یک شتابدهنده ذرات است. (الف) اگر ذره با سرعت $10^6 \text{ m/s} \times 10^0$ به لوله وارد و با سرعت $10^6 \text{ m/s} \times 5 \times 10^0$ از آن خارج شود، شتاب ذره (که ثابت فرض می‌شود) چقدر است؟ (ب) ذره چه مدت در لوله است؟

حل: (الف) محور x را موازی با لوله، جهت مثبت را جهت حرکت ذره، و مبدأ را ورودی لوله می‌گیریم. v_0 ، v ، و x معلوم‌اند و a مجهول است. معادله ۲۰ را، با $x_0 = 0$ ، به‌کار می‌بریم:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2x} = \frac{(5 \times 10^6 \text{ m/s})^2 - (1 \times 10^6 \text{ m/s})^2}{2(2 \text{ m})} = +6.3 \times 10^{12} \text{ m/s}^2$$

(ب) از معادله ۲۱، با $x_0 = 0$ ، t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{2x}{v_0 + v} = \frac{2(2 \text{ m})}{1 \times 10^6 \text{ m/s} + 5 \times 10^6 \text{ m/s}} = 8 \times 10^{-7} \text{ s} = 0.8 \mu\text{s}$$

حل: (الف) جهت مثبت را همان جهت سرعت می‌گیریم. مبدأ را نیز چنان می‌گیریم که نقطه آغاز ترمز کردن، $x_0 = 0$ باشد. سرعت اولیه، $v_0 = +85 \text{ km/h}$ در $t = 0$ ، و سرعت نهایی، $v = +45 \text{ km/h}$ در زمان (مجهول) t ، یعنی وقتی که اتومبیل 105 km جابه‌جا شده، معلوم است. به معادله‌ای نیاز داریم که شامل شتاب (مجهول) باشد، اما شامل زمان نباشد. معادله ۲۰ چنین معادله‌ای است، که a را از آن به‌دست می‌آوریم:

$$a = \frac{v^2 - v_0^2}{2(x - x_0)} = \frac{(45 \text{ km/h})^2 - (85 \text{ km/h})^2}{2(105 \text{ km})} = -2.48 \times 10^2 \text{ km/h}^2 = -1.91 \text{ m/s}^2$$

این شتاب کاهنده است و علامتش منفی است، یعنی در خلاف جهتی است که آن را مثبت اختیار کرده‌ایم.

(ب) معادله‌ای می‌خواهیم که شتاب در آن نباشد تا بتوانیم زمان را از داده‌های اولیه به‌دست بیاوریم. از جدول ۲ مشاهده می‌کنیم که معادله ۲۱ این ویژگی را دارد. از این معادله t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{2(x - x_0)}{v_0 + v} = \frac{2(105 \text{ km})}{85 \text{ km/h} + 45 \text{ km/h}} = 1.62 \times 10^{-2} \text{ h} = 5.8 \text{ s}$$

در حل این قسمت، می‌توانستیم معادله‌ای به‌کار ببریم که شامل شتاب هم باشد اما در آن صورت خطایی که ممکن است در حل قسمت (الف) به‌وجود آمده باشد، در قسمت (ب) هم وارد می‌شد. توجه کنید که در حل قسمتهای مستقل یک مسئله، در صورت امکان، همیشه بهتر است که به داده‌های اولیه برگردیم و مسئله را مستقیماً با آنها حل کنیم.

(ج) حالا که شتاب معلوم است، زمانی را حساب می‌کنیم که در آن سرعت اتومبیل از $v_0 = 85 \text{ km/h}$ به $v = 0$ می‌رسد. برای این کار معادله ۱۵ مناسب است، که از آن t را به‌دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v - v_0}{a} = \frac{0 - 85 \text{ km/h}}{-2.48 \times 10^2 \text{ km/h}^2} = 3.43 \times 10^{-2} \text{ h} = 12.3 \text{ s}$$

اتومبیل 12.3 s پس از ترمز، یا 6.5 s (یعنی $12.3 \text{ s} - 5.8 \text{ s}$) پس از رسیدن به سرعت 45 km/h ، متوقف می‌شود.

برای پیدا کردن مسافت، معادله ۲۰ را به‌کار می‌بریم:

$$x - x_0 = \frac{v^2 - v_0^2}{2a} = \frac{0 - (85 \text{ km/h})^2}{2(-2.48 \times 10^2 \text{ km/h}^2)} = 146 \text{ m} = 0.146 \text{ km}$$

مسافت اضافی‌ای که اتومبیل می‌پیماید تا سرعتش از 45 km/h به $v = 0$ برسد برابر با $105 \text{ m} - 146 \text{ m}$ یعنی 41 m است.

۷-۲ سقوط آزاد اجسام

یکی از آشناترین نمونه‌های حرکت با شتاب (تقریباً) ثابت، حرکت جسمی است که به طرف زمین سقوط می‌کند. اجسامی را در نظر بگیرید که در خلأ سقوط می‌کنند، یعنی مقاومت هوا بر حرکت آنها مؤثر نیست. از بررسی حرکت این اجسام، به واقعیت جالبی می‌رسیم: همه اجسام، مستقل از اندازه، شکل، یا ترکیب‌شان، در نزدیکی سطح زمین با شتاب یکسانی سقوط می‌کنند. این شتاب، که آن را با g نشان می‌دهیم، شتاب سقوط آزاد (یا گاهی شتاب ناشی از گرانی) نامیده می‌شود. البته این شتاب به فاصله جسم افتان از مرکز زمین بستگی دارد (فصل ۱۶)، اما اگر مسافت سقوط در مقایسه با شعاع زمین (6400 km) کوچک باشد، شتاب را می‌توان در مدت سقوط ثابت گرفت.

در نزدیکی سطح زمین، اندازه g تقریباً 9.8 m/s^2 است. ما هم همه جای این کتاب همین مقدار را به‌کار می‌بریم، مگر آنکه صریحاً مقدار دقیق‌تری را ذکر کنیم. جهت شتاب سقوط آزاد در هر نقطه، جهت "پایین" را در آن نقطه مشخص می‌کند.

معمولاً از اجسام افتان صحبت می‌کنیم، اما به اجسامی که به طرف بالا حرکت می‌کنند هم همان شتاب سقوط آزاد (با همان اندازه و جهت) وارد می‌شود. یعنی سرعت ذره چه به طرف بالا باشد چه به طرف پایین، جهت شتاب آن، تحت تأثیر گرانش زمین، همیشه به طرف پایین است.

t	y	v	a
s	m	m/s	m/s ²
0	0	0	-9.8
1.0	-4.9	-9.8	-9.8
2.0	-19.6	-19.6	-9.8
3.0	-44.1	-29.4	-9.8
4.0	-78.4	-39.2	-9.8

شکل ۱۹. مثال ۵. ارتفاع، سرعت، و شتاب جسمی که در حال سقوط آزاد است.

می‌کند. به همین ترتیب می‌توانیم مکان و سرعت را در $t = ۳.۰\text{s}$ و $t = ۴.۰\text{s}$ به دست بیاوریم (شکل ۱۹).

مثال ۶. تویی را از زمین با سرعت ۲۵.۲m/s در راستای عمودی به بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد؟ (ب) توپ تا کجا بالا می‌رود؟ (ج) در چه زمانهایی توپ در ارتفاع ۲۷.۰m از سطح زمین واقع می‌شود؟
حل: (الف) سرعت توپ، در نقطه اوج، صفر می‌شود. با داشتن v_0 و $v = 0$ ، می‌خواهیم t را حساب کنیم. t از معادله ۲۳ به دست می‌آید:

$$t = \frac{v_0 - v}{g} = \frac{۲۵.۲\text{m/s} - 0}{۹.۸\text{m/s}^2} = ۲.۵۷\text{s}$$

(ب) از داده‌های اولیه استفاده می‌کنیم تا خطای احتمالی قسمت (الف) وارد این قسمت نشود. از معادله ۲۵، با $y_0 = 0$ ، می‌شود y را به دست آورد:

$$y = \frac{v^2 - v_0^2}{2g} = \frac{(۲۵.۲\text{m/s})^2 - 0}{2(۹.۸\text{m/s}^2)} = ۳۲.۴\text{m}$$

(ج) در این حالت معادله ۲۴ به کار می‌آید، زیرا t تنها مجهول آن است. چون می‌خواهیم t را به دست بیاوریم. معادله ۲۴ را، با

مقدار دقیق شتاب سقوط آزاد در هر نقطه تابع جغرافیایی و ارتفاع آن نقطه از سطح زمین است. همچنین، یکسان نبودن چگالی نقاط مختلف پوسته زمین هم باعث تفاوتی در شتاب سقوط آزاد در نقاط مختلف می‌شود که به هر حال قابل ملاحظه است. این اثرها را در فصل ۱۶ بررسی خواهیم کرد.

معادلات جدول ۲ (برای شتاب ثابت) را می‌شود در مورد سقوط آزاد هم به کار برد. تنها چند تغییر کوچک اعمال می‌کنیم: (۱) راستای سقوط آزاد را با y مشخص می‌کنیم و جهت مثبت آن را رو به بالا می‌گیریم. بعداً، در فصل ۴، که حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم، مختصه x را برای حرکت افقی به کار خواهیم برد. (۲) به جای شتاب ثابت a در جدول ۲، $-g$ می‌گذاریم، چون جهت مثبت y را رو به بالا گرفته‌ایم و شتاب در خلاف این جهت (منفی) است. توجه کنید که شتاب (رو به پایین) را $-g$ گرفته‌ایم، پس g عددی مثبت است. با این تغییرات کوچک، معادلات جدول ۲ به این شکل در می‌آیند:

$$v = v_0 - gt \quad (۲۱)$$

$$y = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (۲۲)$$

$$v^2 = v_0^2 - 2g(y - y_0) \quad (۲۳)$$

$$y = y_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t \quad (۲۴)$$

و

$$y = y_0 + vt + \frac{1}{2}gt^2 \quad (۲۵)$$

مثال ۵. جسمی از حالت سکون شروع به سقوط آزاد می‌کند. مکان و سرعت جسم را پس از گذشت ۱.۰s ، ۲.۰s ، ۳.۰s ، و ۴.۰s پیدا کنید.

حل: نقطه شروع را مبدأ می‌گیریم. سرعت اولیه (صفر) و شتاب را می‌دانیم، و زمان هم معلوم است. برای یافتن مکان، معادله ۲۴ را با $y_0 = 0$ و $v_0 = 0$ به کار می‌بریم:

$$y = -\frac{1}{2}gt^2$$

$t = ۱.۰\text{s}$ را در معادله بالا قرار می‌دهیم

$$y = -\frac{1}{2}(۹.۸\text{m/s}^2)(۱.۰\text{s})^2 = -۴.۹\text{m}$$

برای یافتن سرعت، معادله ۲۳ را، باز هم با $v_0 = 0$ ، به کار می‌بریم:

$$v = -gt = -(۹.۸\text{m/s}^2)(۱.۰\text{s}) = -۹.۸\text{m/s}$$

۱.۰s پس از شروع سقوط، جسم ۴.۹m زیر (منفی است) نقطه شروع است و با سرعت ۹.۸m/s به طرف پایین (v منفی است) حرکت

$y_0 = 0$ ، به شکل معمول معادله درجه دوم می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}gt^2 - v_0 t + y = 0$$

$$\frac{1}{2}(9.8 \text{ m/s}^2)t^2 - (25.2 \text{ m/s})t + 27.0 \text{ m} = 0$$

از حل این معادله جوابهای $t = 1.52 \text{ s}$ و $t = 3.62 \text{ s}$ به دست می‌آید. در $t = 1.52 \text{ s}$ ، سرعت توپ برابر است با

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.52 \text{ s}) = 10.3 \text{ m/s}$$

و در $t = 3.62 \text{ s}$

$$v = v_0 - gt = 25.2 \text{ m/s} - (9.8 \text{ m/s}^2)(3.62 \text{ s}) = -10.3 \text{ m/s}$$

این دو سرعت مقادیر مساوی ولی جهتهای مخالف دارند. باید بتوانید نشان بدهید که اگر مقاومت هوا نباشد، زمانی که طول می‌کشد تا توپ تا نقطه اوج صعود کند، برابر با زمانی است که طول می‌کشد تا توپ همین مسافت را سقوط کند، و اندازه سرعت توپ در هر نقطه، هنگام بالا رفتن و هنگام پایین آمدن، یکی است. دقت کنید که جواب قسمت (الف) برای لحظه رسیدن توپ به نقطه اوج (2.57 s) درست در وسط دو زمانی است که در قسمت (ج) به دست آمد، آیا می‌توانید بگویید چرا؟ آیا می‌توانید به‌طور کیفی اثر مقاومت هوا را بر زمانهای صعود و سقوط پیش‌بینی کنید؟

مثال ۷. موشکی از عمق 125 m در آب، از حالت سکون در راستای قائم به‌طرف بالا پرتاب می‌شود. مقدار شتاب این موشک، که آن را ثابت فرض می‌کنیم، مجهول است (این شتاب از برابند اثر موتورهای موشک، گرانژ زمین، نیروی ارشمیدس، و مقاومت آب حاصل می‌شود). موشک در مدت 2.15 s به سطح آب می‌رسد، و در لحظه خروج از آب، موتورهای آن به‌طور خودکار خاموش می‌شوند (تا ردیابی آن آسان نباشد) و به‌صعود خود ادامه می‌دهد. این موشک تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (اثرهای مربوط به سطح آب را ندیده بگیرید).

حل: در اینجا هم، مثل مسئله سقوط آزاد، برای بررسی حرکت موشک در هوا باید سرعت اولیه آن را در این بخش از حرکتش بدانیم. بنابراین، طرح مسئله به این شکل است که بخش زیر آب را بررسی کنیم، سرعت موشک را در سطح آب به‌دست بیاوریم، و این سرعت را به عنوان سرعت اولیه بخش سقوط آزاد به‌کار ببریم. این دو بخش را باید جداگانه حل کرد، زیرا شتاب موشک در سطح آب تغییر می‌کند. در زیر آب، تغییر مکان، زمان، و سرعت اولیه (صفر) معلوم‌اند. به شتاب نیاز نداریم، می‌خواهیم سرعت نهایی را به‌دست بیاوریم؛ معادله ۲۱ جدول ۲، همان رابطه مناسب است:

$$v = \frac{2(y - y_0)}{t} = \frac{2(125 \text{ m})}{2.15 \text{ s}} = 116 \text{ m/s}$$

سرعت در سطح آب، 116 m/s به‌طرف بالاست. حالا بخش سقوط آزاد حرکت رو به بالا را بررسی می‌کنیم. در اینجا سرعتی که در بالا به‌دست آمد، سرعت اولیه است. معادله ۲۵ برای سقوط آزاد را به‌کار می‌بریم. طبق معمول، نقطه اوج نقطه‌ای است که سرعت ذره صفر می‌شود:

$$y - y_0 = \frac{v_0^2 - v^2}{2g} = \frac{(116 \text{ m/s})^2 - 0}{2(9.8 \text{ m/s}^2)} = 687 \text{ m}$$

برای اینکه مطمئن شوید که مسئله را فهمیده‌اید، نمودارهای $y(t)$ ، $v(t)$ ، و $a(t)$ را (مثل شکل ۱۶) رسم کنید. در این مسئله مهم توجه کنید که کدام متغیرها پیوسته‌اند و کدام ناپیوسته. رفتار یک موشک واقعی چه تفاوتی با این مسئله ایده‌آل دارد؟

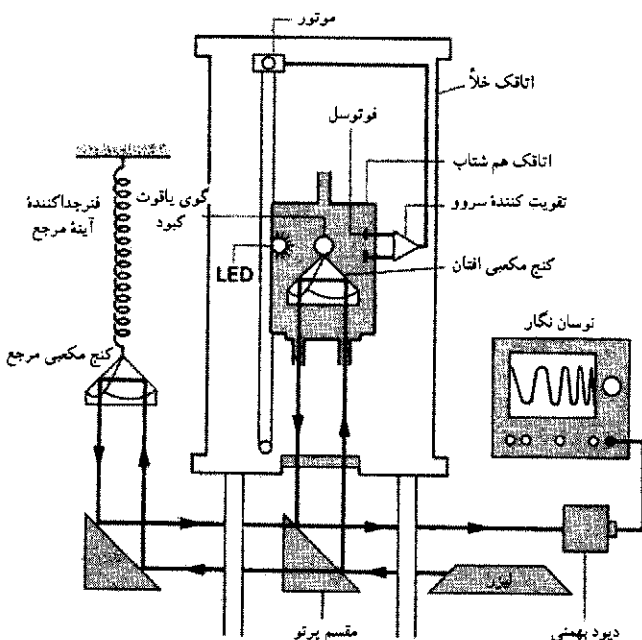
۸-۲ گاليله و سقوط آزاد (اختیاری)

ماهیت حرکت اجسام افتان از مدت‌ها پیش جزء مسائل مورد علاقه در فلسفه طبیعی بوده است. ارسطو مدعی بود که "حرکت رو به پایین ... هر جسمی که وزنی دارد، متناسب با اندازه‌اش، تندتر است." یعنی اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند. قرن‌ها طول کشید تا گالیله گالیلهی [گاليله] (۱۵۶۴ تا ۱۶۴۲) حکم درست را صادر کرد: "اگر اثر مقاومت هوا حذف شود، همه اجسام با سرعت یکسان سقوط می‌کنند." گاليله، در سالهای بعدی زندگی‌اش، رساله‌ای به نام گفتگوهایی درباره دو علم جدید نوشت و در آن به تفصیل مطالعات خودش درباره حرکت را بیان کرد.

این باور ارسطو که اجسام سنگین‌تر، سریعتر سقوط می‌کنند، دیدگاهی است که عموم آن را درست می‌پندارند. ظاهراً نمایش کلاسی مشهوری هم آن را تأیید می‌کند: اگر یک توپ و یک صفحه کاغذ را با هم رها کنید، توپ خیلی زودتر به زمین می‌رسد. اما اگر اول کاغذ را مجاله کنید و نمایش را تکرار کنید، توپ و کاغذ تقریباً همزمان به زمین می‌رسند. در حالت اول، اثر مقاومت هواست که باعث می‌شود کاغذ کندتر از توپ حرکت کند. در حالت دوم، اثر مقاومت هوا بر کاغذ کاهش یافته و تقریباً با اثر مقاومت هوا بر توپ برابر شده است. بنابراین، دو جسم تقریباً با یک سرعت سقوط می‌کنند. البته می‌توان این را مستقیماً با بررسی سقوط اجسام در خلأ آزمایش کرد. حتی در خلأهای جزئی هم، که به سادگی قابل دسترسی‌اند، دیده می‌شود که یک پر و یک توپ سربی که هزاران بار از پر سنگین‌تر است، با سرعت‌هایی سقوط می‌کنند که عملاً نمی‌توان اختلافی بین آنها مشاهده کرد. در سال ۱۹۷۱، یک فضاورد آمریکایی (دیوید اسکات)، یک پر و یک چکش را در ارتفاعی در کره ماه (که هوا ندارد) رها کرد و دید که هر دو — در حد خطای مشاهده‌ا — همزمان به سطح ماه رسیدند. اما در زمان گاليله روش مؤثری برای تولید خلأ جزئی در کار نبود

بود. دقت این روش نهایتاً به حدود ۱ در 10^6 رسید. این دقت برای تشخیص اختلاف مقادیر g در دو طبقه یک ساختمان کافی است. دقت روش آونگ به همین حد محدود می‌شود زیرا خطا در تعیین رفتار واقعی نقطه لولایی آونگ نمی‌گذارد که دقت سنجش طول آونگ را از حد معینی بیشتر کنیم. اخیراً برای دقیق‌تر کردن اندازه‌گیری g ، آزمایشگران دوباره به روش سقوط آزاد روی آورده‌اند. دقت این روش، با استفاده از تداخل‌سنجی لیزری، تقریباً به ۱ در 10^9 رسیده است. با این دقت می‌شود تغییرات میدان گرانشی زمین را در مسافت قائمی به طول ۸cm سنجید؛ چنین گرانشی سنجی می‌تواند تغییر میدان گرانشی ناشی از خود آزمایشگری را که ۸m آن طرفتر از دستگاه ایستاده است حس کند! رسیدن به چنین دقتی، موفقیت بزرگی برای روشهای دقیق آزمایشگاهی است. مثلاً شاید تصور کنید که برای حذف اثر مقاومت هوا بر سقوط آزاد، جسم را باید در خلأ رها کرد. این البته حرف درستی است، اما بهترین خلأهای آزمایشگاهی فعلی هم نمی‌توانند شرایطی را که برای دقت 10^{-9} در سنجش g لازم است فراهم کنند. برای کاهش اثر مقادیر ناچیز گاز باقی‌مانده که حتی در خلأهای شدید هم حضور دارد، جسمی را که قرار است سقوط آزاد کند در یک جعبه خلأ می‌گذاریم و جعبه را هم با جسم رها می‌کنند. گاز باقی‌مانده چون همراه جسم سقوط می‌کند، مقاومتی در برابر حرکت جسم نشان نمی‌دهد.

شکل ۲۰ طرحی از یک دستگاه سقوط آزاد را نشان می‌دهد که



شکل ۲۰. نمودار دستگاه سنجش سقوط آزاد. نوسان‌نگار الگوی تداخلیهای ویرانگر و سازنده را نشان می‌دهد. این تداخل ناشی از پرتو لیزری است که از کنج افغان بازتابیده می‌شود و با پرتو حاصل از کنج مرجع ترکیب می‌شود. اتافک هم شتاب را موتوری به طرف پایین حرکت می‌دهد، چنان که همراه با کنج سقوط کند.

و همچنین، وسیله‌ای با دقت کافی برای تعیین زمان سقوط اجسام وجود نداشت تا بتوان اطلاعات عددی قابل اطمینانی به‌دست آورد. (داستان مشهوری که می‌گوید گالیله دو جسم را از بالای برج پیزا، رها کرد و مشاهده کرد که هر دو همزمان به زمین می‌رسند، به احتمال بسیار زیاد فقط افسانه است. با توجه به ارتفاع برج و اجسامی که گفته می‌شود گالیله به‌کار برده است، در صورت وقوع این آزمایش، به علت وجود مقاومت هوا، جسم سنگین‌تر و بزرگ‌تر می‌بایست چند متر جلوتر از جسم سبک‌تر به زمین رسیده باشد. در این صورت، گالیله ظاهراً ادعای ارسطو را تأیید کرده بوده است!) با این همه گالیله ادعای خود را با غلتاندن توپی روی سطح شیبدار ثابت کرد. ابتدا نشان داد که سینماتیک توپی که روی سطح شیبدار به پایین می‌غلتد شبیه سینماتیک توپی است که آزادانه سقوط می‌کند. سطح شیبدار فقط موجب می‌شود که اثر شتاب ناشی از گرانش زمین کم شود؛ به این ترتیب، حرکت کند می‌شود و سنجش آن ساده‌تر می‌شود. بعلاوه، در سرعت‌های کم، اهمیت مقاومت هوا هم کمتر می‌شود.

گالیله از آزمایشهایش دریافت که مسافتهایی که در بازه‌های زمانی یکسان متوالی طی می‌شوند، متناسب با اعداد فرد ۱، ۳، ۵، ۷، ... و غیره‌اند. کل مسافتی که از زمان شروع حرکت تا انتهای هر یک از این بازه‌ها طی می‌شود متناسب است با ۱، $(= 4) 1+3$ ، $(= 9) 1+3+5$ ، $(= 16) 1+3+5+7$ ، و ... یعنی برابر است با مجذور اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، والی آخر. اما اگر مسافت طی شده متناسب با مجذور زمان باشد، تغییر سرعت مستقیماً متناسب با زمان است؛ نتیجه‌ای که خاص حرکت با شتاب ثابت است. سرانجام، گالیله دریافت که نتایج حاصل از حرکت بستگی به جرم توپ ندارند. به این ترتیب، به اصطلاح خودمان، شتاب سقوط آزاد مستقل از جرم جسم افتان است.

۲-۹ اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد (اختیاری)

اندازه‌گیری g یکی از آزمایشهای استاندارد در آزمایشگاه فیزیک پایه است. به این منظور مثلاً می‌توان زمانی را که طول می‌کشد تا ذره‌ای از حالت سکون مسافت معینی را سقوط کند اندازه گرفت و سپس، با استفاده از معادله ۲۴، g را تعیین کرد. در این مورد به دستگاههای نه چندان دقیق آزمایشگاهی معمولی هم می‌شود به دقت حدود ۱٪ رسید. روشی بهتر وجود دارد و آن استفاده از آونگ است. نیروی محرک آونگ از جاذبه زمین بر وزنه آن تأمین می‌شود. در فصل ۱۵ خواهیم دید که مقدار g را می‌توان با اندازه‌گیری دوره تناوب نوسان آونگی به طول معین، به‌دست آورد. با اندازه‌گیری زمان لازم چندین نوسان، مقدار دقیقی برای دوره تناوب به‌دست می‌آید. در این مورد با استفاده از دستگاههای معمولی آزمایشگاهها می‌توان به سادگی به دقتی در حدود ۱٪ رسید. چنین دقتی برای مشاهده اختلاف مقادیر g در سطح دریا و در قله یک کوه (مثلاً به ارتفاع ۳km یا 10000 ft)، یا برای مشاهده اختلاف مقادیر g در استوا و در قطب، کافی است. به مدت چند قرن، دقیقترین روش سنجش g همان روش آونگ

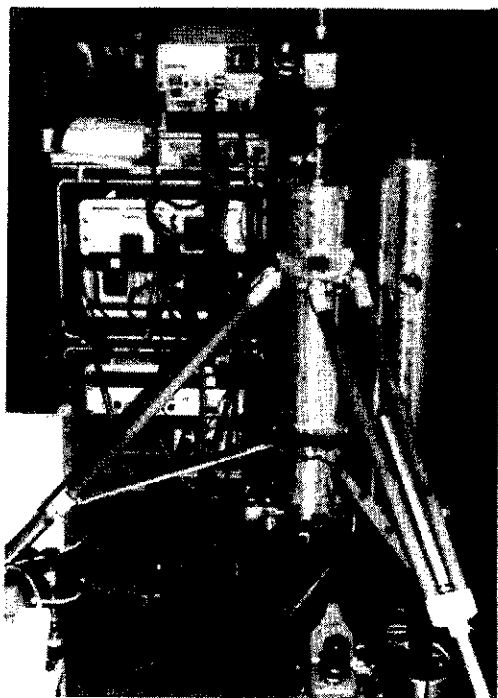
زمان را می‌توان با اثری که این تغییرات بر g می‌گذارند مشاهده کرد. به این ترتیب، می‌توان حرکت صفحات پوسته زمین و فعالیتهای لرزه‌ای زمین را دنبال کرد. تغییرات کوچک در میدان گرانشی زمین می‌تواند بر مدار ماهواره‌ها و مسیر موشکهای قاره‌پیما تأثیر بگذارد، و در علم پایه، با اندازه‌گیریهای دقیق g امکان آزمون جزئیات درکی که از نظریه گرانشی داریم فراهم می‌شود؛ نظریه‌ای که بیش از سه قرن پیش، آیزاک نیوتون آن را پایه‌گذاری کرد.

پرسشها

- آیا اندازه سرعت یک جسم می‌تواند منفی باشد؟ اگر می‌گویید بله، مثالی بیاورید؛ اگر می‌گویید نه، توضیح بدهید که چرا.
- خرگوشی در هر ثانیه نصف فاصله باقی‌مانده بین بینی خود و سر یک کاهو را می‌پیماید. آیا این خرگوش اصولاً می‌تواند به کاهو برسد؟ مقدار حدی سرعت متوسط خرگوش چقدر است؟ نمودارهای سرعت و مکان خرگوش را برحسب زمان رسم کنید.
- متوسط اندازه سرعت، برابر است با طول مسیر پیموده شده تقسیم بر مدت حرکت. آیا این کمیت با اندازه سرعت متوسط فرق دارد؟ مثالی بیاورید که نظرتان را تأیید کند.
- در یک میدان بخصوص مسابقات اتومبیلرانی، اتومبیلی دور اول از یک مسیر ۲ دوری را با سرعت متوسط 90 mi/h می‌پیماید. راننده می‌خواهد سرعت اتومبیل را در دور دوم چنان زیاد کند که سرعت متوسط در کل مسابقه 180 mi/h باشد. نشان بدهید که این کار ممکن نیست.
- باب یک مسابقه دو 100 m را با اختلاف 10 m از جودی می‌برد، و دفعه بعد برای اینکه به جودی شانس بردن داده باشد، موقع شروع مسابقه 10 m از جودی عقبتر می‌ایستد. آیا این بار شانس باب و جودی برای برنده شدن واقعاً مساوی است؟
- اگر سرعت ثابت باشد، آیا ممکن است که سرعت متوسط در بازه‌ای با سرعت در یکی از لحظات آن بازه متفاوت باشد؟ اگر پاسختان مثبت است مثالی بزنید، اگر منفی است بگویید چرا.
- اگر شتاب حرکت یکنواخت نباشد، آیا هیچ وقت ممکن است که میانگین سرعت ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند $(v_0 + v)/2$ باشد؟ جواب خودتان را با استفاده از نمودار ثابت کنید.
- آیا سرعت سنج ماشین همان اندازه سرعتی را که تعریف کردیم می‌سنجد؟
- (الف) آیا ممکن است سرعت جسمی صفر باشد ولی شتاب آن غیرصفر باشد؟ (ب) آیا ممکن است سرعت جسمی ثابت باشد ولی اندازه سرعت متغیر باشد؟ در هر مورد، اگر جواب مثبت است مثالی بیاورید؛ اگر منفی است بگویید چرا.
- آیا ممکن است جهت سرعت جسمی که شتاب ثابت دارد، معکوس شود؟ اگر می‌گویید بله، مثال بیاورید؛ اگر می‌گویید نه بگویید که چرا.

دکتر جیمز فالر و همکارانش آن را در "مؤسسه مشترک اختر فیزیک آزمایشگاهی" در بولدر، کلرادو، طراحی کرده‌اند. جسم افتان، یک کنج بازتابنده است، در واقع کنجی است از یک مکعب شیشه‌ای که سه وجه آن با لایه بازتابنده اندود شده است. ویژگی مفید این وسیله آن است که نور از هر جهتی که به داخل کنج بتابد، درست در جهت مخالف بازتابیده می‌شود. (فضانوردان آپولو آرایه‌ای از چنین بازتابنده‌هایی را در ماه نصب کرده‌اند؛ با تاباندن باریکه لیزر از زمین به ماه و دریافت بازتاب این باریکه، می‌توان فاصله زمین تا ماه را به دقت سنجید.) یک باریکه لیزر را از جسم افتان باز می‌تابد و باریکه‌های فرودی و بازتابیده با هم تداخل می‌کنند و در حین سقوط جسم مرتباً یکدیگر را تقویت و تضعیف می‌کنند. مسافتی که جسم افتان می‌پیماید تا از یک تداخل ویرانگر به تداخل ویرانگر بعدی برسیم نصف طول موج نور است. بنابراین، کل مسافت سقوط آزاد را می‌توان، تنها با شمردن عده تداخلهای ویرانگر، با دقت کسری از طول موج نور به دست آورد. همزمان با فاصله زمانی بین دو تداخل ویرانگر با ساعت اتمی اندازه‌گیری می‌شود. به این ترتیب، مسافت و زمان هر دو با هم به دست می‌آیند، مثل همان روشهایی که خودتان ممکن است در آزمایشگاه فیزیک پایه به کار بگیرید. شکل ۲۱، تصویر این ابزار عالی را نشان می‌دهد.

ساختن گرانی‌سنجهای دقیقتر، نتایج عملی مهمی دارد. نگاشت میدان گرانشی زمین، به یافتن منابع نفت یا کانیهای دیگر کمک می‌کند (نگاه کنید به شکل ۵ در فصل ۱۶). تغییرات پوسته زمین در طی



شکل ۲۱. عکسی از دستگاه سقوط آزاد (که نمودار آن در شکل ۲۰ آمده است). این تجهیزات را می‌توان به راحتی حمل کرد و g را در هر محلی که لازم است اندازه گرفت.

۱۶. شخصی که بر لبه صخره‌ای مرتفع ایستاده است، تویی را با سرعت اولیه v_0 به طرف بالا و تویی دیگر را با سرعت اولیه v_0 رو به پایین پرتاب می‌کند. کدام توپ در پای صخره با سرعت بیشتری به زمین برخورد می‌کند؟ مقاومت هوا را ندیده بگیرید.

۱۷. جسمی از موشکی که با شتاب 9.8 m/s^2 رو به بالا حرکت می‌کند رها می‌شود. شتاب رو به پایین این جسم چقدر است؟

۱۸. ذره‌ای را در نظر بگیرید که از حالت سکون ($v_0 = 0$) از نقطه $x_0 = 0$ و در زمان $t = 0$ با شتاب a شروع به حرکت کند. از معادله ۱۹ برای حرکت با شتاب ثابت نتیجه می‌شود که ذره در دو زمان متفاوت $+\sqrt{2x/a}$ و $-\sqrt{2x/a}$ ، در نقطه x است. معنی ریشه منفی این معادله درجه دو چیست؟

۱۹. مقدار g در سیاره‌ای نصف مقدار آن در زمین است. زمان لازم برای سقوط اجسام از حالت سکون در این سیاره، چه ربطی با زمان مشابه در زمین دارد؟ مسافتهای سقوط را یکی بگیرید.

۲۰. الف) سنگی با سرعت معینی در سیاره‌ای که شتاب سقوط آزاد در سطح آن دو برابر همین شتاب در سطح زمین است، به طرف بالا پرتاب می‌شود. ارتفاع اوج این سنگ را با ارتفاع مشابه در زمین مقایسه کنید. ب) اگر سرعت اولیه را دو برابر کنیم، ارتفاع اوج چه تغییری می‌کند؟

۲۱. تویی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. با در نظر گرفتن مقاومت هوا، فکر می‌کنید زمان صعود توپ بیشتر باشد یا زمان سقوط آن؟ چرا؟

۲۲. نمودار کیفی سرعت بر حسب زمان را برای جسم افتانی که الف) مقاومت هوا در برابر حرکت آن ناچیز است و ب) مقاومت هوا در برابر حرکت آن قابل ملاحظه است، رسم کنید.

۲۳. دو توپ را به فاصله ۱۸ از هم رها می‌کنیم. الف) فاصله بین دو توپ با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ ب) نسبت سرعت توپ اول به سرعت توپ دوم، v_1/v_2 ، با گذشت زمان چه تغییری می‌کند؟ از مقاومت هوا چشم ببوشید، و پاسخهای کیفی بدهید.

۲۴. پرسش ۲۳ را، با در نظر گرفتن مقاومت هوا، دوباره پاسخ بدهید؛ باز هم پاسخهای کیفی.

۲۵. اگر m یک سنگ سبک و M یک سنگ سنگین باشد، بنا به ادعای ارسطو، M باید سریعتر از m سقوط کند. گالیله سعی کرد نشان بدهد که این ادعای ارسطو با منطق سازگار نیست. استدلال گالیله چنین بود: m و M را به هم ببندید و سنگ بزرگتری بسازید. در این حالت، m باید مزاحم سقوط M شود زیرا کندتر از M حرکت می‌کند. پس سنگ مرکب باید تندتر از m و کندتر از M سقوط کند؛ اما طبق ادعای ارسطو، سنگ جدید ($M + m$) سنگینتر از M است و باید تندتر از M حرکت کند. آیا اگر استدلال گالیله را بپذیریم، می‌توان گفت که M و m باید با یک سرعت سقوط کنند؟ در این صورت چه نیازی به آزمایش است؟ اگر فکر می‌کنید که استدلال گالیله نادرست است، بگویید چرا؟

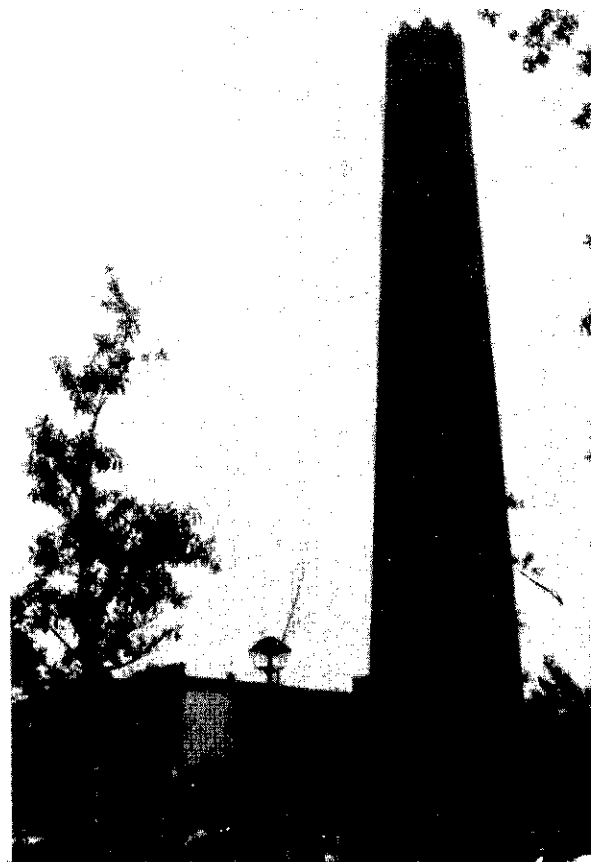
۱۱. شکل ۳۰، سرهنگ جان استپ را در سورتمه موشکی خود که در حال ترمز است، نشان می‌دهد (نگاه کنید به مسئله ۳۴). الف) بدن این فضانورد یک شتاب سنج است نه یک سرعت سنج. این موضوع را توضیح بدهید. ب) آیا می‌توانید از روی شکل، جهت شتاب را تعیین کنید؟

۱۲. آیا ممکن است شتاب جسمی در حال کاهش و سرعت آن در حال افزایش باشد؟ اگر جوابتان بله است مثالی بیاورید؛ اگر نه، بگویید چرا؟

۱۳. کدام یک از اینها غیرممکن است؟ الف) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن هم به طرف شرق است؛ ب) سرعت جسمی به طرف شرق و شتاب آن به طرف غرب است؛ ج) سرعت جسمی صفر و شتاب آن غیرصفر است؛ د) شتاب جسمی ثابت، اما سرعت آن متغیر است؛ ه) سرعت جسمی ثابت و شتاب آن متغیر است.

۱۴. چند مورد مثال بیاورید که در آنها نمی‌توان از مقاومت هوا در برابر سقوط اجسام چشم پوشید.

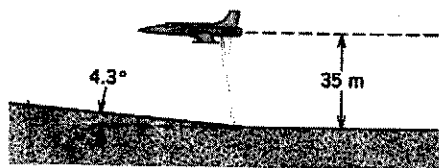
۱۵. شکل ۲۲ یک برجی را در بالتیمور، مریلند، نشان می‌دهد. این برج در سال ۱۸۲۹ بنا شد و از آن برای ساختن گلوله‌های سربی تفنگ استفاده می‌شد. برای این کار، سرب مذاب را در اندازه‌های لازم برای یک گلوله، از بالای برج به پایین می‌ریختند. گلوله‌های سربی در پایین برج به درون یک مخزن آب می‌افتادند و منجمد می‌شدند. ارتفاع برج، 230 ft است. این روش ساختن گلوله چه مزیت‌هایی می‌تواند داشته باشد؟



شکل ۲۲. پرسش ۱۵

مدت چقدر بوده است؟ آیا عجیب است که برای حل مسئله به سرعت هواپیما نیاز نداریم؟

۶. سرعت مجاز اتومبیلها در بزرگراهی از 55 mi/h (یعنی 88.5 km/h) به 65 mi/h (یعنی 104.6 km/h) افزایش داده شده است. فاصله بین بوفالو و نیویورک 435 mi (یعنی 700 km) است. اگر این مسافت را با بیشترین سرعت مجاز بپیماییم، در اثر این تغییر چقدر در وقتان صرفه جویی می شود؟
 ۷. شخصی از سن آنتونیو به هوستون می رود؛ نصف مدت سفر را با سرعت 35 mi/h (یعنی 56.3 km/h) و نصف دیگر را با سرعت 55 mi/h (یعنی 88.5 km/h) می پیماید. در بازگشت، نصف مسافت را با سرعت 35 mi/h و نصف دیگر را با سرعت 55 mi/h طی می کند. سرعت متوسط در (الف) مسیر سن آنتونیو به هوستون، (ب) مسیر هوستون به سن آنتونیو، و (ج) در کل مسیر چقدر است؟
 ۸. یک هواپیمای جت پیشرفته در یک مانور مخفی شدن از دید رادار، در ارتفاع 35 m از سطح زمین پرواز می کند. ناگهان هواپیما به یک شیب رو به بالای 4.3° می رسد (که البته تشخیص این شیب کوچک چندان ساده نیست)؛ نگاه کنید به شکل ۲۴. خلبان چه مدت فرصت دارد که، قبل از برخورد با زمین، خط پرواز را تصحیح کند؟ سرعت پرواز 1300 km/h است.



شکل ۲۴. مسئله ۸

۹. مکان ذره ای که روی خط راست حرکت می کند، از رابطه $x = 3t - 4t^2 + t^3$ به دست می آید؛ x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) مکان ذره در $t = 0, 1 \text{ s}, 2 \text{ s}, 3 \text{ s}, t = 0$ تا $t = 4 \text{ s}$ کجاست؟ (ب) جابه جایی ذره بین لحظات $t = 0$ تا $t = 2 \text{ s}$ چقدر است؟ (ج) چقدر؟ (د) $t = 0$ تا $t = 4 \text{ s}$ چقدر؟ (ه) بازه $t = 0$ تا $t = 2 \text{ s}$ چقدر است؟ (و) بازه $t = 0$ تا $t = 3 \text{ s}$ چقدر است؟
 ۱۰. اتومبیلی با سرعت ثابت 40 km/h از تپه ای بالا می رود و با سرعت ثابت 60 km/h از همان تپه پایین می آید. متوسط اندازه سرعت اتومبیل در کل مسیر چقدر است؟

۱۱. سرعت متوسط خودتان را در هر یک از این دو حالت حساب کنید. (الف) مسافت 240 ft را با سرعت 4 ft/s راه می روید و سپس 240 ft دیگر را با سرعت 1 ft/s می دوید. (ب) به مدت 1 min با سرعت 4 ft/s راه می روید و سپس به مدت 1 min دیگر با سرعت 1 ft/s می دوید.

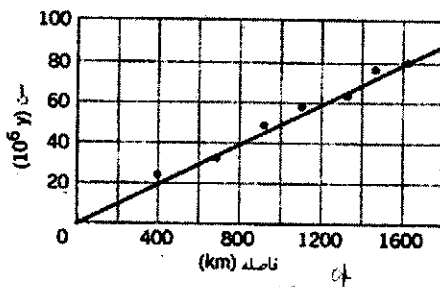
۱۲. دو قطار با سرعت 34 km/h ، روی یک ریل به طرف هم حرکت می کنند. هنگامی که فاصله آنها از یکدیگر 102 km است، پرنده ای از سر یک قطار پرواز می کند تا به قطار دیگر برسد، و سپس دوباره به

۲۶. معادلات سینماتیکی حرکت (جدول ۲) تحت اثر وارونگی زمان، یعنی گذاشتن $-t$ به جای t ، چه می شوند؟ توضیح بدهید.
 ۲۷. انتظار داریم روابطی که واقعاً کلی هستند، مثل روابط جدول ۲، مستقل از دستگاه مختصات، معتبر باشند. اگر معادلات کلی از نظر ابعادی هم سازگار باشند، آن وقت، مستقل از یکاهایی که به کار می بریم، معتبر خواهند بود. در این صورت، آیا اصولاً نیازی به یکاها و دستگاههای مختصات داریم؟

مسئله ها

بخش ۳-۲ سرعت متوسط

۱. اتومبیل شما با سرعت 88 km/h (یعنی 55 mi/h) در حرکت است. شما به مدت 1 s به تصادفی که کنار جاده اتفاق افتاده است نگاه می کنید. در این مدت، اتومبیل شما چه مسافتی را می پیماید؟
 ۲. یک بازیکن بیسبال، توپی را با سرعت افقی 160 km/h پرتاب می کند. بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، 18.4 m از محل پرتاب توپ فاصله دارد. چقدر طول می کشد تا توپ به چوب بیسبال برسد؟
 ۳. شکل ۲۳، رابطه بین سن قدیمی ترین رسوبها در اقیانوس، و فاصله این رسوبها از یک پشته خاص را نشان می دهد. سن رسوبها بر حسب میلیون سال و فاصله بر حسب کیلومتر است. ماده، تقریباً با سرعت یکنواخت، از این پشته بیرون می زند و به اطراف حرکت می کند. سرعت حرکت رسوبها از این پشته را بر حسب سانتی متر بر سال، پیدا کنید.

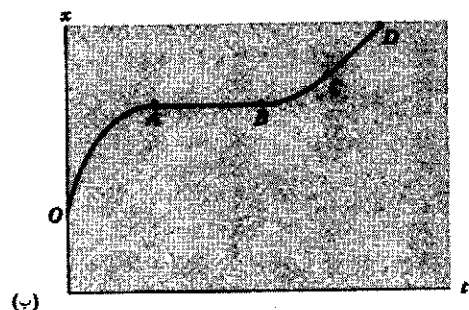
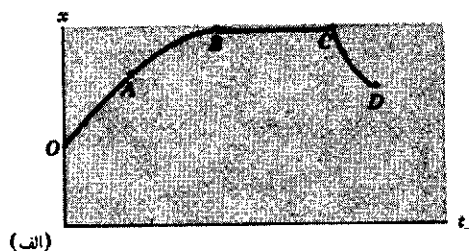


شکل ۲۳. مسئله ۳

۴. کارل لوئیس، دو 100 m را در زمانی در حدود 10 s می دود؛ بیل راجرز، ماراتون (26 mi ، 38.5 yd) را در زمانی در حدود 2 h و 10 min می دود. (الف) سرعت متوسط هر یک چقدر است؟ (ب) اگر کارل لوئیس می توانست سرعت دو 100 m خود را در ماراتون حفظ کند، چه مدتی طول می کشید تا مسیر ماراتون را طی کند؟

۵. فیزیکدان مشهوری به مدت چند ماه، هر هفته یک بار از بوستون در ماساچوست به ژنو در سویس می رفت و برمی گشت؛ فاصله بین این دو شهر 4000 mi است. متوسط اندازه سرعت فیزیکدان در این

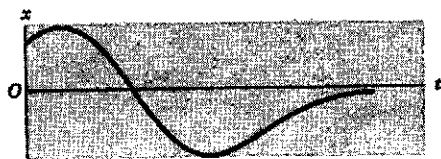
۱۸. شکل ۲۷ الف نمودار x بر حسب t ذره‌ای را نشان می‌دهد که روی خط راست حرکت می‌کند. (الف) در هر یک از بازه‌های OA ، AB ، BC ، و CD ، سرعت آیا مثبت است، منفی است، یا صفر است؟ همچنین تعیین کنید که در هر بازه شتاب $+$ ، $-$ یا 0 است. (ب) در این نمودار آیا بازه‌ای وجود دارد که شتاب در آن به وضوح متغیر باشد؟ (از رفتار منحنی در نقاط مرزی بازه‌ها چشم‌پوشید.)



شکل ۲۷. (الف) مسئله ۱۸ و (ب) مسئله ۱۹

۱۹. پرسشهای مسئله قبل را در مورد حرکت طبق نمودار شکل ۲۷ ب، پاسخ دهید.

۲۰. شکل ۲۸ نمودار مکان-زمان ذره‌ای را نشان می‌دهد که در راستای محور x حرکت می‌کند. به‌طور کیفی، منحنیهای سرعت-زمان و شتاب-زمان حرکت این ذره را رسم کنید.



شکل ۲۸. مسئله ۲۰

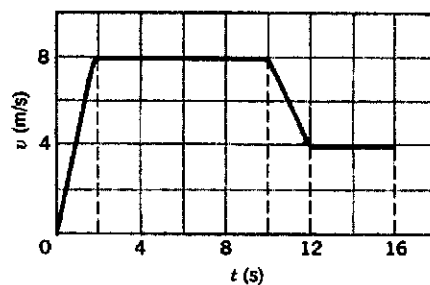
۲۱. در هر یک از حالت‌های زیر، نموداری رسم کنید که نمایش ممکن از مکان-زمان ذره‌ای باشد که در راستای محور x حرکت می‌کند: در $t = 1s$ ، (الف) سرعت ذره صفر و شتاب آن مثبت است؛ (ب) سرعت ذره صفر و شتاب آن منفی است. (ج) سرعت ذره منفی و شتاب آن مثبت است؛ (د) سرعت ذره منفی و شتاب آن منفی است. (ه) در کدام یک از موارد بالا، اندازه سرعت ذره، در $t = 1s$ در حال افزایش است؟ ۲۲. مکان ذره‌ای با رابطه $x = 2t^3$ بیان می‌شود، که x بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط و شتاب متوسط ذره

طرف قطار اول برمی‌گردد و این کار را تا زمان برخورد دو قطار تکرار می‌کند. سرعت پرواز پرنده، $58 km/h$ است. (الف) پیش از برخورد، پرنده چند بار بین دو قطار رفت و آمد می‌کند؟ (ب) کل مسافتی که پرنده می‌پیماید چقدر است؟

بخش ۲-۴ سرعت لحظه‌ای

۱۳. مکان ذره‌ای که روی خط راست حرکت می‌کند، از رابطه $x = 9.75t + 1.50t^2$ به دست می‌آید که در آن x بر حسب سانتی‌متر و t بر حسب ثانیه است. بازه زمانی بین $t = 2s$ و $t = 3s$ را در نظر بگیرید: (الف) سرعت متوسط در این بازه چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای در $t = 2s$ چقدر است؟ (ج) سرعت لحظه‌ای در $t = 3s$ چقدر است؟ (د) سرعت لحظه‌ای در $t = 2.5s$ چقدر است؟ (ه) سرعت لحظه‌ای در زمانی که ذره در وسط فاصله مکانهای متناظر با $t = 2s$ و $t = 3s$ است چقدر است؟

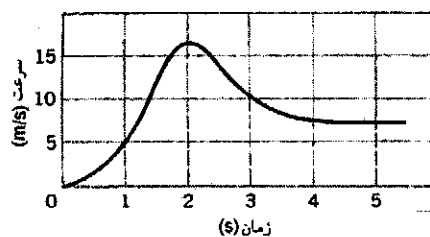
۱۴. شکل ۲۵ نمودار سرعت زمان دوتده‌ای را نشان می‌دهد. این دوتده در مدت $16s$ چه مسافتی را می‌پیماید؟



شکل ۲۵. مسئله‌های ۱۴ و ۱۵

بخش ۲-۵ حرکت شتابدار

۱۵. شتاب دوتده مسئله ۱۴ در $t = 11s$ چقدر است؟ ۱۶. سرعت ذره‌ای $18 m/s$ در جهت $+x$ است. $2.4s$ بعد، سرعت آن $30 m/s$ در جهت مخالف است. شتاب متوسط ذره در این بازه 2.4 ثانیه‌ای چقدر است؟ ۱۷. شکل ۲۶ نمودار سرعت-زمان جسمی است که روی خط راست حرکت می‌کند. نمودار شتاب-زمان این جسم را رسم کنید.



شکل ۲۶. مسئله ۱۷

۲۸. در یک بازی کامپیوتری، لکه‌ای طبق رابطه
 $x = 90^\circ t - 75^\circ t^2$ روی صفحه نمایش [مانیتور]
 حرکت می‌کند. در این رابطه، x فاصله لکه از لبه چپ صفحه،
 برحسب سانتی‌متر، و t زمان برحسب ثانیه است. اگر لکه به یکی از دو
 لبه صفحه، $x = 0$ یا $x = 15\text{cm}$ برسد، دوباره از لبه چپ شروع
 به حرکت می‌کند. (الف) چه مدت پس از شروع حرکت، لکه به حالت
 سکون لحظه‌ای می‌رسد؟ (ب) در این لحظه لکه کجاست؟ (ج) در این
 لحظه شتاب لکه چقدر است؟ (د) پس از سکون لحظه‌ای، لکه در چه
 جهتی حرکت می‌کند؟ (ه) لکه در چه زمانی از صفحه خارج می‌شود؟

بخش ۲-۶ حرکت با شتاب ثابت

۲۹. جامبوجتی باید روی باند به سرعت 36°km/h (یعنی 224mi/h)
 برسد تا بتواند از زمین کنده شود. اگر طول باند (یعنی 1.1mi) 1.8km
 باشد، حداقل شتاب (ثابت) لازم برای اینکه هواپیما در این باند از
 سکون به سرعت لازم برسد چقدر است؟

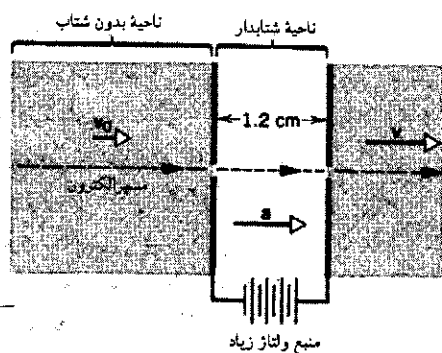
۳۰. فضاییابی در فضای تهی با شتاب ثابت 9.8m/s^2 حرکت
 می‌کند. (الف) اگر فضاییما از حالت سکون شروع به حرکت کند،
 چقدر طول می‌کشد تا سرعت آن به یک دهم سرعت نور برسد؟
 (ب) در این مدت، فضاییما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (سرعت نور
 $3 \times 10^8\text{m/s}$ است.)

۳۱. مارزنگی می‌تواند سرش را با شتاب 50m/s^2 به طرف قربانی اش
 حرکت بدهد. اگر اتومبیلی می‌توانست با این شتاب حرکت کند، چقدر
 طول می‌کشید تا سرعت آن از صفر به 100km/h برسد؟

۳۲. یک میون (که نوعی ذره بنیادی است) با سرعت 10^6m/s 5.2
 به یک میدان الکتریکی پرتاب می‌شود. میدان الکتریکی به این ذره
 شتاب 10^{14}m/s^2 1.3 در خلاف جهت سرعت اولیه اش می‌دهد.

میون چه مسافتی را قبل از متوقف شدن می‌پیماید؟

۳۳. الکترونی با سرعت اولیه 10^5m/s 1.5 وارد ناحیه‌ای
 به طول 1.2cm می‌شود. در این ناحیه، الکترون در اثر میدان الکتریکی
 شتاب می‌گیرد (شکل ۲۹) و با سرعت 10^6m/s 5.8 از آن خارج
 می‌شود. شتاب الکترون، که ثابت فرض می‌شود، چقدر است؟ (این
 همان چیزی است که در بخش تفنگ الکترونی لامپ پرتو کاتد اتفاق



شکل ۲۹. مسئله ۳۳

بین $t = 1\text{s}$ و $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ (ب) سرعت لحظه‌ای و شتاب
 لحظه‌ای ذره در $t = 1\text{s}$ و $t = 2\text{s}$ چقدر است؟ (ج) مقادیر لحظه‌ای
 و متوسط را با هم مقایسه کنید. در هر حالت کمیت بزرگتر را تعیین
 کنید و بگویید که چرا بزرگتر است؟

۲۳. ذره‌ای طبق رابطه $x = 50t + 10t^2$ در راستای محور x حرکت
 می‌کند؛ x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت متوسط
 ذره را در 3s اول حرکت، (ب) سرعت لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{s}$ ، و
 (ج) شتاب لحظه‌ای ذره را در $t = 3\text{s}$ پیدا کنید.

۲۴. شخصی از $t = 0$ تا $t = 5\text{min}$ ایستاده است، از $t = 5\text{min}$
 تا $t = 10\text{min}$ ، به عجله با سرعت 2.2m/s راه می‌رود. سرعت
 متوسط و شتاب متوسط او در بازه‌های زمانی (الف) از 2min تا
 8min و (ب) از 3min تا 9min چقدر است؟

۲۵. در جدول زیر مکان ذره‌ای که در راستای محور x حرکت می‌کند،
 در زمانهای مختلف فهرست شده است:

$x(\text{m})$	0.080	0.050	0.040	0.050	0.080	0.13	0.20
$t(\text{s})$	0	1	2	3	4	5	6

(الف) نمودار جابجایی (نه مکان) برحسب زمان را رسم کنید.
 (ب) سرعت متوسط ذره را در بازه‌های 0 تا 1s ، 1s تا 2s ،
 2s تا 3s و 3s تا 4s (ج) شیب منحنی‌ای را که در قسمت
 (الف) رسم کردید، در $t = 0$ ، $t = 1\text{s}$ ، $t = 2\text{s}$ ، $t = 3\text{s}$ ،
 $t = 4\text{s}$ و $t = 5\text{s}$ به دست بیاورید. (د) نمودار شیب برحسب زمان را رسم
 کنید. (یکای شیب چیست؟) (ه) از روی منحنی قسمت (د) شتاب
 ذره را در زمانهای $t = 2\text{s}$ ، $t = 3\text{s}$ ، $t = 4\text{s}$ به دست بیاورید.

۲۶. مکان ذره‌ای بر محور x ، برحسب زمان، از رابطه

$$x = At^2 - Bt^3$$

به دست می‌آید، که x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف)
 یکاهای SI برای A و B چه هستند؟ در بقیه مسئله، فرض کنید مقادیر
 عددی A و B ، به ترتیب برابر با 3 و 1 یکای SI باشند. (ب) در چه
 زمانی ذره به بیشترین مقدار مثبت x می‌رسد؟ (ج) کل طول مسیری
 که ذره در 4s اول حرکت می‌پیماید چقدر است؟ (د) جابجایی ذره
 در 4s اول چقدر است و (ه) سرعت ذره در $t = 1\text{s}$ ، $t = 2\text{s}$ ،
 $t = 3\text{s}$ و $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ (و) شتاب ذره در $t = 1\text{s}$ ،
 $t = 2\text{s}$ ، $t = 3\text{s}$ و $t = 4\text{s}$ چقدر است؟ (ز) سرعت متوسط ذره در بازه
 زمانی $t = 2\text{s}$ تا $t = 4\text{s}$ چقدر است؟

۲۷. الکترونی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند. شتاب این
 الکترون، به طور خطی با زمان زیاد می‌شود: $a = kt$ ، که در آن
 $k = (1.0\text{m/s}^2)/\text{s}$ یا $k = 1.0\text{m/s}^3$ است. (الف) نمودار a
 برحسب t را برای 10s اول حرکت رسم کنید. (ب) با استفاده از نمودار
 قسمت (الف)، نمودار v برحسب t را رسم کنید و سرعت الکترون
 را در 5s بعد از شروع حرکت تخمین بزنید. (ج) از روی منحنی v
 برحسب t قسمت (ب)، منحنی x برحسب t را رسم کنید و تخمین
 بزنید که الکترون در 5s اول حرکت چه مسافتی را می‌پیماید.

۳۹. قطاری از حالت سکون با شتاب ثابت شروع به حرکت می‌کند. سرعت قطار که در یک لحظه 33 m/s است، 160 m بعد به 54 m/s می‌رسد. (الف) شتاب قطار، (ب) زمان لازم برای طی این مسافت 160 m ، (ج) زمان لازم برای اینکه قطار از سکون به سرعت 33 m/s برسد. و (د) مسافتی که قطار تا رسیدن به سرعت 33 m/s می‌پیماید چقدر است؟

۴۰. اتومبیلی با شتاب ثابت، مسافت 58 m بین دو نقطه را در 6.2 s می‌پیماید. سرعت اتومبیل در لحظه عبور از نقطه دوم 15 m/s است. (الف) سرعت اتومبیل در نقطه اول چقدر است؟ (ب) شتاب اتومبیل چقدر است؟ (ج) در چه فاصله‌ای پیش از نقطه اول، اتومبیل در حالت سکون بوده است؟

۴۱. یک قطار زیرزمینی از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیمه اول مسافت بین دو ایستگاه را با شتاب 1.2 m/s^2 طی می‌کند. نیمه دوم را با شتاب -1.2 m/s^2 می‌پیماید تا در ایستگاه بعدی متوقف شود. فاصله دو ایستگاه از هم 1.1 km است. (الف) زمان طی فاصله دو ایستگاه، (ب) بیشترین مقدار سرعت قطار در این فاصله چقدر است؟

۴۲. طول مسیر یک آسانسور 624 ft است. بیشترین سرعت آسانسور 1000 ft/min و شتاب (ثابت) آن 4 m/s^2 است. (الف) آسانسور از حالت سکون تا رسیدن به بیشترین سرعتش چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا آسانسور تمام مسیر را بپیماید؟ توجه کنید که آسانسور در انتهای مسیر باید متوقف شود.



شکل ۳۱. مسئله ۴۲

۴۳. راننده‌ای برای متوقف کردن اتومبیلش به شدت ترمز می‌کند. مسافت توقف را می‌توان حاصل جمع "مسافت واکنش" و "مسافت ترمز" در نظر گرفت. مسافت واکنش برابر است با حاصل ضرب سرعت اولیه در زمان واکنش، و مسافت ترمز فاصله‌ای است که اتومبیل پس از

می‌افتد. لامپ پرتوگاتر در گیرنده تلویزیون هم به کار می‌رود).
۳۴. در ۱۹ مارس ۱۹۵۴، سرهنگ جان پی استاپ یک رکورد جهانی برای حرکت روی سطح زمین را جا گذاشت. او یک سورتمه موشکی را با سرعت 1020 km/h در مسیر، رانده و سورتمه را طی زمان $1/3\text{ s}$ از این سرعت به حالت سکون رساند. شکل ۳۰. شتاب سورتمه؟ در این "ترمز" چقدر بوده است؟ پاسخ خود را برحسب g (شتاب گرانشی) بیان کنید. (دقت کنید که بدن این شخص مثل شتاب‌سنج عمل می‌کند نه سرعت‌سنج).



شکل ۳۰. مسئله ۳۴

۳۵. ترمزهای اتومبیل شما می‌توانند شتاب کندکننده 17 ft/s^2 تولید کنند. اگر در بزرگراهی با سرعت 85 mi/h در حرکت باشید و ناگهان با علامت بیشترین سرعت مجاز برابر با 55 mi/h مواجه شوید، حداقل چقدر طول می‌کشد که اتومبیل را به سرعت مجاز برسانید؟

۳۶. یک اتومبیل با لاستیکهای خوب، در یک جاده خشک می‌تواند با شتاب کندکننده 11 mi/h.s (یعنی 4.92 m/s^2) ترمز کند. (الف) چقدر طول می‌کشد تا اتومبیلی که با سرعت 55 mi/h (یعنی 24.6 m/s) در حرکت است متوقف شود؟ (ب) در این مدت، اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳۷. تیری را از کمان مستقیماً رو به بالا پرتاب می‌کنیم. تیر در بازگشت با سرعت 26 ft/s به زمین برخورد و به اندازه 9 in در آن فرو می‌رود. (الف) شتاب (ثابت) توقف این تیر، و (ب) زمان لازم برای متوقف شدن آن در زمین چقدر است؟

۳۸. وکیلی در مورد مسائل فیزیکی یکی از پرونده‌هایش با شما مشورت می‌کند: اتومبیلی در حال حرکت بوده است و راننده مجبور به توقف اضطراری می‌شود. ترمزها قفل می‌شوند، چرخهای اتومبیل روی جاده می‌لغزند و ردی به طول 192 ft روی جاده می‌ماند. مسئله این است که آیا سرعت اتومبیل، پیش از توقف، از حد مجاز 30 mi/h بیشتر بوده است یا نه. افسر پلیس، با فرض اینکه شتاب کندکننده ترمز از شتاب سقوط آزاد (یعنی 32 ft/s^2) بیشتر نبوده است، راننده را جرمه نمی‌کند. به نظر شما آیا سرعت راننده کمتر از حد مجاز بوده است؟ توضیح بدهید.

در طی مسافت ۱۸۶ft متوقف شود، و در سرعت ۳۰mi/h طی ۸۰ft. فرض کنید زمان واکنش راننده (که طی آن شتاب صفر است) و همچنین شتاب حاصل از ترمز، برای هر دو سرعت یکی است. (الف) زمان واکنش راننده و (ب) شتاب ترمز را حساب کنید.

بخش ۲-۷ سقوط آزاد اجسام

۵۰. قطره‌های باران از ابری در ارتفاع ۱۷۰۰m از سطح زمین، به زمین سقوط می‌کنند. اگر مقاومت هوا سرعت را کم نمی‌کند، این قطره‌ها با چه سرعتی به زمین می‌رسند؟ در این صورت، آیا قدم زدن در زیر باران بی‌خطر بود؟

۵۱. تنها کابل نگهدارنده یک آسانسور (خالی) مخصوص عملیات ساختمانی، که در بالاترین نقطه ساختمان نیمه‌کاره‌ای به ارتفاع ۱۲۰m توقف کرده است، ناگهان پاره می‌شود. (الف) آسانسور با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر است؟ (ج) سرعت آن در نیمه راه چقدر است؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نیمه راه برسد؟

۵۲. آجاری از دست کارگری رها می‌شود و با سرعت ۲۴۰m/s به زمین می‌خورد. (الف) این آچار از چه ارتفاعی رها شده است؟ (ب) زمان سقوط آن چقدر بوده است؟

۵۳. تویی را به طرف بالا پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت اولیه آن باید چقدر باشد تا ارتفاع اوج آن ۵۳۷m شود؟ (ب) در این شرایط توپ چه مدت در هوا می‌ماند؟

۵۴. سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۱۰۰m پایین می‌افتد. چقدر طول می‌کشد تا (الف) ۵۰m اول و (ب) ۵۰m بعدی را طی کند؟

۵۵. فضاوردی که در یکی از سیاره‌های منظومه شمسی فرود آمده است متوجه می‌شود که اگر سنگ کوچکی با سرعت ۱۴۶m/s به طرف بالا پرتاب شود، بعد ۷۷۲s بعد به سطح سیاره بازمی‌گردد. این فضاورد روی کدام سیاره فرود آمده است؟ (راهنمایی: از اطلاعات مندرج در پیوست ج استفاده کنید.)

۵۶. تویی را با سرعت اولیه ۲۰۵m/s، از ارتفاع ۵۸۸m به طرف پایین پرتاب می‌کنیم. (الف) سرعت توپ در لحظه برخورد با زمین چقدر است؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) اگر توپ را از همان ارتفاع و با همان سرعت اولیه به طرف بالا پرتاب می‌کردیم، جواب قسمتهای (الف) و (ب) چه می‌شد؟

۵۷. شکل ۳۲ وسیله ساده‌ای برای اندازه‌گیری زمان واکنش را نشان می‌دهد. این وسیله، نواری مقوایی است که مقیاس‌بندی شده و ده نقطه بزرگ هم روی آن مشخص شده است. دوست شما نوار را، با شست و انگشت اشاره‌اش، از نقطه بالایی می‌گیرد. شست و انگشت اشاره شما روی نقطه پایینی است، اما مواظبید که نوار را لمس نکنند. دوستان نوار را رها می‌کنند و شما سعی می‌کنید که، پس از دیدن این رویداد، هر چه سریعتر نوار را بگیرید. عدد مربوط به نقطه‌ای که شما نوار را در آن می‌گیرید، زمان واکنش شماست. فاصله نقطه زیرین از شاخصهای ۵ms، ۱۰ms، ۲۰ms و ۲۵ms باید چقدر باشد؟

ترمز کردن و قبل از توقف کامل می‌بیماید. جدول زیر، مقادیر نوعی این کمیتها را به دست می‌دهد.

سرعت اولیه (m/s)	مسافت واکنش (m)	مسافت ترمز (m)	مسافت توقف (m)
۱۰	۷٫۵	۵٫۰	۱۲٫۵
۲۰	۱۵	۲۰	۳۵
۳۰	۲۲٫۵	۴۵	۶۷٫۵

(الف) زمان واکنش این راننده چقدر است؟ (ب) مسافت توقف اتومبیل، با سرعت اولیه ۲۵m/s چقدر است؟

۴۴. "تله سرعت" که در بزرگراهها نصب می‌شود، متشکل از دو نوار به فاصله ۱۱۰m از یکدیگر است که در اثر فشار فعال می‌شوند. راننده‌ای در بزرگراهی که سرعت مجاز در آن ۹۰km/h است با سرعت ۱۲۰km/h می‌راند. درست زمانی که از نوار اول می‌گذرد متوجه پلیس می‌شود و سرعت خود را کم می‌کند. چه شتاب کندکننده‌ای لازم است تا سرعت متوسط اتومبیل، بین دو نوار، کمتر از حد مجاز سرعت شود؟

۴۵. اتومبیلی به محض سبز شدن چراغ راهنما با شتاب $۲٫۲\text{m/s}^2$ شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه کامیونی که با سرعت ثابت ۹۵m/s در حرکت است، از اتومبیل سبقت می‌گیرد. (الف) در چه فاصله‌ای پس از این نقطه، اتومبیل از کامیون جلو می‌زند؟ (ب) در این لحظه سرعت اتومبیل چقدر است؟ (خوب است که نمودار کیفی x بر حسب t را برای هر یک از دو وسیله رسم کنید.)

۴۶. قطاری با سرعت v_1 حرکت می‌کند. لوکوموتوران یک قطار باری را می‌بیند که به فاصله d جلوتر از قطار خودش، با سرعت v_2 در همان جهت حرکت می‌کند. v_2 کوچکتر از v_1 است؛ بنابراین، لوکوموتوران ترمز می‌کند تا به قطار جلویی نخورد. سرعت قطار با شتاب ثابت a کم می‌شود. نشان بدهید که

$$\text{اگر } d > (v_1 - v_2)^2 / 2a \text{ باشد، برخورد صورت نمی‌گیرد؛}$$

$$\text{اگر } d < (v_1 - v_2)^2 / 2a \text{ باشد، برخورد صورت می‌گیرد.}$$

(خوب است که نمودار کیفی x بر حسب t را برای هر قطار رسم کنید.)

۴۷. اتومبیلی با سرعت ۳۵mi/h (یعنی ۵۶km/h) حرکت می‌کند. راننده متوجه می‌شود که ۱۱۰ft (یعنی ۳۴m) جلوتر از او مانعی وجود دارد و ترمز می‌کند. چهار ثانیه بعد، اتومبیل به مانع برمی‌خورد. (الف) شتاب ثابت اتومبیل، پیش از برخورد چقدر بوده است؟ (ب) در لحظه برخورد، سرعت اتومبیل چقدر بوده است؟

۴۸. دوندته‌ای در مسابقه دو ۱۰۰m، با شتاب $۲٫۸۰\text{m/s}^2$ به سرعت بیشینه خود می‌رسد و این سرعت را تا آخر مسیر حفظ می‌کند. اگر کل مسیر مسابقه در ۱۲٫۲s طی شده باشد، (الف) زمان سپری شده و (ب) مسافت طی شده در بخش شتابدار حرکت را حساب کنید.

۴۹. در یک کتابچه راهنمای اتومبیل آمده است که اتومبیلی (با ترمزهای خوب) که با سرعت ۵۰mi/h در حرکت باشد می‌تواند



شکل ۳۳. مسئله ۶۱

توضیح بدهید که چرا تعلیق بازیکنان در اوج پرش خیلی مشهورتر است؟ (شکل ۳۳).

۶۲. سنگی را در راستای قائم به بالا پرتاب می‌کنیم. سنگ با سرعت v از نقطه A ، و با سرعت $v/2$ از نقطه B می‌گذرد. نقطه B $3r_0$ بالاتر از A است. (الف) مقدار v ، و (ب) ارتفاع اوج سنگ نسبت به نقطه B چقدر است؟

۶۳. آب از سوراخهای دوش به پایین چکه می‌کند. کف حمام، 200 cm زیر دوش است. قطره‌ها به فاصله‌های زمانی منظم به پایین می‌چکند، چنانکه وقتی قطره اول به زمین می‌رسد، قطره چهارم از دوش جدا می‌شود. در این لحظه هر یک از قطره‌های دیگر در چه مکانی است؟ ۶۴. در "آزمایشگاه تحقیقات گرانث صفر" در مرکز تحقیقات لوئیس ناسا، یک برج سقوط، به ارتفاع 145 m، وجود دارد. این برج قائم و خلاصه شده است. از جمله تجهیزات این برج، گره‌ای به قطر 1 m است که می‌توان در آن وسایل آزمایشگاهی گذاشت و مجموعه را از برج رها کرد تا به صورت آزاد سقوط کند. (الف) این وسایل به چه مدت در حال سقوط آزادند؟ (ب) سرعت آنها در پایین برج چقدر بوده است؟ (ج) در پایین برج، شتاب $25g$ به کره تحمیل می‌شود تا سرعت آن به صفر برسد.



شکل ۳۲. مسئله ۵۷

۵۸. توپی را به بالا پرتاب می‌کنیم. 2.25 s طول می‌کشد تا توپ به ارتفاع 36.8 m برسد. (الف) سرعت اولیه آن چقدر بوده است؟ (ب) سرعت آن در این ارتفاع چقدر است؟ (ج) توپ تا چه ارتفاعی بالاتر می‌رود؟

۵۹. شخصی روی پلی مشرف به یک بزرگراه ایستاده است و در حالی که به آیزاک نیوتون فکر می‌کند، ناخودآگاه سیبی را از دستش رها می‌کند. سیب از لبه پل می‌افتد و در همان لحظه لبه جلویی کامیونی که از زیر پل می‌گذرد درست زیر لبه پل است. سرعت کامیون 55 km/h (یعنی 34 mi/h) و طول آن 12 m (یعنی 39 ft) است. سیب درست تماس بر لبه عقب کامیون به زمین می‌رسد.

در این صورت، ارتفاع لبه پل از زمین چقدر بوده است؟

۶۰. موشکی در راستای قائم از سطح زمین پرتاب می‌شود و به مدت 10 min با شتاب ثابت 20 m/s² به بالا حرکت می‌کند. در این لحظه سوخت موشک به کلی تمام می‌شود و حرکت آن به شکل سقوط آزاد ادامه می‌یابد. (الف) بیشترین ارتفاعی که موشک به آن می‌رسد چقدر است؟ (ب) از زمان برخاستن موشک، چقدر طول می‌کشد تا موشک دوباره به زمین برگردد؟ (از تغییرات g در اثر تغییر ارتفاع چشم بیوشید.)

۶۱. یک بازیکن بسکتبال 76 cm به طرف بالا می‌پرد تا توپ را توی سید "بکوبید". (الف) صعود 15 cm بالایی مسیر چقدر طول می‌کشد؟ (ب) صعود 15 cm پایینی مسیر چقدر؟ آیا به کمک این اعداد می‌توانید

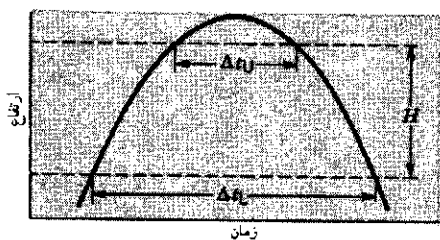
۷۰. بالونی با سرعت $۱۲٫۴\text{ m/s}$ در ارتفاع $۸۱٫۳\text{ m}$ از سطح زمین به طرف بالا حرکت می‌کند. در این لحظه، بسته‌ای از آن رها می‌شود. (الف) این بسته با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ و (ب) چقدر طول می‌کشد تا به زمین برسد؟

۷۱. چتربازی پس از پرش از هلی‌کوپتر، $۵۲٫۰\text{ m}$ بدون اصطکاک سقوط می‌کند. سپس چترش را باز می‌کند و با شتاب کند کننده $۲٫۱۰\text{ m/s}^2$ به حرکتش ادامه می‌دهد، تا اینکه با سرعت $۲٫۹۰\text{ m/s}$ به زمین می‌رسد. (الف) این چترباز چه مدت در هوا بوده و (ب) سقوط او از چه ارتفاعی شروع شده است؟

۷۲. یک توپ سربی از تخته‌پرسی که $۲٫۶\text{ m}$ بالاتر از سطح آب استخر قرار دارد به آب می‌افتد. توپ با سرعت معینی بر سطح آب می‌خورد و تمام مسافت زیر آب را با همین سرعت می‌پیماید. وقتی توپ به کف استخر می‌رسد $۰٫۹۷\text{ s}$ از شروع سقوط گذشته است. (الف) عمق استخر چقدر است؟ (ب) فرض کنید استخر را از آب خالی کنیم و توپ را از همان تخته‌پرش چنان پرتاب کنیم که باز هم $۰٫۹۷\text{ s}$ بعد به کف استخر برسد. توپ با چه سرعت اولیه‌ای پرتاب شده است؟

۷۳. اندازه‌گیری شتاب g در "آزمایشگاه ملی فیزیک" در انگلستان (که کارش تحقیق درباره استانداردهاست) به این ترتیب انجام شده است که یک گلوله شیشه‌ای را در یک لوله خلأ مستقیماً به بالا پرتاب می‌کنند. گلوله بالا می‌رود و برمی‌گردد؛ نگاه کنید به شکل ۳۵. فرض کنید Δt_L زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در پایین لوله، و Δt_U زمان بین دو بار عبور گلوله از یک نقطه در بالای لوله باشد. فاصله بین این دو نقطه، H است. نشان دهید که

$$g = \frac{2H}{\Delta t_L^2 - \Delta t_U^2}$$



شکل ۳۵. مسئله ۷۳

۷۴. یک بولبرینگ فولادی از شیروانی ساختمانی (با سرعت اولیه صفر) به پایین می‌افتد. ناظری که کنار پنجره‌ای به ارتفاع ۱۲۰ cm ایستاده است، متوجه می‌شود که $۰٫۱۲۵\text{ s}$ طول می‌کشد تا بولبرینگ از بالا تا پایین پنجره را طی کند. بولبرینگ به زمین می‌خورد، یک برخورد کاملاً کشسان با سطح پیاده‌رو انجام می‌دهد، و $۰٫۲\text{ s}$ پس از اینکه از لبه پایینی پنجره گذشته بود، دوباره به آنجا برمی‌گردد. ارتفاع ساختمان چقدر است؟ (اندازه سرعت توپ، پس از برخورد کاملاً کشسان، همان اندازه سرعت پیش از برخورد است.)

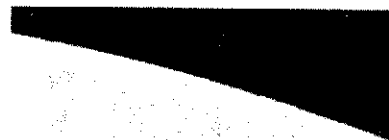
در مدتی که این شتاب اعمال می‌شود، کره چه مسافتی را می‌پیماید؟
۶۵. تویی از ارتفاع $۲٫۲\text{ m}$ رها می‌شود و پس از برخورد به زمین تا ارتفاع $۱٫۹\text{ m}$ به بالا برمی‌گردد. اگر این توپ به مدت ۹۶ ms با سطح زمین در تماس بوده باشد، در این مدت چه شتاب متوسطی (اندازه و جهت) داشته است؟

۶۶. چند سال پیش، زنی از بالای ساختمانی به ارتفاع ۱۴۴ ft سقوط کرد و روی یک جعبه هواکش افتاد. جعبه را ۱۸ in در هم فرو برد و بی‌هیچ جراحت شدیدی، زنده ماند. شتابی که این زن طی برخورد با جعبه متحمل شده (با فرض ثابت بودن این شتاب) چقدر بوده است؟ پاسخ را برحسب g بیان کنید.

۶۷. جسمی از حالت سکون رها می‌شود و نیمی از کل مسیر خود را در آخرین ثانیه سقوط آزادش می‌پیماید. (الف) زمان و (ب) ارتفاع این سقوط چقدر بوده است؟ درباره جواب غیرقابل قبول معادله درجه دومی که به دست می‌آورد توضیح دهید.

۶۸. دو جسم، از یک ارتفاع و از حالت سکون، به حالت آزاد سقوط می‌کنند. سقوط جسم دوم زمانی شروع می‌شود که اولی $۱٫۰\text{ s}$ از آن جلوتر است. چه مدت پس از شروع سقوط جسم اول، فاصله دو جسم از یکدیگر به ۱۰ m می‌رسد؟

۶۹. کلارا، و کمی پس از او جیم، از یک پل به پایین پریده‌اند؛ شکل ۳۴. جیم چه مدت بعد از کلارا پریده است؟ فرض کنید که قد جیم ۱۷۰ cm است و سطح پرش را لبه بالایی شکل بگیرد. فاصله‌ها را از روی شکل بسنجید.



شکل ۳۴. مسئله ۶۹

خارج می‌شود؛ سپس برمی‌گردد و در مرز پایین پنجره از دید خارج می‌شود. اگر کل زمانی که لنگه کفش در معرض دید است $0.74s$ باشد، لنگه کفش تا چه ارتفاعی از لبه بالایی پنجره بالاتر رفته است؟

۷۵. شخصی که در انتهای اتاقی روبروی پنجره‌ای به ارتفاع $1.1m$ ایستاده است مشاهده می‌کند که لنگه کفشی در نزدیکی سطح خارجی پنجره در راستای قائم صعود می‌کند و در مرز بالای پنجره از دید

۳

بردارها

در خیلی از قوانین فیزیک، بین کمیتها نه تنها روابط جبری بلکه روابط هندسی هم ظاهر می‌شوند. مثلاً، مجسم کنید فرقه‌ای را که دارد به سرعت حول محور می‌چرخد و در همین حال خود محور دوران هم به کندی حول راستای قائم در گردش است. نمایش این ارتباط هندسی با معادلات جبری مشکل است. اما با استفاده از نمایش برداری متغیرهای فیزیکی، تنها یک معادله برای توصیف رفتار فرقه کافی است، به کمک بردارها می‌شود بسیاری از قوانین فیزیک را به صورت موجزتری بیان کرد. گاهی در شکل برداری قوانین فیزیکی می‌توانیم ارتباطها یا تقارنهایی را ببینیم که دیدنشان در معادلات جبری، به خاطر پیچیدگی ظاهر این معادلات، دشوار است. در این فصل، بعضی از ویژگیها و کاربردهای بردار را مطالعه می‌کنیم و با عملیات ریاضی مربوط به بردارها آشنا می‌شویم. خواهیم دید که نمادهای آشنای حساب، مثل $+$ ، $-$ ، و \times ، در مورد بردارها معنی متفاوتی پیدا می‌کنند.

۱-۳ بردار و اسکالر

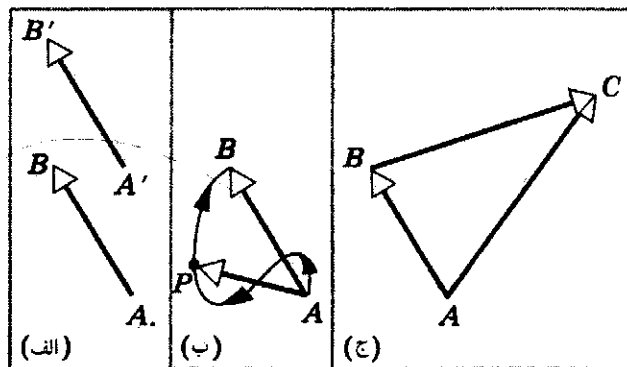
تغییر مکان ذره را جابه‌جایی می‌نامند. اگر ذره از نقطه A به نقطه B برود (شکل الف)، جابه‌جایی آن را می‌توانیم با کشیدن خطی از A به B نشان بدهیم. برای نمایش جهت این جابه‌جایی می‌توانیم در نقطه B یک علامت پیکان بگذاریم، تا معلوم شود که جابه‌جایی از A به B بوده است. لزومی ندارد که مسیر ذره از A به B خط راست بوده

باشد؛ پیکان تنها اثر کلی و نهایی حرکت را نشان می‌دهد نه جزئیات حرکت واقعی را.

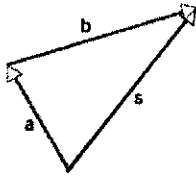
شکل ب، مسیر واقعی یک ذره از A تا B را نشان می‌دهد. این مسیر با خط AB فرق دارد. اگر می‌توانستیم از ذره در نقطه A ، و مدتی بعد در یکی از نقاط میانی مسیر مثل P عکس بگیریم، بردار جابه‌جایی AP را به دست می‌آوریم که حرکت کلی را در این بازه زمانی نشان می‌دهد، اگرچه درباره مسیر واقعی حرکت از A تا P چیزی نمی‌گوید. به علاوه، جابه‌جایی‌ای مثل $A'B'$ (شکل الف) که موازی، هم جهت، و هم طول با AB باشد نیز نماینده تغییر مکانی درست مثل AB است. بین این دو جابه‌جایی تمایزی قائل نمی‌شویم. بنابراین، جابه‌جایی با طول و جهت مشخص می‌شود.

به همین ترتیب می‌توان جابه‌جایی بعدی ذره از B به C را نشان داد (شکل ج). اثر کلی دو جابه‌جایی معادل با یک جابه‌جایی از A به C است. می‌گوییم که AC جمع یا برابند دو جابه‌جایی AB و BC است. توجه کنید که این جمع، جمع جبری نیست و تنها با یک عدد مشخص نمی‌شود.

کمیت‌هایی را که مثل جابه‌جایی رفتار می‌کنند بردار می‌نامیم. بنابراین، بردارها کمیت‌هایی هستند که جهت و اندازه دارند و طبق قواعد معینی (که شرح خواهیم داد) با هم ترکیب می‌شوند. بردار جابه‌جایی نمونه خوبی برای بردارهاست. کمیت‌های فیزیکی دیگری هم هستند که آنها



شکل ۱. بردارهای جابه‌جایی. (الف) بردارهای AB و $A'B'$ یکسان‌اند زیرا طول و جهت آنها یکی است. (ب) مسیر واقعی ذره از A به B می‌تواند به شکل این منحنی باشد، اما جابه‌جایی، بردار AB است. جابه‌جایی تا نقطه میانی P ، بردار AP است. (ج) پس از جابه‌جایی AB ، ذره یک جابه‌جایی دیگر، BC ، هم پیدا می‌کند. اثر کلی این دو جابه‌جایی، بردار AC است.



شکل ۳. جمع برداری $a + b = s$. این شکل را با شکل ۱ مقایسه کنید.

قواعد جمع برداری به روش نموداری اینها هستند: (۱) بردار a را، در مقیاس مناسب، در جهت مورد نظر نسبت به محورهای مختصات رسم می‌کنیم. (۲) بردار b را با همان مقیاس و در جهت مناسب طوری رسم می‌کنیم که دم آن در سر a باشد (جهت بردارها گاهی ممکن است یکی باشد). (۳) از دم a خطی به سر b می‌کشیم. به این ترتیب، بردار برابری s (یعنی جمع دو بردار) به دست می‌آید. اگر a و b بردارهای جابه‌جایی باشند، s هم یک جابه‌جایی است که معادل با دو جابه‌جایی متوالی a و b است. با تعمیم این روش می‌توان جمع چند بردار را هم به دست آورد.

از آنجا که بردارها با اعداد معمولی فرق می‌کنند، انتظار داریم عملیات مربوط به آنها هم قواعد متفاوتی داشته باشند. معنی علامت “+” در معادله ۱، با معنی این علامت در حساب یا جبر اسکالرها متفاوت است؛ این علامت، در مورد بردارها، به معنی انجام عملیاتی است که با عملیات مربوط به اسکالرها تفاوت دارد. از بررسی دقیق شکل ۴، دو ویژگی مهم جمع برداری معلوم می‌شود:

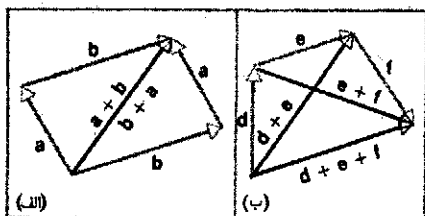
$$(۲) \quad a + b = b + a \quad (\text{قانون جابه‌جایی})$$

و

$$(۳) \quad d + (e + f) = (d + e) + f \quad (\text{قانون شرکت‌پذیری})$$

معنی این قوانین آن است که ترتیب یا نوع گروه‌بندی بردارها، اثری در نتیجه جمع برداری ندارد. از این نظر، جمع برداری و جمع اسکالرها شبیه به هم‌اند.

از شکل ۴، طرز استفاده از روش نموداری برای جمع بیش از دو بردار — در این مورد $d + e + f$ ، معلوم می‌شود: دم هر بردار را



شکل ۴. (الف) قانون جابه‌جایی جمع برداری: $a + b = b + a$. (ب) قانون شرکت‌پذیری جمع برداری: $d + (e + f) = (d + e) + f$.

را با بردار نشان می‌دهند: مثلاً نیرو، سرعت، شتاب، میدان الکتریکی، و میدان مغناطیسی. بسیاری از قوانین فیزیک را می‌توان، با استفاده از بردار، به شکل جمع‌وجور نوشت. نمایش برداری، عملیات شامل این قوانین را هم اغلب بسیار ساده‌تر می‌کند.

بعضی کمیتها را می‌توان با یک عدد و یک یکا به طور کامل مشخص کرد. چنین کمیتهایی را، که تنها مقدار دارند، اسکالر می‌نامند. از جمله کمیتهای فیزیکی اسکالر، می‌توان از جرم، طول، زمان، چگالی، انرژی، و دما نام برد. با اسکالرها می‌توان طبق قوانین جبر معمولی کار کرد.

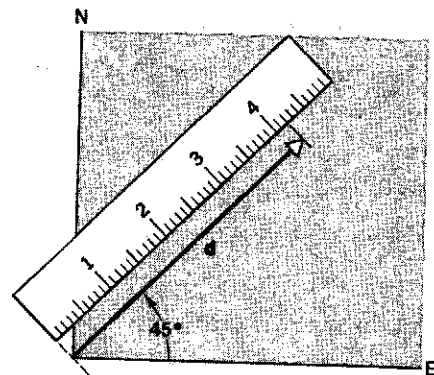
۲-۳ جمع بردارها: روش نموداری

برای نمایش بردار در نمودارها، یک پیکان می‌کشیم. طول پیکان باید متناسب با اندازه بردار باشد (یعنی باید یک مقیاس انتخاب کنیم). راستای خط، راستای بردار است و جهت پیکان هم جهت بردار را مشخص می‌کند. مثلاً جابه‌جایی ۴۲m در جهت شمال شرقی را می‌توان در مقیاس ۱cm به‌ازای ۱۰m ، با پیکانی به طول ۴۲cm نشان داد که با جهت شرق زاویه ۴۵° به طرف بالا می‌سازد. نوک پیکان در انتهای بالای خط است (شکل ۲). بردارها را در متن‌های چاپی معمولاً با حروف سیاه نشان می‌دهند، مثلاً d . در دستنویسها برای مشخص کردن کمیتهای برداری معمولاً یک علامت پیکان بالای نماد آنها می‌گذارند. مثلاً \vec{d} .

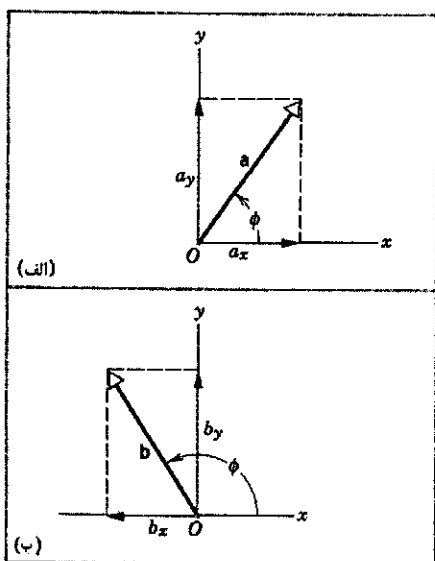
خیلی وقتها فقط اندازه (یا طول) بردار برای ما مهم است نه جهت آن. اندازه d گاهی با $|d|$ نشان داده می‌شود؛ ما در بیشتر موارد، اندازه را با شکل ایتالیک نماد، d ، نشان می‌دهیم. نماد سیاه، هر دو ویژگی بردار، هم اندازه و هم جهت، را نشان می‌دهد. در متون دستنویس، اندازه بردار را معمولاً با نماد بدون پیکان نشان می‌دهند.

اکنون شکل ۳ را در نظر بگیرید که در آن همان بردارهای شکل ۱ ج با اسامی دیگر آورده‌ایم. رابطه بین این بردارها را می‌توان چنین نوشت

$$(۱) \quad a + b = s$$



شکل ۲. بردار d نشان‌دهنده یک جابه‌جایی به اندازه ۴۲m (در مقیاس $۱\text{cm} = ۱۰\text{m}$) در جهت ۴۵° شمال شرقی است.



شکل ۶. (الف) مؤلفه بردار a در جهت محور x ، a_x و مؤلفه آن در جهت محور y ، a_y است. (ب) مؤلفه x بردار b منفی است.

بین 90° و 180° باشد (شکل ۶ب)، مؤلفه x بردار منفی و مؤلفه y آن مثبت خواهد بود. مؤلفه‌های بردار شبیه کمیت‌های اسکالرند: در هر دستگاه مختصات، هر مؤلفه تنها با یک عدد و یک علامت جبری مشخص می‌شود.

بردار a را که به مؤلفه‌های تجزیه شده باشد می‌توانیم با استفاده از خود این مؤلفه‌ها هم مشخص کنیم. در این صورت به جای دو عدد a (اندازه بردار) و ϕ (جهت بردار نسبت به محور x) دو عدد دیگر a_x و a_y را در اختیار داریم. می‌شود از توصیف بردار برحسب مؤلفه‌هایش (a_x و a_y) به توصیف آن برحسب اندازه و جهت (a و ϕ) رسید و بالعکس. این دو توصیف با هم معادل‌اند. با توجه به شکل ۶الف، می‌توانیم a و ϕ را برحسب a_x و a_y به دست بیاوریم:

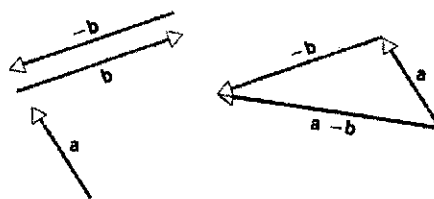
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (۶الف)$$

و

$$\tan \phi = a_y / a_x \quad (۶ب)$$

ربعی که ϕ در آن است از روی علامت a_x و a_y معین می‌شود.

در سه بعد هم، برای به دست آوردن مؤلفه‌ها همین کار را می‌کنیم: کافی است از سر بردار به هر یک از محورهای مختصات x ، y ، و z خطی عمود کنیم. شکل ۷ نموداری است که به کمک آن تشخیص مؤلفه‌ها آسانتر می‌شود. ابتدا مؤلفه (یا تصویر) a را بر صفحه xy به دست می‌آوریم، و بعد مؤلفه‌های a_x و a_y را از تجزیه این بردار تعیین می‌کنیم. البته می‌توانستیم به جای اینکه



شکل ۵. نمایش تفاضل دو بردار: $a - b = a + (-b)$.

روی سر بردار قبلی می‌گذاریم. بردار مجموع، برداری است که از دم بردار اول به سر بردار آخر رسم می‌شود.

با تعریف قرینه بردار (یا منفی بردار)، می‌توان عمل تفریق را هم وارد جبر برداری کرد. قرینه هر بردار، بردار دیگری است با همان طول اما در جهت مخالف. در این صورت، تفاضل دو بردار را این‌طور تعریف می‌کنیم (شکل ۵):

$$a - b = a + (-b) \quad (۴)$$

$-b$ برداری به اندازه بردار b و در خلاف جهت آن است. از معادله ۴ معلوم می‌شود که $a - a = a + (-a) = 0$.

ما برای نشان دادن این عملیات از جابه‌جایی استفاده کردیم، اما به یاد داشته باشید که، این قواعد برای همه کمیت‌های برداری — مثلاً سرعت، یا نیرو — به کار می‌روند.

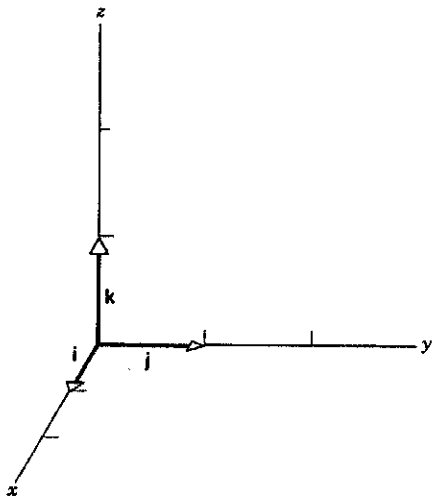
۳-۳ مؤلفه‌های بردار

جمع برداری را با روش نموداری معرفی کردیم، اما این روش برای بردارهای سه‌بعدی چندان مفید نیست و خیلی وقتها حتی در حالت دوبعدی هم مشکلاتی دارد. روش دیگر جمع برداری، روش تحلیلی است. در این روش باید بردار را به مؤلفه‌هایش، نسبت به یک دستگاه مختصات خاص، تجزیه کرد.

شکل ۶الف بردار a را نشان می‌دهد که دم آن روی مبدأ دستگاه مختصات دکارتی است. از سر a دو خط عمود بر محورهای مختصات می‌کشیم. کمیت‌های a_x و a_y را، که به این ترتیب به دست می‌آیند، مؤلفه‌های (دکارتی) بردار a می‌نامند. هم این کار تجزیه بردار به مؤلفه‌هایش است. این مؤلفه‌ها، بردار a را به‌طور کامل و یکتا مشخص می‌کنند: با داشتن a_x و a_y ، به راحتی می‌شود بردار a را بازسازی کرد. مؤلفه‌های بردار می‌توانند مثبت، منفی، یا صفر باشند. شکل ۶ب بردار b را نشان می‌دهد که برای آن $b_x < 0$ و $b_y > 0$ است. روشن است که a_x و a_y از روابط زیر به دست می‌آیند:

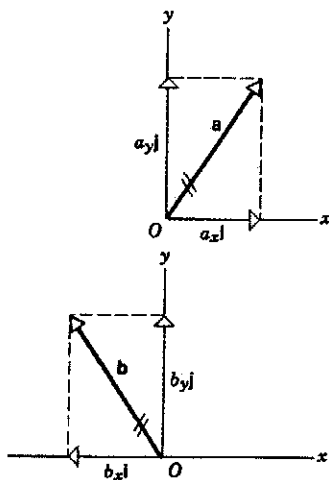
$$a_x = a \cos \phi \quad \text{و} \quad a_y = a \sin \phi \quad (۵)$$

در این روابط، ϕ زاویه‌ای است که بردار a با جهت مثبت محور x می‌سازد؛ این زاویه در جهت پاد ساعتگرد اندازه‌گیری می‌شود. چنانکه از شکل ۶ دیده می‌شود، علامت جبری مؤلفه‌های بردار بستگی به این دارد که زاویه ϕ در کدام ربع صفحه مختصات باشد. مثلاً، اگر ϕ

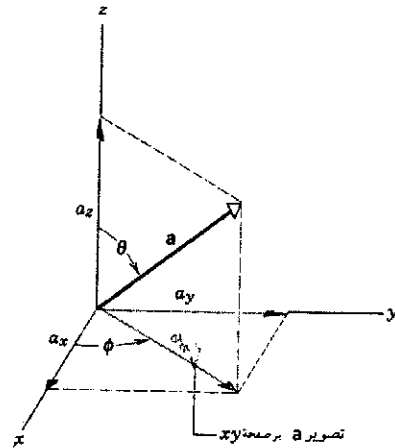


شکل ۸. بردارهای یکه i ، j ، و k ، که به ترتیب برای مشخص کردن جهت مثبت محورهای x ، y ، و z به کار می‌روند. این بردارها بدون بعدند و طولشان یک است.

معادله برداری ۸ با روابط اسکالر معادله ۶ هم‌ارز است. هر دو معادله، بردار (a, ϕ) یا (a, ϕ) را به مؤلفه‌هایش $(a_x$ و $a_y)$ مربوط می‌کنند. گاهی کمیت‌های a_x و a_y در معادله ۸ با مؤلفه‌های برداری a می‌نامیم. شکل ۹ بردارهای a و b شکل ۶ را برحسب مؤلفه‌های برداریشان نشان می‌دهد. با استفاده از مؤلفه‌های بردار به جای خود بردار، خیلی از مسائل فیزیک ساده می‌شوند. به این معنی که اثر یک کمیت برداری را می‌توان با اثر مؤلفه‌های برداری آن معادل گرفت. در آینده، هر جا لازم باشد، صریحاً به مؤلفه‌های برداری اشاره می‌کنیم؛ هر جا که واژه مؤلفه را به



شکل ۹. مؤلفه‌های برداری a و b . در همه مسائل فیزیکی مربوط به بردارها، می‌توان خود بردار، مثلاً a ، یا دو مؤلفه برداری آن، $a_x i$ و $a_y j$ را به کار برد؛ نتیجه یکی است. اثر بردار a با اثر خالص دو بردار $a_x i$ و $a_y j$ معادل است. وقتی به جای یک بردار از مؤلفه‌هایش استفاده می‌کنیم، خوب است یک خط دو تایی، روی خود بردار بزنیم تا یادمان باشد که دوباره آن را به حساب نیاوریم.



شکل ۷. بردار سه‌بعدی a ، با مؤلفه‌های a_x ، a_y ، و a_z . مؤلفه‌های x و y را معمولاً از روی تصویر a بر صفحه xy به دست می‌آورند. زاویه θ بین a و محور z را زاویه قطبی می‌نامند. زاویه ϕ در صفحه xy ، بین تصویر a و محور x ، زاویه سمتی نامیده می‌شود. (زاویه سمتی ϕ در اینجا هم همان مشخصاتی را دارد که در شکل ۶ داشت).

با تصویر a در صفحه xy کار کنیم، مستقیماً خود a را روی سه محور تصویر کنیم، و دقیقاً همان مؤلفه‌ها را به دست بیاوریم، اما نمایش این کار در صفحه، به خوبی حالت قبل ممکن نیست. از روابط هندسی شکل ۷، مؤلفه‌های بردار a به صورت زیر به دست می‌آیند

$$\begin{aligned} a_x &= a \sin \theta \cos \phi, & a_y &= a \sin \theta \sin \phi, \\ a_z &= a \cos \theta \end{aligned} \quad (7)$$

در تجزیه بردار به مؤلفه‌هایش، گاهی مفید است که برداری به طول یک در جهتی معین تعریف کنیم. اغلب راحت‌تر است که بردارهای یکه را در جهت محورهای دستگاه خاصی که به کار می‌بریم بگیریم. در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه در جهت مثبت x ، y ، و z را معمولاً، به ترتیب، با i ، j ، و k نمایش می‌دهند (شکل ۸). در نمادگذاری دستی، بردارهای یکه را معمولاً با "کلاه" مثل \hat{i} ، \hat{j} ، و \hat{k} مشخص می‌کنند.

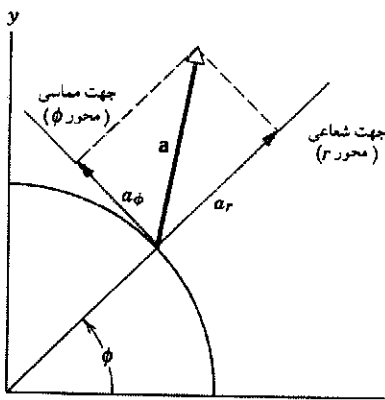
دقت کنید که لازم نیست i ، j ، و k در مبدأ باشند. اینها را هم، مثل بردارهای دیگر، می‌توانیم به هر کجای فضای مختصات که بخواهیم منتقل کنیم؛ تنها کافی است که جهتشان نسبت به محورهای مختصات تغییر نکند.

در حالت کلی، هر بردار a را در دستگاه مختصات سه‌بعدی می‌توان برحسب مؤلفه‌هایش و بردارهای یکه نوشت:

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (\text{الف})$$

در دو بعد

$$a = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} \quad (\text{ب})$$



شکل ۱۱. تجزیه بردار a به مؤلفه‌های شعاعی و مماسی. این مؤلفه‌ها کاربرد زیادی در بررسی حرکت دایره‌ای (فصلهای ۴ و ۱۱) دارند.

تعمیمهای سه‌بعدی شکل ۱۱ (مختصات استوانه‌ای یا کروی)، در تحلیل بسیاری از موارد مهم فیزیکی، برتری چشمگیری بر دستگاه مختصات دکارتی دارند. مثلاً نیروی گرانشی زمین که بر اجسام دور وارد می‌شود تقارن کروی دارد. بنابراین، توصیف خواص آن در مختصات کروی بسیار ساده‌تر است. نیروی مغناطیسی حاصل از سیمهای بلند و راست حامل جریان تقارن استوانه‌ای دارد. پس، توصیف آن در مختصات استوانه‌ای ساده‌تر می‌شود.

۳-۴ جمع بردارها: روش مؤلفه‌ای

دیدیم که چگونه بردارها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم. اکنون جمع برداری را با یک روش تحلیلی بررسی می‌کنیم. فرض کنید که s جمع بردارهای a و b باشد:

$$s = a + b \quad (۹)$$

اگر دو بردار، مثل s و $a + b$ ، با هم برابر باشند، باید اندازه‌شان یکی باشد و در یک جهت باشند. چنین چیزی تنها وقتی ممکن است که مؤلفه‌های متناظر آنها یکسان باشد. بر این نتیجه‌گیری مهم تأکید می‌کنیم:

دو بردار فقط به شرطی با هم برابرند که مؤلفه‌های نظیرشان با هم برابر باشند.

در مورد بردارهای معادله ۹، می‌توان چنین نوشت

$$\begin{aligned} s_x \mathbf{i} + s_y \mathbf{j} &= a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} \\ &= (a_x + b_x) \mathbf{i} + (a_y + b_y) \mathbf{j} \end{aligned} \quad (۱۰)$$

از برابر گرفتن مؤلفه‌های x در دو طرف معادله ۱۰ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x \quad (۱۱الف)$$

و برای مؤلفه‌های y نتیجه می‌شود که

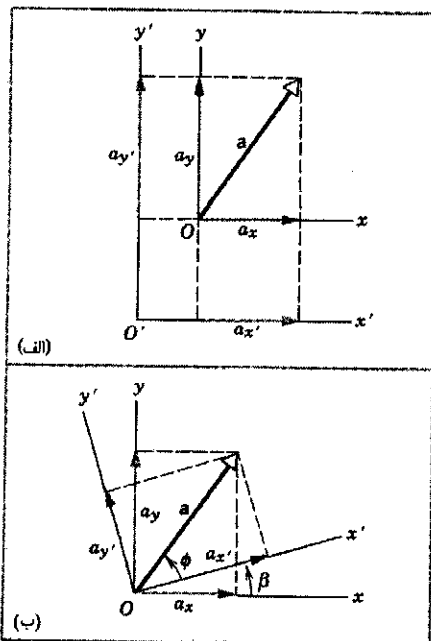
$$s_y = a_y + b_y \quad (۱۱ب)$$

تنهایی به کار ببریم، منظورمان کمیت‌های اسکالری از نوع a_x و a_y است.

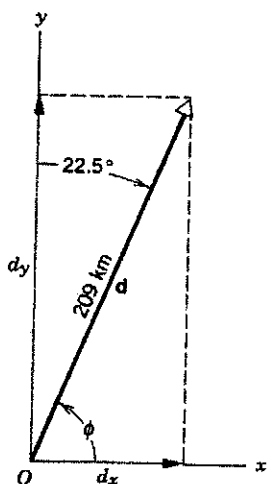
دستگاه‌های مختصات دیگر (اختیاری)

دستگاه‌های مختصات دیگری هم هستند که ممکن است برای تحلیل شرایط فیزیکی معینی مفید باشند. مثلاً دستگاه مختصات دویبعدی xy را می‌توان به دو طریق تغییر داد: (۱) می‌توان مبدأ دستگاه مختصات را به محل دیگری در صفحه xy منتقل کرد که به این کار می‌گویند انتقال دستگاه مختصات، یا (۲) می‌توان محورهای xy را حول مبدأ ثابت چرخاند، که عبارت است از دوران دستگاه مختصات. در هر مورد، بردار را ثابت نگه می‌داریم و محورهای مختصات را تغییر می‌دهیم. شکل ۱۰ اثر این دو تغییر را نشان می‌دهد. مؤلفه‌ها در مورد اول (شکل ۱۰الف) تغییر نمی‌کنند، اما در مورد دوم (شکل ۱۰ب) تغییر می‌کنند.

در شرایطی که وضعیت فیزیکی مورد نظر، تقارن خاصی دارد، شاید بهتر باشد دستگاه مختصات دیگری برای تجزیه بردار به مؤلفه‌هایش انتخاب کنیم. مثلاً می‌شود جهت‌های شعاعی و مماسی دستگاه مختصات قطبی را انتخاب کرد؛ شکل ۱۱. در این مورد هم، مؤلفه‌های روی هر محور را درست شبیه به دستگاه xyz معمولی به دست می‌آوریم؛ یعنی از سر بردار به هر محور خطی عمود می‌کنیم.



شکل ۱۰. (الف) مبدأ دستگاه مختصات شکل ۱۰الف به نقطه O' رفته یا منتقل شده است. مؤلفه‌های x و y بردار a با مؤلفه‌های x' و y' آن برابرند. (ب) محورهای x و y به اندازه زاویه β چرخیده‌اند. مؤلفه‌های x' و y' با مؤلفه‌های x و y متفاوت‌اند (دقت کنید که مؤلفه y' در این مورد از مؤلفه x' کوچکتر است، در حالی که در شکل ۱۰الف مؤلفه y از مؤلفه x بزرگتر بود). اما بردار a عوض نشده است. محورهای مختصات را به اندازه چه زاویه‌ای باید چرخاند تا مؤلفه y' صفر شود؟



شکل ۱۲. مثال ۱.

مجموعه این دو معادله جبری با تک رابطه برداری معادله ۹ هم ارز است.

به جای مشخص کردن مؤلفه های s ، می توان طول و جهت آن را مشخص کرد:

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} \quad (الف ۱۲)$$

و

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{a_y + b_y}{a_x + b_x} \quad (ب ۱۲)$$

قاعده جمع برداری با این روش از این قرار است. (۶) هر بردار را به مؤلفه هایش تجزیه می کنیم و علامت جبری هر مؤلفه را هم در نظر می گیریم. (۲) مؤلفه های مربوط به هر محور را، با در نظر گرفتن علامت جبری شان، با هم جمع می کنیم. (۳) مجموعه هایی که به این ترتیب حاصل می شوند، مؤلفه های بردار مجموع اند. با داشتن مؤلفه های بردار مجموع، به راحتی می شود آن را در فضا بازسازی کرد.

جمع کردن بردارها با روش تجزیه به مؤلفه ها (به جای جمع مستقیم خود بردار با استفاده از روابط مثلثاتی) این مزیت را دارد که در آن همیشه با مثلثهای قائم الزاویه سروکار داریم، و این محاسبات را ساده می کند.

در جمع برداری به روش مؤلفه ای، با انتخاب به جای محورهای مختصات می توان کار را ساده تر کرد. بعضی وقتها، مؤلفه های بردار را نسبت به یک دسته محورهای خاص از همان ابتدا می دانیم؛ در این صورت، محورهایی که باید انتخاب کرد واضح است. در موارد دیگر با انتخاب معقول محورها می توانیم کار تجزیه بردار به مؤلفه ها را بسیار راحت تر کنیم. مثلاً محورها را می توان چنان انتخاب کرد که لااقل یکی از بردارها با یک محور موازی باشد؛ در این صورت، مؤلفه های آن بردار در راستای محورهای دیگر صفر می شوند.

مثال ۱. هواپیمایی ۲۰۹ km روی خط راستی در جهت 22.5° شرقی نسبت به شمال می بیند. این هواپیما از مبدأ خود چقدر به شمال و چقدر به شرق رفته است؟

حل: جهت مثبت محور x را جهت شرق و جهت مثبت محور y را جهت شمال اختیار می کنیم. بردار جابه جایی (شکل ۱۲) یا از مبدأ (نقطه شروع)، با زاویه 22.5° نسبت به محور y (شمال) متمایل به جهت مثبت محور x (شرق) می کشیم. طول بردار، اندازه 209 km را نشان می دهد. این بردار را d می نامیم؛ d_x مسافت پیموده شده به طرف شرق و d_y مسافت پیموده شده به طرف شمال است. داریم

$$\phi = 90^\circ - 22.5^\circ = 67.5^\circ$$

بنابراین (از معادله ۵)

$$s_x = a_x + b_x = 32 \text{ km} + 0 = 32 \text{ km}$$

$$s_y = a_y + b_y = 0 + 47 \text{ km} = 47 \text{ km}.$$

$$d_x = d \cos \phi = (209 \text{ km})(\cos 67.5^\circ) = 80.0 \text{ km}$$

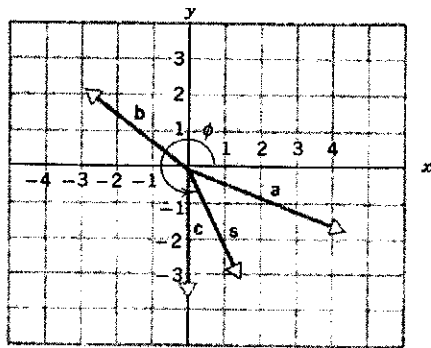
و

$$d_y = d \sin \phi = (209 \text{ km})(\sin 67.5^\circ) = 193 \text{ km}$$

در این مثال مؤلفه های دکارتی را به کار بردیم، گرچه سطح زمین خمیده است و نمی تواند دکارتی باشد. مثلاً هواپیمایی که از استوا جهت شمال شرقی شروع به پرواز کند، سرانجام به نقطه ای می رسد که در شمال نقطه شروع حرکت است؛ چنین چیزی هرگز نمی تواند در دستگاههای مختصات تخت رخ بدهد. به همین ترتیب، دو هواپیما که از دو نقطه متفاوت روی استوا، همزمان با سرعت یکسان، به طرف شمال (در مسیری موازی با هم) پرواز کنند، سرانجام در قطب شمال به هم برمی خورند. این هم در دستگاههای مختصات تخت غیر ممکن است. اما اگر محاسبات ما محدود به فواصلی باشد که در مقایسه با شعاع زمین (6400 km) کوچک اند، با خیال آسوده می توانیم مختصات دکارتی را برای تحلیل جابه جاییهای روی سطح زمین به کار ببریم.

مثال ۲. اتومبیلی در یک جاده تخت 32 km به طرف شرق می رود. سپس در یک تقاطع به سوی شمال می پیچد و 47 km در آن جهت طی می کند. جابه جایی کل این اتومبیل را پیدا کنید.

حل: یک دستگاه مختصات ثابت نسبت به زمین اختیار می کنیم. جهت مثبت x آن را به طرف شرق، و جهت مثبت y آن را به طرف شمال می گیریم. شکل ۱۳، دو جابه جایی متوالی a و b را نشان می دهد. جابه جایی کل s ، از $s = a + b$ به دست می آید. چون b در راستای x و a در راستای y مؤلفه ای ندارند، از معادلات ۱۱ نتیجه می شود که

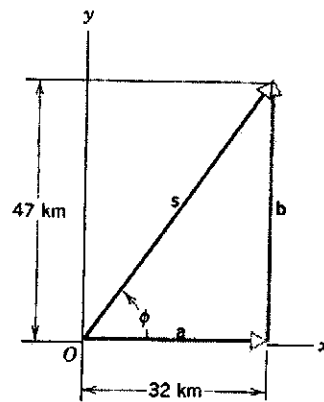


شکل ۱۴. مثال ۳.

معلوم می‌شود که اندازه s برابر با ۳٫۴ است و زاویه phi که s با جهت مثبت x می‌سازد عبارت است از

$$\phi = \tan^{-1}(-3.1/1.4) = 294^\circ$$

که پادساعتگرد از جهت +x اندازه‌گیری می‌شود. خیلی از ماشین حسابهای جیبی، جواب arctan را بین $+90^\circ$ و -90° می‌دهند. مثلاً در مورد این مثال 66° (از ماشین حساب) به دست می‌آید که می‌دانیم با 294° هم‌ارز است. اما توجه کنید که اگر می‌خواستیم $\tan^{-1}(3.1/-1.4)$ را حساب کنیم باز هم همین جواب را می‌گرفتیم، در حالی که باید زاویه‌ای در ربع دوم به دست بیاوریم. در این نوع مسائل اگر شکلی نظیر شکل ۱۴ بکشیم جلوی اشتباه گرفته می‌شود، و در صورت لزوم می‌توانیم مقدار حاصل از ماشین حساب را، با استفاده از اتحاد $\tan(-\phi) = \tan(180^\circ - \phi)$ ، به زاویه‌ای تبدیل کنیم که در ربع درست واقع شده است.



شکل ۱۳. مثال ۲.

به این ترتیب، اندازه و جهت s (از معادله ۱۲) عبارت است از

$$s = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{(32\text{km})^2 + (47\text{km})^2} = 57\text{km}$$

$$\tan \phi = \frac{s_y}{s_x} = \frac{47\text{km}}{32\text{km}} = 1.47, \quad \phi = \tan^{-1}(1.47) = 56^\circ$$

پس، اندازه بردار جابه‌جایی کل برابر با ۵۷km، و جهت آن 56° به طرف شمال شرق است.

مثال ۳. سه بردار که در یک صفحه واقع شده‌اند، در یک دستگاه مختصات دکارتی عبارت‌اند از

$$\mathbf{a} = 4.3\mathbf{i} - 1.7\mathbf{j}$$

$$\mathbf{b} = -2.9\mathbf{i} + 2.2\mathbf{j}$$

$$\mathbf{c} = -3.6\mathbf{j}$$

۳-۵ ضرب بردارها

وقتی کمیت‌های اسکالر را با هم جمع می‌کنیم، همه آنها باید ابعاد یکسانی داشته باشند، و بعد حاصل جمع آنها هم همان خواهد بود. این قاعده در جمع برداری هم هست. اما می‌شود کمیت‌های اسکالر با ابعاد متفاوت را در هم ضرب کرد، و حاصلی به دست آورد که ابعاد آن (یعنی حاصل ضرب ابعاد عوامل ضرب) با ابعاد هر یک از عوامل اولیه تفاوت دارد؛ مثلاً فاصله = سرعت \times زمان.

مثل اسکالرها، بردارهایی از انواع متفاوت را هم می‌توان در هم ضرب کرد و کمیتی با بعد جدید به دست آورد. چون بردار علاوه بر اندازه جهت هم دارد، ضرب بردارها نمی‌تواند دقیقاً مثل ضرب اسکالرها باشد. برای ضرب بردارها باید قواعد دیگری داشته باشیم.

سه نوع عمل ضرب برای بردارها تعریف می‌کنیم: (۱) ضرب اسکالر در بردار، (۲) ضرب دو بردار در هم، چنانکه حاصل ضرب اسکالر باشد. و (۳) ضرب دو بردار در هم، چنانکه حاصل ضرب هم بردار باشد. امکانات دیگری هم وجود دارد که در اینجا بررسی نمی‌کنیم.

یکای مؤلفه‌ها یکسان است. بردار برآیند s، یعنی جمع این سه بردار را پیدا کنید.

حل: معادلات ۱۱ را به مورد سه بردار تعمیم می‌دهیم؛ نتیجه می‌شود که

$$s_x = a_x + b_x + c_x = 4.3 - 2.9 + 0 = 1.4$$

$$s_y = a_y + b_y + c_y = -1.7 + 2.2 - 3.6 = -3.1$$

بنابراین

$$\mathbf{s} = s_x\mathbf{i} + s_y\mathbf{j} = 1.4\mathbf{i} - 3.1\mathbf{j}$$

شکل ۱۴ همه این بردارها را نشان می‌دهد. با استفاده از معادلات ۶

اما چنین چیزی در فیزیک به درد نمی‌خورد. با تعریف معمول ضرب اسکالر، خیلی از کمیت‌های مهم فیزیکی را می‌توانیم برحسب حاصل ضرب اسکالر دو بردار بیان کنیم، از جمله کار مکانیکی، انرژی پتانسیل گرانشی، پتانسیل الکتریکی، توان الکتریکی، و چگالی انرژی الکترومغناطیسی را در فصل‌های بعدی همین کتاب، این کمیت‌ها را برحسب همین حاصل ضرب تعریف خواهیم کرد.

اگر دو بردار برهم عمود باشند، حاصل ضرب نقطه‌ای آنها صفر می‌شود. با استفاده از تعریف ضرب نقطه‌ای، می‌توان روابط زیر را برای بردارهای یک‌دکارتی \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} به دست آورد:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 \end{aligned} \quad (14)$$

با استفاده از این روابط، حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} را در دستگاه مختصات سه‌بعدی xyz می‌توانیم برحسب مؤلفه‌های این دو بردار بنویسیم (مسئله ۳۵):

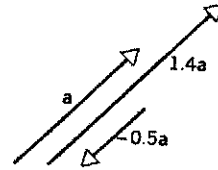
$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (15)$$

۳. ضرب دو بردار با حاصل بردار. حاصل ضرب برداری^۲ دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، که به صورت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ نشان داده می‌شود، بردار \mathbf{c} است، $(\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ چنانکه اندازه آن، طبق تعریف، برابر است با

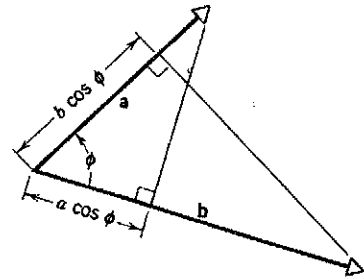
$$c = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \phi \quad (16)$$

که ϕ زاویه (کوچک) بین \mathbf{a} و \mathbf{b} است. البته \mathbf{a} و \mathbf{b} با هم دو زاویه متفاوت می‌سازند: یکی ϕ (شکل ۱۶) و دیگری $2\pi - \phi$ ، در عملیات برداری همیشه زاویه کوچکتر را انتخاب می‌کنیم. برای حاصل ضرب اسکالر (معادله ۱۳) فرقی نمی‌کند که کدام بردار را انتخاب کنیم، چون $\cos(2\pi - \phi) = \cos \phi$ است. اما در معادله ۱۶ فرقی می‌کند، چون $\sin(2\pi - \phi) = -\sin \phi$ است.

راستای \mathbf{c} ، حاصل ضرب برداری \mathbf{a} و \mathbf{b} ، طبق تعریف بر صفحه متشکل از \mathbf{a} و \mathbf{b} عمود است. برای تعیین جهت بردار \mathbf{c} از "قاعده دست راست" (شکل ۱۷) استفاده می‌کنیم. (دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} بکشید که دم آنها روی هم باشد و محوری در نظر بگیرید که از مبدأ \mathbf{a} و \mathbf{b} بگذرد و بر صفحه آنها عمود باشد. انگشتان دست راست را دور این محور بیچید و بردار \mathbf{a} را، از طریق زاویه کوچکتر بین \mathbf{a} و \mathbf{b} ، با نوک انگشتان به طرف بردار \mathbf{b} بچرخانید؛ در این عمل شست را کشیده نگه دارید. جهت شست، جهت حاصل ضرب برداری $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را نشان می‌دهد. این دستورالعمل، یک قرارداد است. دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} یک صفحه تشکیل می‌دهند؛ دو جهت (مخالف) برای بردار \mathbf{c} عمود بر این صفحه وجود دارد. انتخاب ما بر اساس قرارداد دست راست



شکل ۱۵. ضرب اسکالر c در بردار \mathbf{a} ، بردار $c\mathbf{a}$ را می‌دهد که اندازه آن $|c|$ برابر اندازه \mathbf{a} است. جهت $c\mathbf{a}$ همان جهت \mathbf{a} است اگر c مثبت باشد، و خلاف جهت \mathbf{a} است اگر c منفی باشد. در این شکل $c = +1.4$ و $c = -0.5$ مثال زده شده است.



شکل ۱۶. حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ (یعنی $ab \cos \phi$) در واقع حاصل ضرب اندازه یک بردار (مثلاً \mathbf{a}) و مؤلفه بردار دیگر در جهت بردار اولی ($b \cos \phi$) است.

۱. ضرب اسکالر در بردار. معنی ضرب اسکالر در بردار ساده است: حاصل ضرب اسکالر c در بردار \mathbf{a} ، که با $c\mathbf{a}$ نشان می‌دهیم، طبق تعریف، برداری است که اندازه آن $|c|$ برابر اندازه بردار \mathbf{a} است. جهت $c\mathbf{a}$ همان جهت \mathbf{a} است اگر c مثبت باشد، و در خلاف جهت \mathbf{a} است اگر c منفی باشد (شکل ۱۵). برای تقسیم بردار بر اسکالر، در واقع بردار را در معکوس آن اسکالر ضرب می‌کنیم. اغلب، اسکالر مورد نظر یک عدد خالص نیست، بلکه کمیتی فیزیکی است که بعد و یکا دارد.

۲. ضرب دو بردار با حاصل اسکالر. حاصل ضرب اسکالر^۱ دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، که با $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ نشان می‌دهیم، طبق تعریف برابر است با

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi \quad (13)$$

که در آن، a اندازه بردار \mathbf{a} ، b اندازه بردار \mathbf{b} ، و $\cos \phi$ کسینوس زاویه بین دو بردار است (شکل ۱۶). به خاطر نقطه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} ، این ضرب را ضرب نقطه‌ای \mathbf{a} و \mathbf{b} نیز می‌نامند و آن را "نقطه \mathbf{a} " می‌خوانند. حاصل ضرب نقطه‌ای مستقل از دستگاه مختصاتی است که انتخاب می‌شوند.

چون \mathbf{a} و \mathbf{b} اسکالرند و $\cos \phi$ عددی خالص است، حاصل ضرب اسکالر دو بردار هم اسکالر است. حاصل ضرب اسکالر دو بردار را می‌توان حاصل ضرب اندازه یک بردار در مؤلفه بردار دوم در جهت اولی در نظر گرفت، شکل ۱۶؛ پس این حاصل ضرب را می‌توان به صورت $a(b \cos \phi)$ یا به صورت $b(a \cos \phi)$ بیان کرد.

می‌توانستیم $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ را هر چیزی $b(a \cos \phi)$ یا $a(b \cos \phi)$ بنویسیم.

۱. به این ضرب "ضرب داخلی" هم می‌گویند. (ا)

۲. به این ضرب "ضرب خارجی" هم می‌گویند. (ب)

و متفاوت، می شود نشان داد (مسئله ۳۶) که

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z)\mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x)\mathbf{k} \quad (17)$$

علت اینکه حاصل ضرب برداری را این طور تعریف می کنیم آن است که چنین تعریفی در فیزیک مفید است. در فیزیک اغلب به کمیت هایی برمی خوریم که بردارند و حاصل ضرب برداری آنها، با تعریف بالا، معنی فیزیکی مهمی دارد. از جمله کمیت هایی که حاصل ضرب برداری اند می توانیم از گشتاور، تکانه زاویه ای، نیروی وارد بر بارهای متحرک در میدان مغناطیسی، و شار انرژی الکترومغناطیسی را نام ببریم. بعداً که این کمیتها را بررسی می کنیم، ارتباطشان با حاصل ضرب خارجی دو بردار را هم مشخص خواهیم کرد.

حاصل ضربهای تعمیم یافته بردارها (اختیاری)

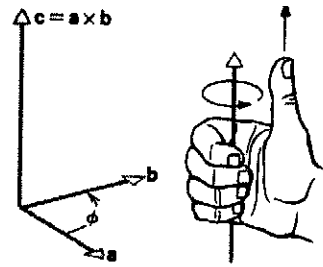
حاصل ضرب اسکالر، ساده ترین حاصل ضرب دو بردار است. ترتیب عوامل بر این حاصل ضرب اثری ندارد. حاصل ضرب برداری در ردیف بعدی است. در این مورد ترتیب عوامل بر حاصل ضرب مؤثر است، اما این تأثیر تنها به صورت یک منهای یک است؛ اگر ترتیب عوامل را عوض کنیم، جهت حاصل ضرب هم عوض می شود. حاصل ضربهای مفید دیگری هم برای بردارها داریم که البته پیچیده ترند. مثلاً با ضرب هر یک از سه مؤلفه یک بردار در سه مؤلفه برداری دیگر، می شود یک تانسور ساخت. به این ترتیب تانسور (از رتبه دو) با ۹ عنصر، بردار با سه عنصر، و اسکالر با یک عنصر مشخص می شوند. تنش مکانیکی، لختی دورانی، و کرنش از جمله کمیت های فیزیکی اند که می توانیم آنها را با تانسور نمایش بدهیم. البته کمیت های پیچیده تر از این هم می توانند در کار باشند، اما در این کتاب فقط با اسکالر و بردار سروکار خواهیم داشت.

مثال ۴. بردار \mathbf{a} در صفحه xy در جهت 25° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x قرار دارد و اندازه آن 7.4 واحد است. اندازه بردار \mathbf{b} برابر با 5° واحد، و جهت آن جهت مثبت محور z است. (الف) حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ و (ب) حاصل ضرب برداری $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را به دست بیاورید.

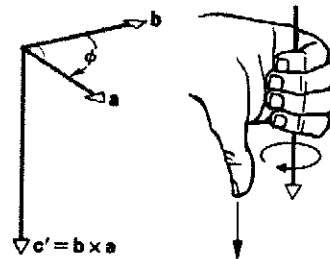
حل: (الف) چون \mathbf{a} و \mathbf{b} برهم عمودند، زاویه ϕ بین آنها 90° ، و $\cos \phi = \cos 90^\circ = 0$ است. بنابراین، از معادله ۱۳، حاصل ضرب اسکالر برابر است با

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab \cos \phi = ab \cos 90^\circ = (7.4)(5)(0) = 0$$

که با این امر که هیچ یک از این دو بردار، مؤلفه ای در راستای بردار دیگر ندارد.



(الف)



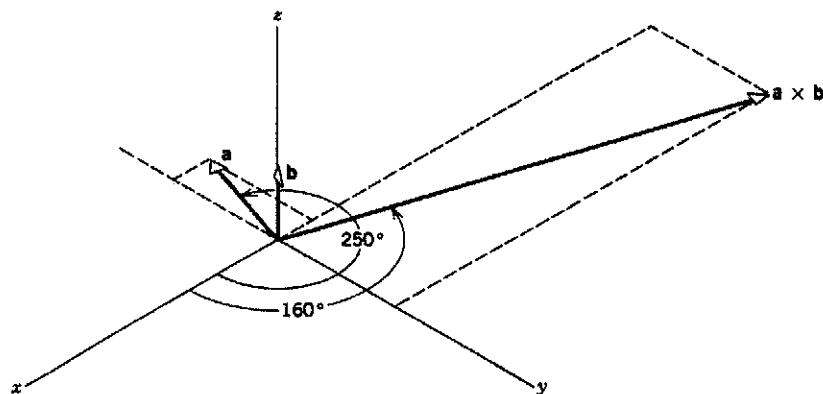
(ب)

شکل ۱۷. قاعده دست راست برای حاصل ضرب برداری. (الف) بردار \mathbf{a} را با انگشت های دست راست بچرخانید تا روی \mathbf{b} بیفتد. شست شما جهت \mathbf{c} را نشان می دهد. (ب) با عکس این عمل (چرخاندن \mathbf{b} به سمت \mathbf{a}) معلوم می شود که $(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

است. (قرارداد دست چپ، برای حاصل ضرب برداری جهتی مخالف جهت بالا می دهد.)

اگر ϕ برابر با 90° باشد، \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} (یعنی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$)، بر هم عمودند و جهت های یک دستگاه مختصات قائم سه بعدی را مشخص می کنند. دقت کنید که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ با $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ فرق دارد، یعنی ترتیب عوامل در حاصل ضرب برداری مهم است. در حاصل ضرب اسکالر چنین نیست، زیرا ترتیب عوامل در جبر یا حساب اثری بر حاصل ضرب ندارد. در واقع، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$ است (شکل ۱۷). این را از اینجا می توان فهمید که $ab \sin \phi$ با $ba \sin \phi$ برابر است، اما جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بر خلاف جهت $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ است. حاصل ضرب برداری هم، با توجه به تعریف بالا، مستقل از محورهای مختصاتی است که انتخاب می کنیم.

سه بردار یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} در یک دستگاه مختصات راستگرد با رابطه $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ به هم مربوط می شوند. (در واقع، به همین ترتیب است که مقصود از دستگاه راستگرد تعریف می شود. ما همواره از دستگاه مختصات راستگرد استفاده می کنیم، مگر آنکه خلاف آن را ذکر کنیم.) با حفظ ترتیب دوری \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} ، می توانیم روابط $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$ و $\mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}$ را هم بنویسیم. اگر ترتیب دوری را عوض کنیم، یک علامت منفی وارد می شود، مثلاً $\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$. حاصل ضرب برداری دو بردار یکه یکسال صفر است ($\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = 0$)؛ در واقع، حاصل ضرب هر بردار در خودش صفر است ($\mathbf{a} \times \mathbf{a} = 0$). با استفاده از این روابط برای حاصل ضرب برداری بردارهای یکه یکسان



شکل ۱۸. مثال ۴.

در روابط بالا، β زاویه چرخش دستگاه جدید نسبت به دستگاه قدیم است.

معادلات ۱۸ مثالی از معادلات تبدیل‌اند، که مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی در یک دستگاه مختصات را به مؤلفه‌های آن در هر دستگاه دوران‌یافته تبدیل می‌کنند. با استفاده از این معادلات می‌شود تعریفی عام‌تر و دقیق‌تر برای بردار ارائه کرد. تا اینجا بردار را کمیتی فیزیکی تعریف کردیم که هم اندازه دارد و هم جهت، و عملیات با آن تابع قواعد خاصی است. اکنون، به جای این تعریف، تعریف مشخص‌تری ارائه می‌کنیم:

هر کمیت فیزیکی (مثلاً سرعت یا نیرو) را می‌توان با بردار نشان داد. اگر مؤلفه‌های آن، تحت دوران، طبق قواعد معادلات ۱۸ تبدیل شوند.

معادلات ۱۸ برای بردارهای فضای دوبعدی‌اند، اما می‌شود آنها را به سه بعد هم تعمیم داد. در هر حال همین مورد دوبعدی برای نشان دادن همه مفاهیم اساسی کافی است.

چنانکه از شکل ۱۰ معلوم است، بردارها در اثر انتقال یا دوران محورهای مختصات تغییر نمی‌کنند یا ناورد می‌مانند. کمیت‌های فیزیکی معینی هستند که این خاصیت را دارند؛ مثلاً در مورد سرعت، شما و دوستان، که در خانه‌ای در آن طرف خیابان است، هر دو یک سرعت برای اتومبیلی که از خیابان می‌گذرد به دست می‌آورید. (البته تا وقتی که خانه‌های شما نسبت به هم ساکن باشند!) کمیت‌هایی که چنین خواصی دارند، و از قواعد حساب برداری این فصل پیروی می‌کنند، با بردار نشان داده می‌شوند. از جمله این کمیت‌ها می‌توان از سرعت، شتاب، نیرو، تکانه خطی، تکانه زاویه‌ای، و میدانهای الکتریکی و مغناطیسی نام برد. معادلاتی که این کمیت‌ها را به هم مربوط می‌کنند معادلات برداری‌اند؛ مثلاً $a \cdot b = s$ (اسکالر است)، $a + 2b = 6c$ ، $a \times b = c$ ، و غیره. خیلی از کمیت‌های فیزیکی هم با اسکالر و معادلات اسکالر توصیف می‌شوند، مثلاً دما، فشار، جرم، انرژی، و زمان. یکی از ویژگی‌های معادلات برداری آن است که بین کمیت‌های فیزیکی، نه تنها روابط ریاضی بلکه روابط هندسی هم برقرار می‌کنند.

۱. حذف ابرخس لطمه‌ها، به پیوستگی مطالب این فصل نمی‌زند.

(ب) اندازه حاصل ضرب برداری از معادله ۱۶ به دست می‌آید:

$$|a \times b| = ab \sin \phi = (7.4)(5.0) \sin 90^\circ = 37$$

جهت حاصل ضرب برداری بر صفحه متشکل از a و b عمود است. بنابراین، چنانکه در شکل ۱۸ نشان داده شده است، بردار حاصل ضرب در صفحه xy (عمود بر b)، و با زاویه $160^\circ - 90^\circ = 25^\circ$ نسبت به جهت مثبت محور x واقع است (عمود بر a و طبق قاعده دست راست).

با استفاده از معادله ۱۷ می‌شود مؤلفه‌های $a \times b$ را به دست آورد. ابتدا باید مؤلفه‌های a و b را پیدا کنیم:

$$\begin{aligned} a_x &= 7.4 \cos 25^\circ = -2.5 & b_x &= 0 \\ a_y &= 7.4 \sin 25^\circ = -7.0 & b_y &= 0 \\ a_z &= 0 & b_z &= 5.0 \end{aligned}$$

پس خواهیم داشت

$$\begin{aligned} a \times b &= [(-7.0)(5.0) - (0)(0)]i \\ &\quad + [(0)(0) - (-2.5)(5.0)]j \\ &\quad + [(-2.5)(0) - (-7.0)(0)]k \\ &= -35i + 12.5j \end{aligned}$$

که با اندازه و جهت بردار حاصل ضرب در شکل ۱۸ سازگار است.

۳-۶ قوانین برداری در فیزیک^۱ (اختیاری)

شکل ۱۰ ب را در نظر بگیرید؛ می‌شود نشان داد (موضوع مسئله ۵۱) که رابطه مؤلفه‌های بردار جابه‌جایی a در دستگاه دوران‌یافته $(x'y')$ با مؤلفه‌های همین بردار در دستگاه اصلی (xy) به صورت زیر است:

$$a_{x'} = a_x \cos \beta + a_y \sin \beta \quad (18\text{الف})$$

$$a_{y'} = -a_x \sin \beta + a_y \cos \beta \quad (18\text{ب})$$

کنیم، که یکی نسبت به دیگری چرخیده باشد، البته معلوم می‌شود که مؤلفه‌های بردارهای \mathbf{F} (نیرو)، \mathbf{v} (سرعت)، و \mathbf{B} (میدان مغناطیسی) در دو دستگاه متفاوت‌اند (شکل ۱۰ ب). اما ناظرهای هر دو دستگاه این قانون فیزیکی را به شکل واحدی می‌بینند. یعنی در دستگاه چرخیده هم، بردارهای تبدیل‌یافته در رابطه $\mathbf{F}' = q\mathbf{v}' \times \mathbf{B}'$ صدق می‌کنند.

این خواص تبدیل، برای طبیعت چنان بدیهی به نظر می‌رسند که اغلب پیش خودمان فرض می‌کنیم که طبیعت باید این‌طور رفتار کند. مثلاً صرف‌نظر از آثار صرفاً موضعی، نیروی الکتریکی بین دو الکترون که به فاصله معینی از یکدیگرند، نباید به این بستگی داشته باشد که مکان نسبی این دو الکترون را در راستای شمال به جنوب می‌سنجیم یا در راستای شرق به غرب. تصور جهانی که چنین خوشرفتار نباشد چندان دشوار نیست؛ مثلاً ممکن است که طول بردار، در اثر انتقال یا دوران عوض شود. فیزیکدانها و ریاضیدانها در این باره تأمل کرده‌اند که چرا جهان ما چنین تقارنهایی (مثلاً انتقال یا دوران) دارد، و دریافته‌اند که بین تقارنهای طبیعت و کمیت‌های معینی که طی فرایندهای فیزیکی پایسته می‌مانند (یعنی مقدار کل آنها تغییر نمی‌کند)، روابط جالبی وجود دارد. مثلاً ناوردایی قوانین فیزیک تحت تقارن انتقال زمان (یعنی اینکه قانونی که مثلاً دوشنبه برقرار باشد، سه‌شنبه هم برقرار است) مستقیماً به قانون پایستگی انرژی می‌انجامد.

تقارن انعکاسی، بردارهای قطبی، و بردارهای محوری نوع دیگری از تبدیل وجود دارد که کاملاً با انتقال و دوران متفاوت است. این تبدیل، وارون کردن دستگاه مختصات است، یعنی $x \rightarrow -x$ ، $y \rightarrow -y$ ، و $z \rightarrow -z$. به این ترتیب کل سیستم، نسبت به مبدأ مختصات، وارون می‌شود.

ممکن است تصور کنید که برای اعمال این تبدیل بر معادلات، کافی است که مؤلفه‌های هر بردار را منفی کنیم. (اسکالرها در اثر این تبدیل عوض نمی‌شوند). اگر جهت محور x را معکوس کنیم و بردار \mathbf{a} را عوض نکنیم، روشن است که $a_x \rightarrow -a_x$. بنابراین، به جای اینکه دستگاه مختصات وارون رسم کنیم می‌توانیم بردار \mathbf{a} را در همان دستگاه مختصات قدیم بکشیم. این تصور برای دسته بزرگی از کمیت‌های فیزیکی‌ای که با بردار نمایش داده می‌شوند درست است؛ سرعت، شتاب، نیرو، تکانه خطی، و میدان الکتریکی از آن جمله‌اند. این بردارهای خوش‌رفتار را به‌طور کلی بردار قطبی می‌نامند.

گروه دیگری از بردارها هستند که تحت وارونی چنین رفتار نمی‌کنند. مثلاً غالباً مفید است که ذره‌ای را که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ مشخص کنیم (شکل ۱۹). اندازه $\boldsymbol{\omega}$ ، عملاً می‌گوید که سرعت دوران ذره چقدر است؛ جهت $\boldsymbol{\omega}$ بر صفحه دایره عمود است و با قاعده دست راست به دست می‌آید. (اگر انگشتان دست راست خود را در جهت حرکت ذره خم کنید، شست کشیده شما در جهت $\boldsymbol{\omega}$ است)

حالا فرض کنید مدار ذره را نسبت به مبدأ وارون کنیم، شکل ۱۹.

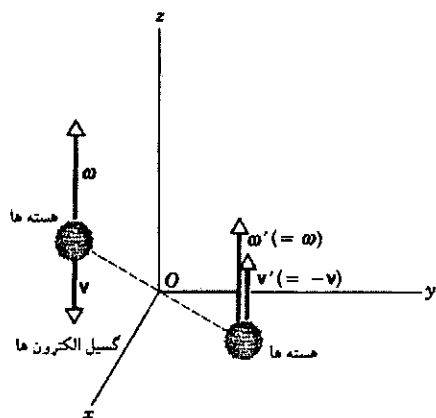
حالا چند مثال می‌آوریم از معادلاتی که بعداً در همین کتاب به تفصیل بررسی‌شان خواهیم کرد؛ فعلاً این معادلات را تنها به عنوان مثالهایی از شکلهای اساسی مطرح می‌کنیم.

با قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ شروع می‌کنیم (فصل ۵). این قانون، نیروی \mathbf{F} لازم را، برای اینکه ذره‌ای به جرم m شتاب \mathbf{a} پیدا کند، به دست می‌دهد. طرف راست معادله عبارت است از اسکالر جرم ضرب در بردار شتاب؛ طرف چپ بردار نیرو است. این معادله ساده می‌نماید، اما بسیار غنی است. ضرب را انجام می‌دهیم و مؤلفه‌های دو طرف را مساوی می‌گیریم. پس در واقع سه معادله مستقل به دست می‌آید: $F_x = ma_x$ ، $F_y = ma_y$ ، و $F_z = ma_z$. در بررسی چگونگی پاسخ ذره به نیرو، هر یک از این سه معادله را می‌شود جداگانه حل کرد. به این ترتیب، مثلاً مؤلفه y نیرو هیچ اثری بر مؤلفه x یا z شتاب ندارد؛ یا می‌توانیم بگوییم که جهت نیرو وارد بر سیستم، جهت شتاب آن را تعیین می‌کند (چون اگر برداری را در یک اسکالر مثبت ضرب کنیم، بردار دیگری در همان جهت به دست می‌آید). در فصل بعدی، که حرکت دوبعدی پرتابه تحت اثر گرانش را بررسی می‌کنیم، از این واقعیت استفاده خواهیم کرد.

قوانین شامل حاصل ضرب اسکالر در زمینه‌های متفاوتی پیش می‌آیند. نخستین مثالی که به آن برمی‌خوریم، تعریف کار مکانیکی است؛ کاری که نیروی \mathbf{F} وارد بر سیستم انجام می‌دهد تا آن را به اندازه d جابه‌جا کند. این کمیت اسکالر، حاصل ضرب اسکالر نیرو و جابه‌جایی است: $W = \mathbf{F} \cdot d = Fd \cos \phi$ (فصل ۷). لژیومی ندارد که نیرو با جابه‌جایی موازی باشد؛ مثلاً تصور کنید سورتیه‌ای را با طنابی که از روی شانه‌تان رد کرده‌اید روی زمین می‌کشید. جابه‌جایی افقی است، اما نیرو (که در راستای طناب اعمال می‌شود) هم مؤلفه افقی دارد و هم مؤلفه عمودی. دقت کنید که، طبق رابطه هندسی شکل ۱۷، فقط مؤلفه \mathbf{F} در راستای d (یعنی $F \cos \phi$) در انجام کار شرکت می‌کند. اینجا هم، معادله برداری اطلاعاتی درباره روابط هندسی در بر دارد.

مثالی از قوانین فیزیکی شامل حاصل ضرب برداری، معادله $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ است (فصل ۳۴). این معادله نیروی \mathbf{F} وارد بر بار الکتریکی q را که با سرعت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی \mathbf{B} حرکت می‌کند به دست می‌دهد. شکل هندسی این نیرو (که از معادله برداری بالا به دست می‌آید) موجب می‌شود که مسیر ذرات باردار به صورت مدارهای دایره‌ای در بیاید؛ این همان چیزی است که در شتابنده‌های عظیم ذرات، مثل سیکلوترون، اتفاق می‌افتد. دقت کنید که نیرو همیشه هم بر سرعت و هم بر راستای میدان مغناطیسی عمود است. اگر این معادله برداری نبود، درک اینکه چرا نیرو چنین رفتاری دارد دشوار می‌شد.

قوانین فیزیکی‌ای که با معادلات برداری بیان می‌شوند جهانی‌اند و به دستگاه مختصات به‌کار رفته بستگی ندارند. مثلاً، اگر حرکت ذرات باردار در میدان مغناطیسی را در دو دستگاه مختصات بررسی



شکل ۲۰. مجموعه‌ای از هسته‌های چرخان، که با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شوند، عمدتاً در جهت مخالف ω الکترون گسیل می‌کنند. در آزمایش وارونه، الکترون‌ها در جهت ω' گسیل می‌شوند. آزمایش اصلی و آزمایش وارونه کاملاً با هم متفاوت‌اند. این نشان می‌دهد که تقارن وارونی در این واپاشیها نقض می‌شود.

اتم الکترون گسیل می‌کند. هسته اتم، مثل یک فرفره کوچک، حول محور خود می‌چرخد، و می‌شود به هر هسته برداری مانند ω نسبت داد که دوران آن را مشخص می‌کند. در آزمایش واپاشی بتا، جهت گسیل الکترون نسبت به جهت ω را بررسی می‌کردند (شکل ۲۰). اگر تعداد الکترونی که در جهت ω گسیل می‌شدند برابر با آنهایی بود که در خلاف جهت گسیل می‌شدند، آزمایش وارونه هم درست مثل آزمایش اصلی می‌بود و تقارن وارونی صدق می‌کرد. اما معلوم شد که بیشتر الکترون‌ها در خلاف جهت ω گسیل می‌شوند. بنابراین، در آزمایش وارونه بیشتر الکترون‌ها در جهت ω گسیل می‌شوند (زیرا در اثر وارونی علامت v عوض می‌شود اما علامت ω عوض نمی‌شود). آزمایش اصلی با تصویر آینه‌ای اش متفاوت است؛ بنابراین، تقارن وارونی و قانون پایستگی مربوط به آن، پایستگی پاریته، در این مورد معتبر نیست.^۱

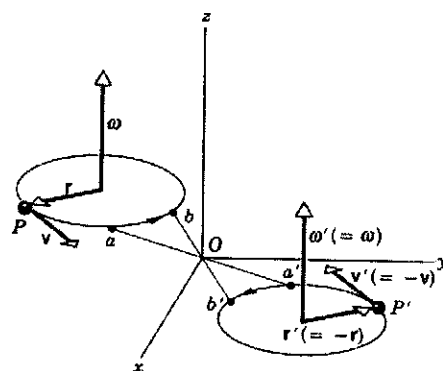
این آزمایش نحوه تفکر فیزیکدانان را در باره فرایندهای بنیادی دگرگون کرد، و یک سر نخ اساسی در مورد ماهیت قانون فیزیکی‌ای که در پس واپاشی بتا وجود دارد، به دست داد. این قانون، یکی از چهار نیروی بنیادی است که می‌شناسیم. این آزمایش پیشگام سلسله آزمایش‌هایی بود که روابط دیگری میان خواص تبدیل، اصول ناوردایی، و تقارن آشکار کرد.

پرسشها

۱. در سال ۱۹۶۹، سه فضانورد آپولو از پایگاه کیپ کاناورال پرواز کردند، به ماه رفتند، برگشتند، و در نقطه معینی در اقیانوس آرام فرود آمدند

۱. نگاه کنید به

The New Ambidextrous Universe, Martin Gardner (W. H. Freeman and Company, 1990).



شکل ۱۹. ذره P که روی دایره حرکت می‌کند با بردار سرعت زاویه‌ای ω مشخص می‌شود. اگر همه مختصات را نسبت به مبدأ O وارون کنیم، ذره "وارونه" P' هم روی دایره می‌گردد و با بردار سرعت زاویه‌ای ω' مشخص می‌شود.

بردار r ، محل ذره P نسبت به مرکز دایره، به $r' = -r$ تبدیل می‌شود. سرعت هم به $v' = -v$ تبدیل می‌شود. از آنجا که ذره اولیه از a به b می‌رود، ذره وارون شده از a' به b' می‌رود و جهت دوران (ساعتگرد یا پادساعتگرد) عوض نمی‌شود، پس $\omega' = \omega$ است. بنابراین سرعت زاویه‌ای، برخلاف بردارهای قطبی v و r ، تحت وارونی مختصات تغییر جهت نمی‌دهد. چنین برداری را بردار محوری یا شبه بردار می‌نامند؛ گشتاور و میدان مغناطیسی هم از این نوع بردارها هستند.

در فصل ۱۱، مبحث حرکت دورانی، خواهیم دید که بین بردارهای v و r ، و ω یک رابطه حاصل ضرب برداری وجود دارد، $v = \omega \times r$. اگر قرار بود که هر سه بردار تحت وارونی تغییر جهت بدهند، رابطه بین سه بردار وارونه به شکل $-v = (-\omega) \times (-r) = \omega \times r$ در می‌آمد. اما این تناقض است: $\omega \times r$ نمی‌تواند هم با $-v$ و هم با v برابر باشد (مگر اینکه v صفر باشد که اینجا چنین نیست). بنابراین، لازم است که رابطه تبدیل ω ، حتماً به شکل $\omega' = \omega$ باشد تا رابطه فیزیکی $v = \omega \times r$ در دستگاه وارونه هم شکل خود را حفظ کند، یعنی $v' = \omega' \times r'$. این همان چیزی است که از ناوردایی قوانین فیزیک تحت یک تبدیل خاص مختصات می‌فهمیم. یعنی، اگر یک قانون فیزیکی را به شکل معادله در یک دستگاه مختصات بنویسیم، بردارها را مطابق با تبدیل مختصات مورد نظر بگذاریم، باید معادله‌ای به دست بیاید که با معادله اول هم‌ارز است.

تا حدود سال ۱۹۵۶ تصور بر این بود که قوانین فیزیک تحت وارونی از نوع شکل ۱۹، (و البته تحت انتقال و تحت دوران) تغییر نمی‌کنند. اما در سال ۱۹۵۶ کشف شد که تقارن وارونی، در نوع خاصی از واپاشیهای پرتوزا، واپاشی بتا، نقض می‌شود.

که رویداد b بیش از c و پس از a رخ داده باشد. به این ترتیب، ترتیب رویدادهای بالا a, b, c است. پس زمان به نوعی جهت دارد، که به کمک آن می‌توان گذشته، حال، و آینده را از هم تشخیص داد. پس آیا زمان بردار است؟ اگر نه چرا؟

۱۳. آیا قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری برای تفریق بردارها هم صادق‌اند؟

۱۴. آیا حاصل ضرب اسکالر می‌تواند منفی شود؟

۱۵. (الف) آیا از $a \cdot b = 0$ نتیجه می‌شود که a و b بر هم عمودند؟

(ب) آیا از $a \cdot b = a \cdot c$ نتیجه می‌شود که $b = c$ است؟

۱۶. آیا اگر $a \times b = 0$ باشد، a و b با هم موازی‌اند؟ آیا عکس این هم درست است؟

۱۷. بردار a موازی محور دوران زمین، و در جهت جنوب به شمال است. بردار b در راستای قائم رو به بالا، و در مکان شماسست. جهت بردار $a \times b$ چیست؟ در چه نقاطی از سطح زمین، اندازه بردار $a \times b$ بیشینه است؟ در چه نقاطی کمینه است؟

۱۸. در کدام یک از عملیات زیر لازم است که دستگاه مختصات را مشخص کنیم (الف) در جمع دو بردار، (ب) در ضرب اسکالر دو بردار،

(ج) در ضرب برداری دو بردار، یا (د) در تعیین مؤلفه‌های دو بردار؟

۱۹. (الف) نشان بدهید که اگر همه مؤلفه‌های یک بردار را وارونه کنیم، جهت خود بردار هم وارونه می‌شود. (ب) نشان بدهید که اگر مؤلفه‌های دو بردار را وارونه کنیم، حاصل ضرب برداری آنها عوض نمی‌شود.

(ج) پس آیا حاصل ضرب برداری، بردار است؟

۲۰. در مورد جمع، تفریق، و ضرب بردارها صحبت کردیم. فکر می‌کنید چرا از تقسیم بردارها حرفی نزدیم؟ آیا می‌شود چنین عملی هم تعریف کرد؟

۲۱. قرارداد معمول در جبر برداری، قاعده دست راست است، که ما هم آن را به کار بردیم. به نظر شما اگر قرارداد دست چپ را به کار می‌بردیم چه تغییراتی لازم می‌بود؟

۲۲. (الف) خودتان را قانع کنید که حاصل ضرب برداری دو بردار قطبی، یک بردار محوری است. (ب) حاصل ضرب برداری یک بردار قطبی و یک بردار محوری چیست؟

مسئله‌ها

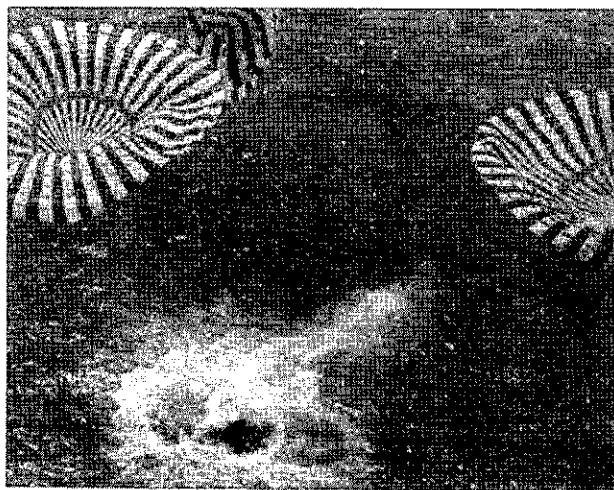
بخش ۲-۳ جمع برداری؛ روش نموداری

۱. دو جابه‌جایی، به اندازه‌های 3m و 4m ، در نظر بگیرید. این جابه‌جاییها را چنان با هم ترکیب کنید که اندازه جابه‌جایی برآیند (الف) 7m ، (ب) 1m ، و (ج) 5m شود.

۲. دو بردار a و b چه خاصیتی داشته باشند تا (الف) $a + b = c$ و $a + b = c$ باشد؛ (ب) $a + b = a - b$ باشد؛ (ج) $a + b = c$ و $a^2 + b^2 = c^2$ باشد؟

۳. شخصی 250m در جهت 35° شرق شمال، و سپس 170m مستقیماً به طرف شرق حرکت می‌کند. (الف) با استفاده از روش

(شکل ۲۱). یک افسر ارشد نیروی دریایی در پایگاه با آنها خداحافظی کرد و سپس با یک کشتی هواپیما بر به اقیانوس آرام رفت تا فضاوردان را از آب بگیرد. جابه‌جایی فضاوردان و این افسر را با هم مقایسه کنید.



شکل ۲۱. برش ۱

۲. سگی 100m به طرف جنوب، سپس 100m به طرف شرق، بعد 100m به طرف شمال می‌دود و سرانجام به نقطه شروع حرکت خود می‌رسد، یعنی جابه‌جایی کل او صفر می‌شود. نقطه شروع کجاست؟ قطب شمال یک جواب بدیهی است اما جوابهای دیگر هم وجود دارند، که نزدیک قطب جنوب‌اند. این حرکت را توصیف کنید.

۳. آیا می‌توان دو بردار با اندازه‌های متفاوت داشت که برآیندشان صفر شود؟ سه بردار چطور؟

۴. آیا ممکن است اندازه برداری صفر باشد ولی یکی از مؤلفه‌های آن صفر نباشد؟

۵. آیا می‌شود که مجموع اندازه‌های دو بردار با اندازه مجموع همان دو بردار یکی باشد؟

۶. آیا ممکن است که اندازه تفاضل دو بردار بزرگتر از اندازه هریک از دو بردار باشد؟ آیا اندازه تفاضل دو بردار می‌تواند بزرگتر از اندازه مجموع همان دو بردار باشد؟ مثال بزنید.

۷. فرض کنید که $d = d_1 + d_2$. آیا این به معنی آن است که باید $d \geq d_1$ یا $d \geq d_2$ باشد؟ اگر نه، توضیح بدهید که چرا؟

۸. اگر مجموع سه بردار صفر شود، این سه بردار الزاماً در یک صفحه‌اند. این گفته را توجیه کنید.

۹. آیا بردارهای یکه i, j, k یکا دارند؟

۱۰. توضیح بدهید که اطلاعات موجود در بردارها به چه معنی بیش از اطلاعات موجود در اسکالرهاست؟

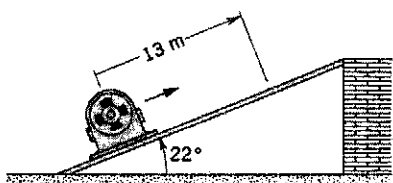
۱۱. چند کمیت اسکالر نام ببرید. آیا مقدار یک کمیت اسکالر به دستگاه مختصاتی که انتخاب می‌کنید بستگی دارد؟

۱۲. رویدادها را می‌توان به ترتیب زمانی مرتب کرد. مثلاً ممکن است

بخش ۳-۳ مؤلفه‌های بردار

۱۰. (الف) بردار a در صفحه xy و در جهت 252° پادساعتگرد از جهت مثبت محور x است. اندازه a ، 7.34 واحد است. مؤلفه‌های این بردار را به دست بیاورید. (ب) مؤلفه x برداری 25 - واحد و مؤلفه y آن $+43$ واحد است. اندازه این بردار و زاویه آن را با جهت مثبت محور x به دست بیاورید.

۱۱. یک دستگاه مکانیکی سنگین را روی سطح شیب‌داری که با افق زاویه 22° می‌سازد، به اندازه 13m به طرف بالای سطح هل می‌دهیم. (شکل ۲۳). (الف) ارتفاع دستگاه نسبت به مکان اولیه‌اش چقدر است؟ (ب) این دستگاه چقدر در جهت افقی حرکت کرده است؟



شکل ۲۳. مسئله ۱۱

۱۲. طول عقربه دقیقه‌شمار یک ساعت دیواری، از محور تا نوک، 11.3cm است. بردار جابه‌جایی نوک عقربه را (الف) از یک ربع گذشته تا نیم ساعت، (ب) در نیم ساعت بعدی، و (ج) در مدت یک ساعت تعیین کنید.

۱۳. شخصی می‌خواهد به نقطه‌ای برسد که در فاصله 3.42km و در جهت 35° شمال شرق محل خودش واقع شده است؛ اما مجبور است که از راه خیابان برود. خیابانها هم یا شمالی-جنوبی‌اند یا شرقی-غربی، کمترین مسافتی که این شخص باید بپیماید تا به مقصد برسد چقدر است؟

۱۴. کشتی‌ای عازم نقطه‌ای در فاصله 124km در جهت شمال است. توفان غیرمنتظره‌ای کشتی را به نقطه‌ای در 72.6km شمال و 31.4km شرق مبدأ می‌راند. این کشتی باید چقدر و در چه جهتی حرکت کند تا به مقصد مورد نظر برسد؟

۱۵. گسل گسیختگی‌ای است در سنگ که سطوح متقابل سنگ در راستای آن، نسبت به هم و موازی با یکدیگر، جابه‌جا شده‌اند. این جابه‌جایی، اغلب با زمین لرزه همراه است. در شکل ۲۴، نقاط A و B پیش از گسیختگی روی هم بوده‌اند. مؤلفه جابه‌جایی کل AB در راستای محور افقی گسل را لغزش افقی می‌نامند (AC). مؤلفه جابه‌جایی کل در راستای محور با تندترین شیب گسل را لغزش عمقی می‌نامند (AD). (الف) اگر لغزش افقی 22m و لغزش عمقی 17m باشد، جابه‌جایی کل چقدر است؟ (ب) اگر صفحه گسل با افق زاویه 52° داشته باشد، جابه‌جایی عمودی خالص B در اثر گسیختگی (الف) چقدر است؟

نموداری، جابه‌جایی کل او را، نسبت به مبدأ پیدا کنید. (ب) اندازه این جابه‌جایی را با مسافتی که پیموده است مقایسه کنید.

۴. شخصی 31km به طرف شمال، سپس 24km به طرف غرب، و سرانجام 52km به طرف جنوب حرکت می‌کند. (الف) یک نمودار برداری برای این حرکت رسم کنید. (ب) پرنده‌ای را در نظر بگیرید که روی خط راست پرواز می‌کند. این پرنده باید چقدر و در چه جهتی پرواز کند تا به مقصد این شخص برسد؟

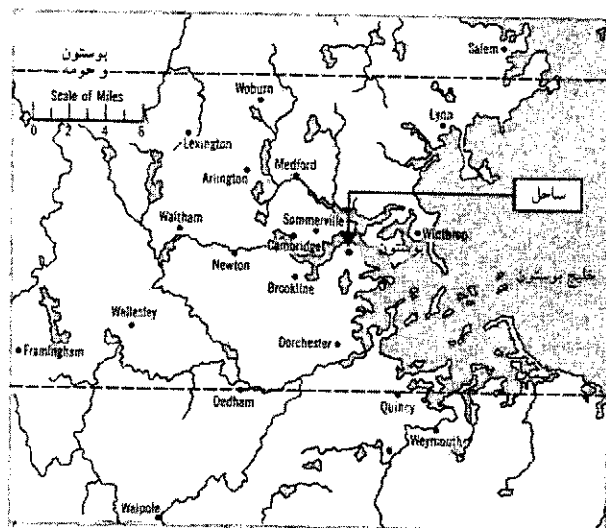
۵. دو بردار a و b را با هم جمع می‌کنیم. به روش تصویری و به کمک نمودارهای برداری نشان بدهید که اندازه بردار برآیند نمی‌تواند بزرگتر از $a+b$ یا کوچکتر از $|a-b|$ باشد. (خطهای قائم علامت قدرمطلق است.)

۶. اتومبیلی 54km در جهت شرق، سپس 32km در جهت شمال، و سرانجام 27km در جهت 28° شرق شمال حرکت می‌کند. نمودار برداری این حرکت را بکشید و جابه‌جایی کل اتومبیل را تعیین کنید.

۷. بردار a به اندازه 52 واحد، و در جهت شرق است. بردار b به اندازه 43 واحد، و در جهت 35° غرب شمال است. با استفاده از نمودار برداری، اندازه و جهت $a+b$ ، و $a-b$ را پیدا کنید.

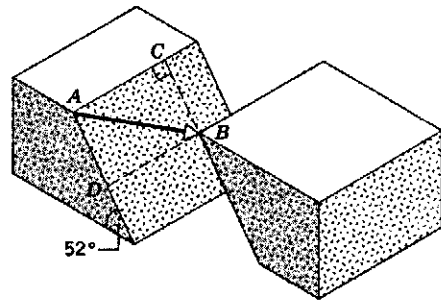
۸. گلف‌بازی توپ گلف را در سه مرحله به سوراخ می‌اندازد. در ضربه اول، توپ 12ft به طرف شمال می‌رود، در ضربه دوم 6ft به جنوب شرقی، و در ضربه سوم 3ft به جنوب غربی، چه جابه‌جایی‌ای لازم بود تا توپ فقط با یک ضربه به سوراخ برسد؟ نمودار بکشید.

۹. بانکی در مرکز شهر بوستون را دزد می‌زند (شکل ۲۲ نقشه محل را نشان می‌دهد). دزدان، برای فرار از چنگ پلیس، این مسیر را با هلیکوپتر می‌پیمایند؛ اول 20mi در جهت 45° جنوب شرق، سپس 33mi در جهت 26° شمال غرب، و سرانجام 16mi در جهت 18° شرق جنوب. اینجاست که پلیس دزدها را دستگیر می‌کند. این محل کدام شهر است؟ (با استفاده از روش نموداری این جابه‌جاییها را روی نقشه با هم جمع کنید.)



شکل ۲۲. مسئله ۹

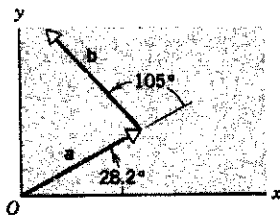
از تخته سنگی به ارتفاع ۴۸m پایین می‌اندازد. دستگاه مختصات را طوری بگیرید که مبدأ آن محل سکه، هنگامی که شخص جلوی خانه‌اش است، باشد و جهت مثبت محورهای x و y ، و z آنرا به ترتیب به طرف شرق، شمال، و بالا انتخاب کنید. (الف) جابه‌جایی سکه را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) این شخص، از راه دیگری، به در خانه‌اش برمی‌گردد. برآیند جابه‌جاییهای او در کل حرکت چیست؟



شکل ۲۴ مسئله ۱۵

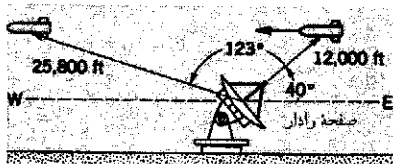
۲۲. ذره‌ای در سه مرحله متوالی در صفحه‌ای جابه‌جایی می‌شود: $۴.۱۳m$ به طرف جنوب غربی $۵.۲۶m$ به طرف شرق، و $۵.۹۴m$ در جهت ۶۴° شمال شرق. محور x را در جهت شرق و محور y را در جهت شمال بگیرید. (الف) مؤلفه‌های هر جابه‌جایی، (ب) مؤلفه‌های برآیند جابه‌جاییها، (ج) اندازه و جهت جابه‌جایی برآیند، و (د) جابه‌جایی‌ای که ذره را به مبدأ باز می‌گرداند پیدا کنید.

۲۳. دو بردار a و b هر کدام به اندازه ۱۲.۷ واحدند. جهت‌گیری آنها طبق شکل ۲۶، و مجموع برداری شان τ است. (الف) مؤلفه‌های x و y بردار τ ، (ب) اندازه τ ، و (ج) زاویه τ نسبت به جهت مثبت محور x را پیدا کنید.



شکل ۲۶ مسئله ۲۳

۲۴. ایستگاه راداری موشکی را که از شرق به آن نزدیک می‌شود "مشاهده" می‌کند. در ابتدا، موشک به فاصله $۱۲۰۰۰ft$ از ایستگاه و تحت زاویه ۴۰° بر فراز افق است. رادار موشک را به اندازه $۱۲۳in$ دیگر در صفحه شرق-غرب دنبال می‌کند (شکل ۲۷). در پایان، فاصله موشک از ایستگاه به $۲۵۸۰ft$ می‌رسد. جابه‌جایی موشک در این مدت چیست؟

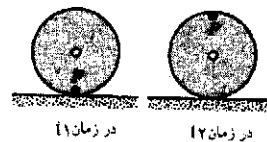


شکل ۲۷ مسئله ۲۴

۲۵. دو بردار به اندازه‌های a و b داریم که اگر دهمان را بر هم منطبق کنیم، با هم زاویه θ می‌سازند. با محاسبه مؤلفه‌های این دو بردار در راستای دو محور متعامد، ثابت کنید که اندازه مجموع آنها برابر است با

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

۱۶. چرخ‌ی به شعاع $۴۵cm$ ، روی سطحی افقی، بی‌لغزش، می‌غلتند (شکل ۲۵). نقطه‌ای است که روی چرخ علامتگذاری شده است. در زمان t_1 ، نقطه تماس بین چرخ و سطح است. در زمان t_2 ، پس از t_1 ، چرخ نیم دور چرخیده است. جابه‌جایی P طی این حرکت چقدر است؟



شکل ۲۵ مسئله ۱۶

۱۷. ابعاد اتاقی $۱۴ft \times ۱۲ft \times ۱۰ft$ است. مگسی از یک گوشه اتاق شروع به پرواز می‌کند و به سر دیگر قطری که از این گوشه می‌گذرد می‌رسد. (الف) بردار جابه‌جایی را در دستگاهی که محورهای مختصات آن با یالهای اتاق موازی‌اند پیدا کنید. (ب) اندازه این جابه‌جایی چقدر است؟ (ج) آیا امکان دارد که مگس از یک مسیر کوتاهتر، به مقصد برسد؟ از یک مسیر بلندتر چطور؟ از مسیر دیگری با همان طول چطور؟ (د) اگر مگس، به جای پرواز کردن، راه برود، کوتاهترین مسیری که او را به مقصد می‌رساند کدام است؟

بخش ۳-۴ جمع برداری؛ روش مؤلفه‌ای

۱۸. (الف) جمع دو بردار $a = ۵i + ۳j$ و $b = -۳i + ۲j$ را برحسب بردارهای یکه بنویسید. (ب) اندازه و جهت $a + b$ را به دست بیاورید.
۱۹. دو بردار $a = ۴i - ۳j + k$ و $b = -i + j + ۴k$ را در نظر بگیرید. (الف) $a + b$ ، و (ب) $a - b$ را پیدا کنید. (ب) بردار c را چنان تعیین کنید که $a - b + c = 0$ باشد.

۲۰. دو بردار $a = ۴i - ۳j$ و $b = ۶i + ۷j$ را در نظر بگیرید. اندازه و جهت هر یک از بردارهای زیر را (نسبت به جهت مثبت محور x) پیدا کنید. (الف) a ، (ب) b ، (ج) $a + b$ ، (د) $b - a$ ، و (ه) $a - b$.

۲۱. (الف) شخصی از در خانه‌اش $۱۴۰۰m$ به طرف شرق و $۲۱۰۰m$ به طرف شمال می‌رود. سپس سکه‌ای از جیبش در می‌آورد و آنرا

”غرب“، و (ه) ”جنوب“ ضربدر ”جنوب“ را به دست بیاورید. همه بردارها را یک به بگیرید.

۳۵. دو بردار $a = a_x i + a_y j + a_z k$ و $b = b_x i + b_y j + b_z k$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $a \cdot b$ ، برحسب مؤلفه‌های دو بردار از معادله ۱۵ به دست می‌آید.

۳۶. دو بردار $a = a_x i + a_y j + a_z k$ و $b = b_x i + b_y j + b_z k$ را در نظر بگیرید. ثابت کنید که $a \times b$ ، برحسب مؤلفه‌های دو بردار، از معادله ۱۷ به دست می‌آید.

۳۷. نشان بدهید که $a \times b$ را می‌شود با این دترمینان 3×3 نشان داد:

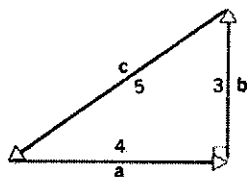
$$a \times b = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

۳۸. با استفاده از معادلات ۱۳ و ۱۵، زاویه میان دو بردار $b = 2i + j + 3k$ و $a = 3i + 3j + 3k$ را پیدا کنید.

۳۹. سه بردار $a = 3i + 3j - 2k$ ، $b = -i - 4j + 2k$ و $c = 2i + 2j + k$ را در نظر بگیرید. (الف) $a \cdot (b \times c)$ و (ب) $a \cdot (b + c)$ و (ج) $a \times (b + c)$ را حساب کنید.

۴۰. بردارهای $a = 5i + 4j - 6k$ ، $b = -2i + 2j + 3k$ و $c = 4i + 3j + 2k$ را در نظر بگیرید. (الف) $r = a - b + c$ را به دست بیاورید. (ب) زاویه بین r و محور z و (ج) زاویه بین a و b را محاسبه کنید.

۴۱. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند (شکل ۲۸). (الف) $a \cdot b$ ، (ب) $a \cdot c$ ، و (ج) $b \cdot c$ را حساب کنید.



شکل ۲۸. مسئله‌های ۴۱ و ۴۲

۴۲. مجموع سه بردار صفر است، و این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند. شکل ۲۸. (الف) $a \times b$ ، (ب) $a \times c$ ، و (ج) $b \times c$ را حساب کنید.

۴۳. بردار a در صفحه xy است و با محور y زاویه 63° می‌سازد. مؤلفه z این بردار مثبت، و اندازه آن 3.2 واحد است. بردار b در صفحه xz است و با محور x زاویه 48° می‌سازد. مؤلفه z این بردار مثبت، و اندازه آن 1.4 واحد است. (الف) $a \cdot b$ ، (ب) $a \times b$ ، و (ج) زاویه بین a و b را پیدا کنید.

۴۴. (الف) دیدیم که قانون جابه‌جایی در مورد حاصل‌ضرب برداری $a \times b = b \times a$ نشان بدهید که

۲۶. ثابت کنید که اگر مجموع دو بردار برتفاضل آنها عمود باشد، طول آن دو بردار یکی است.

۲۷. (الف) سه بردار یک‌دیگر در راستای یالهای مکعبی به ضلع a بگیرید و قطرهای مکعب را (که از مرکز مکعب می‌گذرند و دو رأس متقابل را به هم وصل می‌کنند) برحسب آنها و طول ضلع مکعب، بیان کنید. (ب) زاویه قطر مکعب را با یالهای مجاورش پیدا کنید. (ج) طول قطر مکعب چقدر است؟

۲۸. مسافری از واشنگتن دی‌سی به مانیل پرواز می‌کند. (الف) بردار جابه‌جایی او را به دست بیاورید. (ب) اندازه این بردار چقدر است؟ عرض و طول جغرافیایی این دو شهر به ترتیب 39° شمال- 77° غرب و 15° شمال- 121° شرق است. (راهنمایی: از شکل ۷ و معادلات ۷ استفاده کنید. محور z را در راستای محور دوران زمین بگیرید. به این ترتیب، ”عرض جغرافیایی - $90^\circ = \theta$ “ و ”طول جغرافیایی $= \phi$ “ خواهد بود. شعاع زمین 6370 km است.)

۲۹. فرض کنید که N عدد صحیحی بزرگتر از ۱ است. در این صورت،

$$\cos^\circ + \cos \frac{2\pi}{N} + \cos \frac{4\pi}{N} + \dots + \cos(N-1) \frac{2\pi}{N} = 0$$

یعنی

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \cos \frac{2\pi n}{N} = 0$$

همچنین

$$\sum_{n=0}^{n=N-1} \sin \frac{2\pi n}{N} = 0$$

این دو رابطه را اثبات کنید. برای این کار جمع N بردار به طول یکسان را در نظر بگیرید که هر یک با قبلی زاویه $2\pi/N$ می‌سازد.

بخش ۳-۵ ضرب بردارها

۳۰. بردار d به اندازه 26 m و در جهت شمال است. اندازه و جهت بردارهای (الف) $-d$ ، (ب) $d/2$ ، (ج) $2.5d$ ، و (د) $d/5$ را به دست بیاورید.

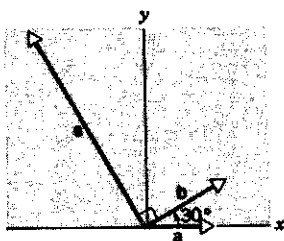
۳۱. نشان بدهید که بردار a هر چه باشد، (الف) $a \cdot a = a^2$ و (ب) $a \times a = 0$ است.

۳۲. اندازه بردار a ، 12 واحد و اندازه بردار b ، 5.8 واحد است. زاویه میان این دو بردار 55° است. (الف) حاصل‌ضرب اسکالر و (ب) حاصل‌ضرب برداری این دو بردار را پیدا کنید.

۳۳. دو بردار r و s در صفحه xy اند. اندازه این دو بردار، به ترتیب، 4.5 و 7.3 واحد است. جهت این دو بردار، به ترتیب، 32° و 85° پادساعتگرد نسبت به جهت مثبت محور x است. (الف) $r \cdot s$ و (ب) $r \times s$ را پیدا کنید.

۳۴. حاصل‌ضربهای (الف) ”شمال“ ضربدر ”غرب“، (ب) ”پایین“ نقطه ”جنوب“ (ج) ”شرق“ ضربدر ”ب“

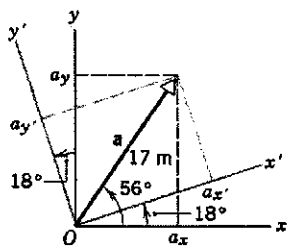
۵۰. سه بردار شکل ۳۱ به اندازه‌های $a = 3$, $b = 4$, و $c = 1$ اند. (الف) مؤلفه‌های x و y این سه بردار را پیدا کنید. (ب) اعداد p و q را چنان تعیین کنید که $c = pa + qb$ باشد.



شکل ۳۱. مسئله ۵۰

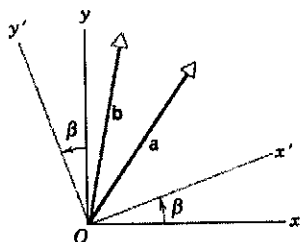
بخش ۳-۶ قوانین برداری در فیزیک

۵۱. با استفاده از شکل ۱۰ ب، معادلات ۱۸ را به دست بیاورید.
 ۵۲. بردار a به اندازه 17m در جهت 56° پادساعتگرد از محور $+x$ است (شکل ۳۲). (الف) مؤلفه‌های a_x و a_y این بردار را به دست بیاورید. (ب) دستگاه مختصات دیگری را در نظر بگیرید که 18° نسبت به دستگاه اول چرخیده باشد. مؤلفه‌های a_x' و a_y' را در این دستگاه "پریم‌دار" پیدا کنید.



شکل ۳۲. مسئله ۵۲

۵۳. شکل ۳۳ دو بردار a و b و دو دستگاه مختصات را نشان می‌دهد که زاویه بین محورهای "نظیر" آنها β است. به طور تحلیلی ثابت کنید که اندازه و جهت $a + b$ مستقل از دستگاه مختصاتی است که برای محاسبه این بردار به کار می‌رود. (راهنمایی: معادلات ۱۸ را به کار بگیرید.)



شکل ۳۳. مسئله ۵۳

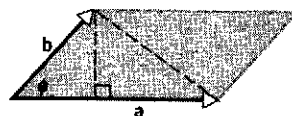
قانون جابه‌جایی در مورد حاصل ضرب اسکالر درست است؛ یعنی، $a \cdot b = b \cdot a$. (ب) نشان بدهید که قانون پخش، هم در مورد حاصل ضرب اسکالر و هم در مورد حاصل ضرب برداری درست است یعنی

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$

و

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

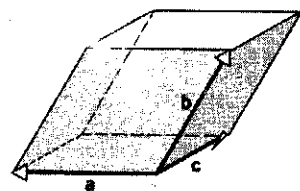
(ج) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب برداری درست است؟ یعنی، آیا $a \times (b \times c)$ با $(a \times b) \times c$ برابر است؟ (د) آیا قانون شرکت‌پذیری در مورد حاصل ضرب اسکالر معنی دارد؟
 ۴۵. نشان بدهید که مساحت مثلثی که با بردارهای a و b ساخته می‌شود (شکل ۲۹) برابر با $\frac{1}{2}|a \times b|$ است. (خطوط قائم به معنی اندازه بردار است.)



شکل ۲۹. مسئله‌های ۴۵ و ۴۶

۴۶. نشان بدهید که اندازه حاصل ضرب برداری برابر با مساحت متوازی‌الاضلاعی است که اضلاع آن به اندازه عوامل ضرب باشند (شکل ۲۹). به این ترتیب، آیا فکر نمی‌کنید که بتوانیم برای نمایش عنصر سطحی که جهتی در فضا دارد هم از بردار استفاده کنیم؟

۴۷. نشان بدهید که قدر مطلق $a \cdot (b \times c)$ برابر با حجم متوازی‌السطوحی است که با سه بردار a , b , و c ساخته می‌شود (شکل ۳۰).



شکل ۳۰. مسئله ۴۷

۴۸. مؤلفه‌های دو بردار a و b ، برحسب یکای دلخواه، $a_x = 3.2$ و $a_y = 1.6$ ؛ $b_x = 0.5^\circ$ و $b_y = 4.5$ است. (الف) زاویه میان a و b چقدر است؟ (ب) مؤلفه‌های بردار c را که عمود بر a ، در صفحه xy ، و به اندازه 5° واحد است، پیدا کنید.
 ۴۹. زاویه میان قطرهای حجمی مکعب را محاسبه کنید. (مسئله ۲۷).

۴

حرکت دو بُعدی و سه بُعدی

این فصل، ترکیبی از مفاهیم فصل ۲ و ۳ است. اینجا هم حرکت ذرات را بر حسب مکان، سرعت، و شتاب آنها توصیف می‌کنیم؛ همان کاری که در فصل ۲ کردیم. اما دیگر مثل فصل ۲ ذرات را مقید نمی‌کنیم که روی خط راست حرکت کنند؛ در اینجا می‌گذاریم که ذره به هر جای دستگاه مختصات سه بُعدی برود. استفاده از نمادگذاری برداری، بررسی مؤلفه‌های x ، y ، و z حرکت را تا حد زیادی ساده می‌کند. خواهیم دید که معادلات سینماتیکی فصل ۲ را در حالت کلی هم می‌شود به‌کار برد؛ کافی است که به جای متغیر یک بُعدی، بردار متناظر با آن را بگذاریم. به عنوان نمونه‌هایی از کاربرد روشهای برداری، دو حرکت آشنا را بررسی می‌کنیم: یکی حرکت پرتابه در میدان گرانشی زمین با سرعت اولیه‌ای که هم مؤلفه افقی و هم مؤلفه عمودی دارد، و دیگری حرکت ذره در مسیر دایره‌ای.

در مختصات دکارتی، مکان ذره با x ، y ، و z مشخص می‌شود. اینها مؤلفه‌های بردار \mathbf{r} ، یعنی بردار مکان ذره‌اند:

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1)$$

فرض کنید که ذره از نقطه \mathbf{r}_1 در زمان t_1 ، به نقطه \mathbf{r}_2 در زمان t_2 برود؛ شکل ۱ الف جابه‌جایی (تغییر مکان) ذره در بازه $\Delta t = t_2 - t_1$ ، بردار $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. سرعت متوسط $\bar{\mathbf{v}}$ در بازه Δt برابر است با

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (2)$$

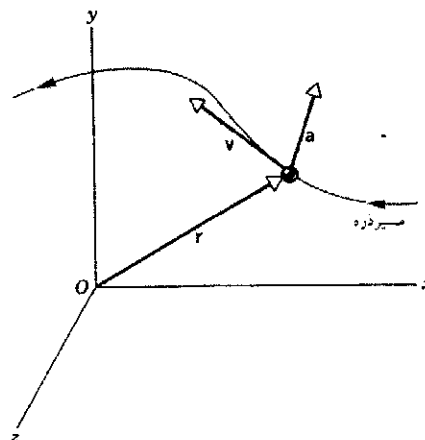
در معادله ۲، برای به دست آمدن $\bar{\mathbf{v}}$ بردار $\Delta \mathbf{r}$ در اسکالر $1/\Delta t$ ضرب شده است. پس جهت $\bar{\mathbf{v}}$ همان جهت $\Delta \mathbf{r}$ است. دقت کنید که رابطه سه بردار \mathbf{r}_1 ، $\Delta \mathbf{r}$ ، و \mathbf{r}_2 با هم، همان رابطه سه بردار \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{s} در شکل ۳ فصل ۳ است. یعنی، با استفاده از روش نموداری سر به دم برای جمع برداری، برابری $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. پس $\mathbf{r}_2 = \Delta \mathbf{r} + \mathbf{r}_1$ یا $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. با کوچکتر کردن Δt بردار $\Delta \mathbf{r}$ به مسیر واقعی نزدیک می‌شود (شکل ۲ ب) و در حد $\Delta t \rightarrow 0$ ، به مماس بر مسیر میل می‌کند. در این حد، سرعت متوسط هم به سرعت لحظه‌ای \mathbf{v} می‌گراید:

$$\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} \quad (3)$$

با تعمیم معقولی از تعریف قبلی از مشتق (معادله ۸ فصل ۲)، کمیت \mathbf{v} به صورت مشتق بردار \mathbf{r} نسبت به زمان نمایش

۱-۴ مکان، سرعت، و شتاب

شکل ۱ ذره‌ای را که روی مسیری منحنی در فضای سه بُعدی حرکت می‌کند در زمان t نشان می‌دهد. مکان، یا جابه‌جایی از مبدأ، ذره را با بردار \mathbf{r} می‌سنجیم. سرعت را با بردار \mathbf{v} نشان می‌دهیم. این بردار، چنانکه بعداً خواهیم دید، باید بر مسیر ذره مماس باشد. شتاب را با بردار \mathbf{a} نشان می‌دهیم. جهت این بردار، چنانکه بعداً روشن خواهد شد، در حالت کلی رابطه‌ای با مکان ذره یا با جهت \mathbf{v} ندارد.



شکل ۱. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره‌ای که روی مسیری دلخواه حرکت می‌کند. اندازه‌های این بردارها، و همین‌طور جهت‌های آنها ارتباطی با هم ندارند.

به طور خلاصه، رابطه برداری معادله ۴ کاملاً با سه رابطه برداری معادله ۶ هم‌ارز است.

تعمیم این مفاهیم به شتاب، مشابه بخش ۵-۲، سراسر است. شتاب متوسط از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (7)$$

و شتاب لحظه‌ای حد شتاب متوسط است وقتی که بازه زمانی به سمت صفر میل می‌کند:

$$\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} \quad (8)$$

اینجا هم کمیت طرف راست عبارت از مشتق \mathbf{v} نسبت به زمان است:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \quad (9)$$

و سرانجام با مساوی قرار دادن مؤلفه‌های متناظر در دو طرف معادله بالا خواهیم داشت

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad a_y = \frac{dv_y}{dt}, \quad a_z = \frac{dv_z}{dt} \quad (10)$$

توجه کنید که معادلات برداری، هم برای ساده کردن نمادگذاری به درد می‌خورند (مثلاً معادله ۹، به تنهایی، سه رابطه معادله ۱۰ را دربر دارد) و هم برای جدا کردن مؤلفه‌ها از یکدیگر (مثلاً a_x اثری بر v_y یا v_z ندارد).

همچنین دقت کنید که چون بردار \mathbf{v} هم جهت دارد و هم اندازه، از معادله ۹ معلوم می‌شود که تغییر جهت سرعت هم می‌تواند شتاب ایجاد کند، حتی اگر اندازه سرعت تغییر نکند. در واقع حرکتی که اندازه سرعت در آن ثابت است هم می‌تواند شتابدار باشد. یعنی، چون $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ است، مؤلفه‌ها می‌توانند چنان تغییر کنند که اندازه \mathbf{v} ثابت بماند. آشناترین مثال چنین حرکتی، حرکت دایره‌ای یکنواخت است، که آن را در بخش ۴-۴ بررسی خواهیم کرد.

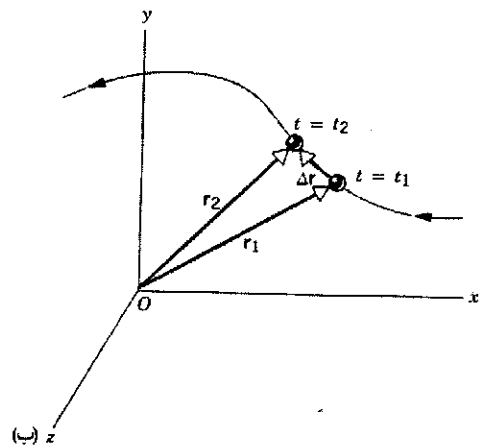
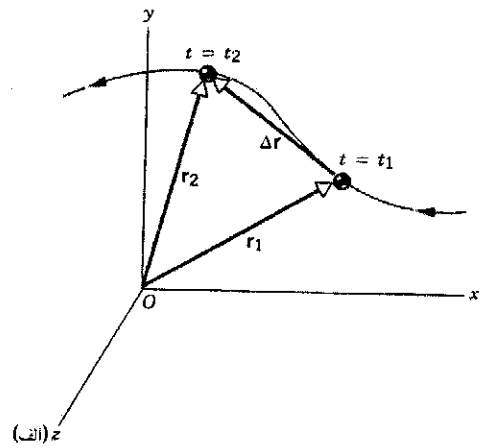
مثال ۱. ذره‌ای در صفحه xy حرکت می‌کند و مختصات x و y آن به صورت $x(t) = t^2 - 32t$ و $y(t) = 5t^2 + 12$ به زمان بستگی دارند. x و y بر حسب متر، و t بر حسب ثانیه است. مکان، سرعت، و شتاب ذره را در $t = 3$ تعیین کنید.

حل: مکان از معادله ۱ به دست می‌آید. با گذاشتن $x(t)$ و $y(t)$ از روابط بالا، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = (t^2 - 32t)\mathbf{i} + (5t^2 + 12)\mathbf{j}$$

و با محاسبه این عبارت به ازای $t = 3$ s

$$\mathbf{r} = -69\mathbf{i} + 57\mathbf{j}$$



شکل ۲. (الف) ذره در بازه Δt ، از t_1 تا t_2 ، از نقطه \mathbf{r}_1 به نقطه \mathbf{r}_2 می‌رود. جابه‌جایی ذره در این بازه، $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ است. (ب) با کوچک شدن بازه، بردار جابه‌جایی به مسیر واقعی ذره نزدیک می‌شود.

می‌دهیم:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (4)$$

بردار $\Delta \mathbf{r}$ ، در حد $\Delta t \rightarrow 0$ ، بر مسیر مماس می‌شود. به همین ترتیب، بردار \mathbf{v} هم در طی حرکت همه جا بر مسیر ذره مماس است. معادله ۴ هم، مثل همه معادلات برداری دیگر، با سه معادله اسکالر هم‌ارز است. برای درک این موضوع، بردار \mathbf{v} را بر حسب مؤلفه‌هایش می‌نویسیم و \mathbf{r} را از معادله ۱ در معادله ۴ می‌گذاریم:

$$\begin{aligned} v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} + v_z \mathbf{k} &= \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \\ &= \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \end{aligned} \quad (5)$$

برای اینکه دو بردار با هم برابر باشند باید تک تک مؤلفه‌های متناظرشان با هم برابر باشند. پس، از مقایسه طرفهای راست و چپ معادله ۵ معلوم می‌شود که

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (6)$$

است. همچنین دقت کنید که جهت a ارتباط خاصی با جهت r یا جهت v ندارد.

۲-۴ حرکت با شتاب ثابت

حالا حرکت با شتاب ثابت را بررسی می‌کنیم. در این مورد خاص، طی حرکت ذره، اندازه و جهت شتاب a هیچ‌یک تغییر نمی‌کنند. بنابراین، مؤلفه‌های a هم تغییر نمی‌کنند. چنین وضعیتی را می‌توانیم به شکل جمع سه مؤلفه حرکت با شتاب ثابت، که همزمان در سه راستای عمود بر هم انجام می‌شوند توصیف کنیم. در حالت کلی ذره روی مسیری منحنی حرکت می‌کند. حتی اگر یکی از مؤلفه‌های شتاب، مثلاً a_x ، صفر باشد، مسیر حرکت می‌تواند منحنی باشد؛ زیرا در این حالت مؤلفه سرعت متناظر با آن v_x ، مقداری ثابت است که می‌تواند صفر نباشد. مثالی از این مورد اخیر، حرکت پرتابه است. مسیر حرکت، یک منحنی در صفحه قائم است و شتاب ذره با چشمپوشی از مقاومت هوا، شتاب ثابت g است، که تنها در راستای قائم مؤلفه دارد. برای به‌دست آوردن شکل کلی معادلات حرکت با شتاب ثابت، کافی است بگذاریم

$$a_x = \text{const.} \quad a_y = \text{const.} \quad a_z = \text{const.}$$

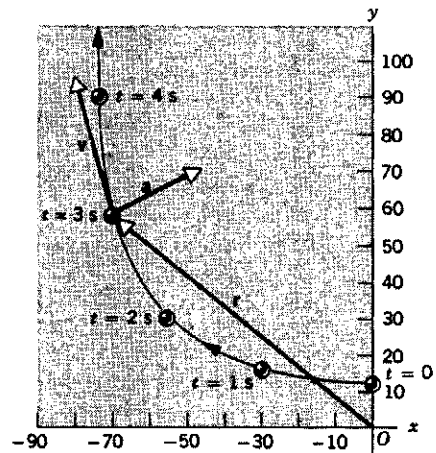
پرتابه در $t = 0$ از نقطه اولیه $r_0 = x_0 i + y_0 j + z_0 k$ با سرعت اولیه $v_0 = v_{x0} i + v_{y0} j + v_{z0} k$ شروع به حرکت می‌کند. از اینجا به بعد، مثل بخش ۲-۶ عمل می‌کنیم و متناظر با معادله ۱۵ فصل ۲، سه معادله اسکالر به‌دست می‌آوریم: $v_x = v_{x0} + a_x t$ ، $v_y = v_{y0} + a_y t$ و $v_z = v_{z0} + a_z t$ این سه معادله را می‌شود به شکل یک معادله برداری نوشت:

$$v = v_0 + at \quad (11)$$

به‌یاد داشته باشید که این معادله، یا هر معادله برداری دیگری، سه معادله اسکالر مستقل از هم در بر دارد.

جمله دوم طرف راست معادله ۱۱، حاصل ضرب یک بردار در یک اسکالر است. چنانکه در بخش ۳-۵ دیدیم، حاصل برداری به اندازه at و در جهت بردار a است.

با ادامه کار به روش بخش ۲-۶، پنج معادله برای توصیف حرکت سه‌بعدی با شتاب ثابت به‌دست می‌آید. جدول ۱ این پنج معادله را نشان می‌دهد. اینها را با پنج معادله متناظر یک‌بعدی جدول ۲ فصل ۲ مقایسه کنید. به‌جز معادله ۱۳ که معادله‌ای اسکالر است (هرچند شامل بردار)، هر یک از معادلات جدول ۱ سه معادله اسکالر مستقل از هم در بر دارند. مؤلفه x معادلات ۱۱، ۱۲، ۱۴ و ۱۵، همان معادلات



شکل ۳. مثال ۱. مسیر ذره، و مکان ذره در $t = 0s$ ، $t = 1s$ ، $t = 2s$ ، $t = 3s$ و $t = 4s$ روی شکل مشخص شده است. همچنین، بردارهای مکان، سرعت، و شتاب ذره در $t = 3s$ روی شکل نشان داده شده‌اند. توجه کنید که ارتباط خاصی بین جهت‌های v ، r ، a وجود ندارد.

در این رابطه، یکای مؤلفه‌های r ، متر است مؤلفه‌های سرعت از معادله ۶ به‌دست می‌آیند:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2 - 32t) = 2t - 32$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 12) = 10t$$

از معادله ۵ نتیجه می‌شود که

$$v = v_x i + v_y j = (2t - 32)i + 10t j$$

و در $t = 3s$

$$v = -5i + 30j$$

که یکای آن m/s است.

مؤلفه‌های شتاب عبارت‌اند از

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(2t - 32) = 2$$

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}(10t) = 10$$

شتاب در $t = 3s$ برابر است با

$$a = 2i + 10j$$

شکل ۳ مسیر حرکت را از $t = 0$ تا $t = 4s$ نشان می‌دهد. بردارهای مکان، سرعت، و شتاب در $t = 3s$ ، روی شکل مشخص شده‌اند. توجه کنید که v بر مسیر، در مکان متناظر با $t = 3s$ ، مماس

جدول ۱. معادلات برداری حرکت با شتاب ثابت.

شامل					معادله	شماره معادله
t	a	v	v_0	r		
✓	✓	✓	✓	×	$v = v_0 + at$	۱۱
✓	✓	×	✓	✓	$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2$	۱۲
×	✓	✓	✓	✓	$v \cdot v = v_0 \cdot v_0 + 2a \cdot (r - r_0)$	۱۳*
✓	×	✓	✓	✓	$r = r_0 + \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	۱۴
✓	✓	✓	×	✓	$r = r_0 + v_0 t - \frac{1}{2} at^2$	۱۵

* این معادله شامل ضرب اسکالر یا نقطه‌ای دو بردار است، که در بخش ۳-۵ تعریف شد.

و محور y را در جهت جانبی می‌گیریم. مؤلفه‌های شتاب برابرند با

$$a_x = g \sin 10^\circ = 1.70 \text{ m/s}^2$$

$$a_y = 0.54 \text{ m/s}^2$$

توجه کنید که این مؤلفه‌ها مستقل از هم‌اند. مؤلفه a_x ناشی از گرانش و به طرف پایین شیب است، و ربطی به وزیدن یا نوزیدن باد جانبی ندارد. a_y هم شتاب جانبی است که از باد حاصل می‌شود، چه سطح شیب‌دار باشد و چه نباشد. امکان کاربرد مستقل این دو مؤلفه، گویای ماهیت حساب برداری است.

در $t = 0$ را زمانی می‌گیریم که اسکی‌باز شروع به حرکت می‌کند. داریم $v_{x_0} = 9 \text{ m/s}$ و $v_{y_0} = 0$. پس

$$v_x = v_{x_0} + a_x t = 9 \text{ m/s} + (1.70 \text{ m/s}^2)t$$

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = 0 + (0.54 \text{ m/s}^2)t$$

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2$$

$$= 0 + (9 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2$$

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = 0 + 0 + (0.27 \text{ m/s}^2)t^2$$

فعالاً فرض می‌کنیم که اسکی‌باز، پیش از آنکه از لبه جانبی شیب خارج شود، به پایین شیب می‌رسد. (بعداً می‌توانیم درستی این فرض را واریسی کنیم.) اول باید زمانی این رویداد (یعنی زمانی که $x = 125 \text{ m}$ می‌شود) را به دست آوریم:

$$125 \text{ m} = (9 \text{ m/s})t + (0.85 \text{ m/s}^2)t^2$$

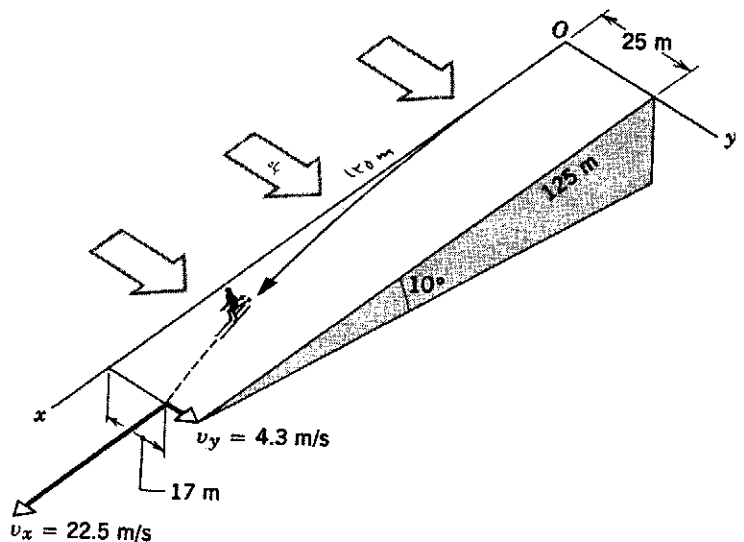
از حل این معادله درجه دو، دو جواب $t = 7.94 \text{ s}$ و $t = -18.5 \text{ s}$ به دست می‌آید. فعلاً فقط جواب مثبت را در نظر می‌گیریم و با استفاده از آن، مختصه y متناظر با این زمان را حساب می‌کنیم:

$$y = (0.27 \text{ m/s}^2)t^2 = (0.27 \text{ m/s}^2)(7.94 \text{ s})^2 = 17.0 \text{ m}$$

متناظر در جدول ۲ فصل ۲ اند. چون معادله ۱۳ اسکالر است، مؤلفه x (یا هر مؤلفه دیگری) ندارد.

مثال ۲. اسکی‌بازی روی شیب همواری از دامنه کوه پایین می‌آید. زاویه خط شیب به طرف پایین (شمال-جنوب) با افق 10° است. بادی از جهت غرب می‌وزد که به اسکی‌باز یک شتاب جانبی به اندازه 0.54 m/s^2 می‌دهد (شکل ۴). اسکی‌باز از گوشه شمال‌غربی شیب شروع به حرکت می‌کند. مؤلفه سرعت اولیه او در جهت شیب 9 m/s و در جهت جانبی صفر است. شیب بدون اصطکاک است و 125 m طول و 25 m عرض دارد. (الف) اسکی‌باز در کجای شیب از آن خارج می‌شود؟ (ب) سرعت او در آن نقطه چقدر است؟ (راهنمایی: شتاب گرانشی در راستای صفحه‌های با زاویه شیب θ ، برابر با $g \sin \theta$ است.)

حل: (الف) مبدأ را گوشه شمال‌غربی، محور x را رو به پایین شیب،



شکل ۴. مثال ۲.

می‌کنیم که اثر هوا بر حرکت پرتابی قابل اغماض است. در فصل ۶، اثر مقاومت هوا را (که اغلب قابل توجه است) بررسی خواهیم کرد. حرکت پرتابی، حرکتی است با شتاب ثابت g ؛ این شتاب به طرف پایین است. ممکن است سرعت این حرکت مؤلفه افقی داشته باشد، اما شتاب آن مؤلفه افقی ندارد. در دستگاه مختصاتی که جهت مثبت محور y آن در امتداد قائم رو به بالا باشد، می‌شود گفت $a_y = -g$ (اینجا هم، مثل فصل ۲، g همواره یک عدد مثبت است) و $a_x = 0$. بعلاوه، فرض می‌کنیم v_0 در صفحه xy باشد، یعنی $v_{z_0} = 0$ است. چون $a_z = 0$ هم صفر است، از مؤلفه z معادله ۱۱ معلوم می‌شود که v_z همواره برابر با صفر است. پس کافی است که فقط رویدادهای صفحه xy را بررسی کنیم.

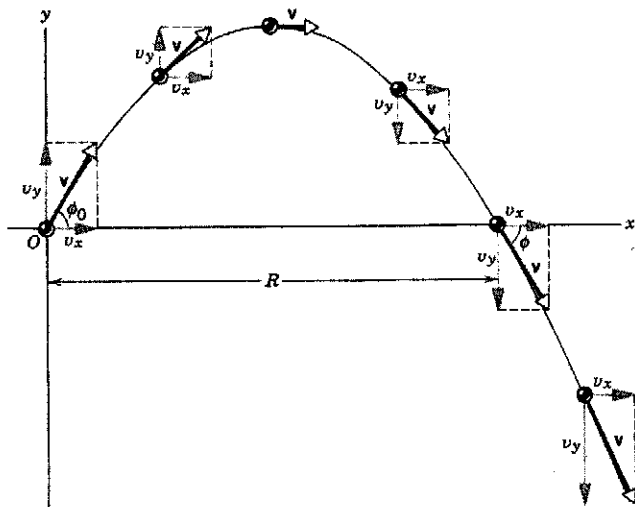
مبدأ مختصات را نقطه‌ای می‌گیریم که حرکت پرتابی از آن شروع می‌شود (شکل ۵)، مثلاً نقطه‌ای که در آن توپ از دست پرتاب‌کننده رها می‌شود. با این انتخاب، $x_0 = y_0 = 0$ است. سرعت در $t = 0$ ، زمان شروع حرکت پرتابه، v_0 است که با جهت مثبت محور x زاویه ϕ_0 می‌سازد. به این ترتیب، مؤلفه‌های x و y بردار v_0 (شکل ۵) عبارت‌اند از

$$v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0 \quad \text{و} \quad v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0 \quad (۱۶)$$

چون شتاب مؤلفه افقی ندارد، مؤلفه افقی سرعت ثابت است. مقادیر $a_x = 0$ و $v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0$ را در مؤلفه x معادله ۱۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

$$v_x = v_{x_0} + a_x t = v_0 \cos \phi_0 \quad (۱۷)$$

مؤلفه افقی سرعت، در تمام مدت پرواز، برابر با مقدار اولیه آن است.



شکل ۵. مسیر پرتابه، سرعت اولیه v_0 و مؤلفه‌های آن، و سرعت v با مؤلفه‌هایش در پنج لحظه مختلف پس از پرتاب. دقت کنید که طی حرکت، $v_x = v_{x_0}$ است. فاصله افقی R ، برد پرتابه است.

جابه‌جایی جانبی 17.0 m ، کمتر از عرض شیب (25 m) است. پس فرض ما درست است، اسکی‌باز به فاصله 17.0 m از لبه غربی شیب، از انتهای شیب خارج می‌شود.

(ب) مؤلفه‌های سرعت را می‌شود مستقیماً در $t = 7.94\text{ s}$ حساب کرد:

$$v_x = 9.0\text{ m/s} + (17.0\text{ m/s}^2)(7.94\text{ s}) = 22.5\text{ m/s}$$

$$v_y = (0.54\text{ m/s}^2)(7.94\text{ s}) = 4.3\text{ m/s}$$

دقت کنید که در حل این مسئله، محورهای x و y را در صفحه شیب انتخاب کردیم. به این ترتیب، مسئله سه‌بعدی به مسئله‌ای دوبعدی تبدیل شده اگر از اول در دستگاه مختصاتی کار می‌کردیم که صفحه xy آن در سطح افقی، و محور z آن در راستای قائم بود، شتاب سه مؤلفه پیدا می‌کرد و مسئله پیچیده‌تر می‌شد. معمولاً، در حل مسائل، آزادیم که جهت محورهای مختصات و محل مبدأ را به دلخواه انتخاب کنیم، به شرط آنکه این انتخاب را در تمام مراحل حل مسئله ثابت نگه داریم.

ریشه منفی، $t = -1.85\text{ s}$ ، چه می‌شود؟ معادلات اولیه حرکت را از زمان 0 به بعد نوشتیم، پس زمان مثبت، حرکت بعدی اسکی‌باز روی شیب را توصیف می‌کند. زمان منفی باید مربوط به حرکت اسکی‌باز پیش از عبور از گوشه شمال غربی شیب (مبدأ انتخابی ما) باشد. جواب منفی می‌گوید که اسکی‌باز می‌توانسته است پیش از رسیدن به مبدأ در $t = 0$ ، یک مسیر محتمل قبلی را پیموده باشد و با سرعت درست (سرعت اولیه مسئله ما) به نقطه مبدأ رسیده باشد. طی این بخش قبلی حرکت، اسکی‌باز باید قبل از رسیدن به گوشه شمال غربی، مسافت 125 m را (در جهت بالای شیب!) در 1.85 s پیموده باشد. مؤلفه‌های سرعت را در $t = -1.85\text{ s}$ به دست بیاورید و چگونگی حرکت اسکی‌باز را در آن زمان تعیین کنید. مختصه y متناظر، در $t = -1.85\text{ s}$ چه بوده است؟ آیا این جواب معقول است؟ بیشترین مقدار مختصات x و y در بازه بین $t = 0$ و $t = 1.85\text{ s}$ چقدر است؟

از حل ریاضی مسائل فیزیکی، خیلی وقتها نتایج غیرمنتظره‌ای به دست می‌آید؛ مثل همین زمان منفی در مثال بالا. اگر در این مسئله فرض کنیم که حرکت اسکی‌باز در $t = 0$ شروع شده است، ریشه منفی برایمان اهمیتی ندارد. اما بد نیست که هر وقت به چنین جوابهایی برخوردید، معنی فیزیکی آنها را بررسی کنید.

۳-۴ حرکت پرتابی

حرکت پرتابی، نمونه‌ای از حرکت با شتاب ثابت است. حرکت دوبعدی ذره‌ای است که به طور مایل در هوا پرتاب می‌شود. حرکت (ایده‌آل) عمومی بیسبال یا توپ گلف، مثالی از این نوع حرکت است. فعلاً فرض

حرکت کرده بود. برای پیدا کردن برد کافی است در معادله ۲۳ بگذاریم $y = 0$. یک جواب این معادله $x = 0$ است؛ جواب دیگر، برد را می‌دهد:

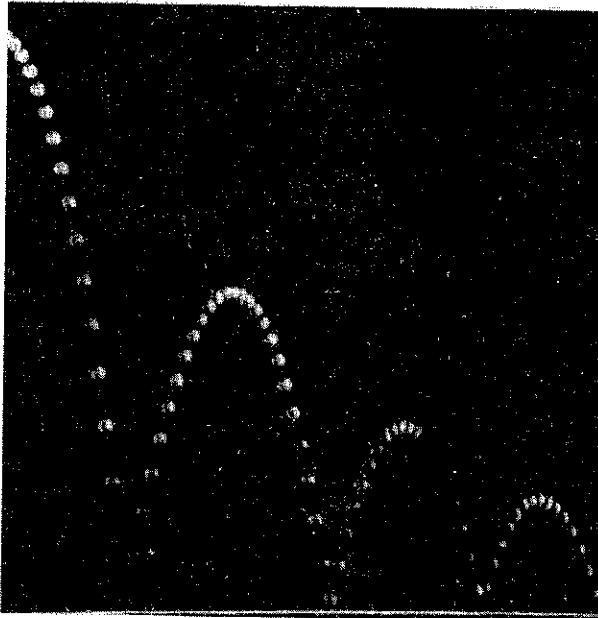
$$R = \frac{2v_0^2}{g} \sin \phi_0 \cos \phi_0$$

$$= \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 \quad (24)$$

در این رابطه، از اتحاد مثلثاتی $\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$ استفاده کرده‌ایم. توجه کنید که اگر سرعت اولیه ثابت باشد، بیشترین مقدار برد به ازای $\phi_0 = 45^\circ$ به دست می‌آید. در این حالت، $\sin 2\phi_0 = 1$ است.

جوابهایی که به دست آوردیم، شکل ایده‌آل حرکت پرتابی بود. یک عامل مهم، یعنی گرانش را در نظر گرفتیم؛ اما عامل دیگری هم وجود دارد که می‌تواند بر حرکت پرتابه اثر کند و اغلب اهمیت دارد — مقاومت هوا. در سرعت‌های کم، معمولاً می‌شود مقاومت هوا را نادیده گرفت، اما در سرعت‌های زیاد، مسیر پرتابه دیگر به شکل سهمی معادله ۲۳ نیست، و برد پرتابه ممکن است خیلی کمتر از مقداری باشد که از معادله ۲۴ به دست می‌آید. در فصل ۶ آثار مقاومت هوا را بررسی خواهیم کرد؛ فعلاً فرض می‌کنیم که معادلات این بخش، حرکت پرتابی را به خوبی توصیف می‌کنند.

شکل ۶ مسیر پرتابه‌ای را نشان می‌دهد که اثر مقاومت هوا بر آن ناچیز است. مسیر کاملاً شبیه به سهمی است. در شکل ۷ حرکت



شکل ۶. عکسی با فلاشهای پی‌درپی (استروبو سکوپیک) از توپ گلفی که از طرف چپ وارد عکس می‌شود و به سطح سختی برمی‌خورد، و از آن وامی‌جهد. حرکت توپ، بین دو برخورد، مسیر سهمی مشخصه حرکت پرتابی را نشان می‌دهد. چرا فکر می‌کنید که ارتفاع جهشها به تدریج کم می‌شود؟ (پاسخ را در فصلهای ۸ و ۱۰ پیدا خواهید کرد.)

مؤلفه عمودی سرعت، در اثر شتاب ثابت رو به پایین، تغییر می‌کند. مقادیر $-g$ و $a_y = -g$ و $v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0$ را در مؤلفه y معادله ۱۱ می‌گذاریم. خواهیم داشت

$$v_y = v_{y_0} + a_y t = v_0 \sin \phi_0 - gt \quad (18)$$

مؤلفه قائم سرعت، درست مثل سرعت سقوط آزاد رفتار می‌کند. (در واقع اگر حرکت شکل ۵ را در دستگاه مرجعی بررسی کنیم که با سرعت v_{x_0} به طرف راست حرکت می‌کند، حرکت ذره حرکت جسمی است که با سرعت اولیه $v_0 \sin \phi_0$ در جهت عمودی به بالا پرتاب شده است.) اندازه بردار سرعت در هر لحظه برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (19)$$

زاویه بردار سرعت با افق در هر لحظه، زاویه ϕ ، از این رابطه به دست می‌آید:

$$\tan \phi = \frac{v_y}{v_x} \quad (20)$$

بردار سرعت در هر نقطه بر مسیر ذره در آن نقطه مماس است (شکل ۵).

مختصه x مکان ذره در هر لحظه، از مؤلفه x معادله ۱۲ (جدول ۱) به دست می‌آید. اگر مقادیر $x_0 = 0$ ، $a_x = 0$ و $v_{x_0} = v_0 \cos \phi_0$ را در این معادله قرار بدهیم نتیجه می‌شود که

$$x = x_0 + v_{x_0} t + \frac{1}{2} a_x t^2 = (v_0 \cos \phi_0) t \quad (21)$$

مختصه y هم از مؤلفه y معادله ۱۲ به دست می‌آید. با $y_0 = 0$ و $a_y = -g$ و $v_{y_0} = v_0 \sin \phi_0$ خواهیم داشت

$$y = y_0 + v_{y_0} t + \frac{1}{2} a_y t^2 = (v_0 \sin \phi_0) t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (22)$$

معادلات ۲۱ و ۲۲، x و y را به صورت تابعی از پارامتر مشترک t ، زمان پرواز، به دست می‌دهند. t را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

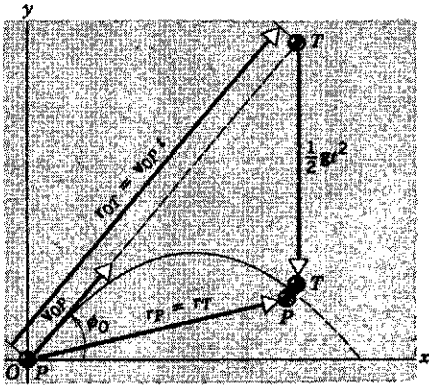
$$y = (\tan \phi_0) x - \frac{g}{2(v_0 \cos \phi_0)^2} x^2 \quad (23)$$

این معادله y را به x مربوط می‌کند و در واقع معادله مسیر پرتابه است. چون v_0 ، ϕ_0 ، و g ثابت‌اند، شکل کلی معادله بالا

$$y = bx - cx^2$$

است، که معادله سهمی است. پس مسیر پرتابه هم سهمی است (شکل ۵).

برد افقی R پرتابه (شکل ۵) طبق تعریف، مسافتی است در راستای افقی که پرتابه می‌پیماید تا به سطحی برسد که از آن شروع به



شکل ۸. جابه‌جایی پرتابه نسبت به مبدا را، در هر زمان t ، می‌شود مجموع دو بردار دانست: $v_{0p}t$ در جهت v_{0p} و $\frac{1}{2}gt^2$ در راستای قائم رو به پایین است.

به اندازه $\frac{1}{2}gt^2$ نسبت به نقطه تعلیق هدف (که اگر گرانش نبود به آن می‌رسید) سقوط کرده است. هدف هم در این مدت به همین اندازه از محل اولیه خود سقوط کرده است. زمانی که گلوله به خط سقوط هدف می‌رسد، همان قدر پایین‌تر از مکان اولیه هدف است که خود هدف پایین‌تر است. پس گلوله به هدف می‌خورد. گلوله اگر سریعتر از این حرکت کند (v_0 بزرگتر باشد)، برد بیشتری هم خواهد داشت و در نقطه بالاتری به خط سقوط هدف می‌رسد؛ اما چون این رویداد، نسبت به حالت قبل، زودتر رخ می‌دهد، هدف هم در این مدت، کمتر سقوط کرده است و باز هم برخورد صورت می‌گیرد. برای سرعت‌های کمتر هم، همین استدلال مشاهده را توضیح می‌دهد.
با استفاده از معادله ۱۲

$$r = r_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

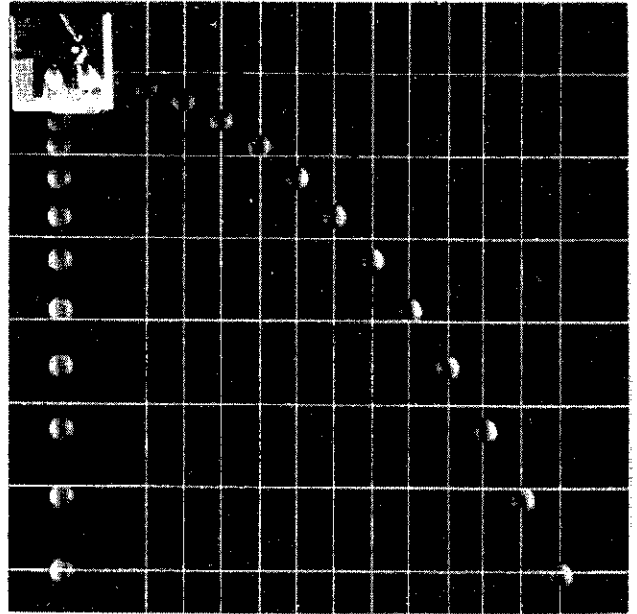
می‌توانیم ماوقع را به‌طور تحلیلی هم نشان بدهیم. به کمک این معادله، مکان پرتابه و هدف را در زمان دلخواه t به‌دست می‌آوریم. برای پرتابه P ، $r_0 = 0$ و $a = g$ است، پس

$$r_P = v_{0p}t + \frac{1}{2}gt^2$$

برای هدف T ، $r_0 = r_{0T}$ ، $v_0 = 0$ و $a = g$ است، پس

$$r_T = r_{0T} + \frac{1}{2}gt^2$$

اگر قرار باشد برخورد صورت بگیرد، r_P باید با r_T برابر شود. مقایسه دو معادله نشان می‌دهد که این برخورد همیشه در زمانی اتفاق می‌افتد که $r_{0T} = v_{0p}t$ شود، یعنی در زمان $t = r_{0T}/v_{0p}$ که در غیاب گرانش، پرتابه بی‌شتاب می‌بایست در امتداد خط پرتاب به هدف ثابت می‌رسید. چون ضرب شدن بردار در یک اسکالر، جهت آن را تغییر نمی‌دهد، از معادله $r_{0T} = v_{0p}t$ نتیجه می‌شود که r_{0T} و



شکل ۷. توپ I از حالت سکون رها می‌شود و در همان زمان، توپ II به طرف راست پرتاب می‌شود. توجه کنید که توپها در راستای قائم دقیقاً با یک سرعت سقوط می‌کنند؛ حرکت افقی توپ II بر سرعت سقوط قائم آن اثری ندارد. فاصله بین نوردهیهای متوالی این عکس استروبی $1/30$ s بوده است. آیا سرعت افقی توپ II ثابت به نظر می‌رسد؟

پرتابه‌ای که به‌طور افقی پرتاب شده با حرکت جسمی که همزمان رها شده و سقوط آزاد می‌کند مقایسه شده است. در اینجا می‌توانید پیش‌بینیهای معادلات ۲۱ و ۲۲ را، به‌ازای $\phi_0 = 0$ ، مستقیماً تحقیق کنید. توجه کنید که (۱) حرکت افقی پرتابه اول واقعاً همانی است که از معادله ۲۱ به‌دست می‌آید: مؤلفه x ، در بازه‌های زمانی یکسان افزایش یکسانی دارد، و این افزایش مستقل از حرکت در راستای y است؛ و (۲) مؤلفه y حرکت‌های دو پرتابه یکسان است: مسافت طی شده در بازه‌های یکسان برای هر دو پرتابه یکی است، و به حرکت افقی یکی از آنها بستگی ندارد.

زدن هدف در حال سقوط

یکی از نمایشهای زیبای کلاسی این است که: با یک تفنگ بادی هدفی را که در ارتفاع بالاتری از تفنگ معلق است نشانه می‌گیریم و به آن شلیک می‌کنیم. ترتیبی داده شده است که هدف، همزمان با خروج "گلوله" از لوله تفنگ، رها می‌شود و سقوط آزاد می‌کند. در این نمایش سرعت اولیه گلوله هر چه باشد، گلوله همیشه به هدف در حال سقوط می‌خورد.

ساده‌ترین راه فهمیدن این موضوع این است: اگر شتاب گرانش نبود، هدف سقوط نمی‌کرد و گلوله درست در جهت خطی که آن را به هدف وصل می‌کند حرکت می‌کرد (شکل ۸). گرانش موجب می‌شود که هر دو جسم با سرعت یکسان، نسبت به نقطه‌ای که در صورت نبودن گرانش در آنجا می‌بودند سقوط کنند. بنابراین، در زمان t گلوله

از هواپیما از چشم دوربینی در همان هواپیما، یا در هواپیمای دیگری که "پابه پای" اولی پرواز می‌کند، دیده‌اید؟

مثال ۴. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیه 15.5m/s با زاویه 36° نسبت به افق شوت می‌کند. با فرض اینکه توپ در یک صفحه قائم حرکت کند، (الف) زمان t_1 برای اینکه توپ به نقطه اوج مسیر خود برسد چقدر است؟ (ب) توپ تا چه ارتفاعی اوج می‌گیرد؟ (ج) برد توپ و زمان پرواز آن چقدر است؟ (د) سرعت توپ را در لحظه برخورد به زمین پیدا کنید.

حل: (الف) در نقطه اوج، مؤلفه قائم سرعت صفر است. t را از معادله ۱۸ به دست می‌آوریم:

$$t = \frac{v_0 \sin \phi_0 - v_y}{g}$$

در این معادله اگر مقادیر

$$v_y = 0, v_0 = 15.5\text{m/s}, \phi_0 = 36^\circ, g = 9.8\text{m/s}^2$$

را بگذاریم، نتیجه می‌گیریم

$$t_1 = \frac{(15.5\text{m/s})(\sin 36^\circ)}{9.8\text{m/s}^2} = 0.93\text{s}$$

(ب) توپ در $t = 0.93\text{s}$ به نقطه اوج می‌رسد از معادله ۲۲

$$y = (v_0 \sin \phi_0)t - \frac{1}{2}gt^2$$

معلوم می‌شود که

$$y_{\max} = (15.5\text{m/s})(\sin 36^\circ)(0.93\text{s}) - \frac{1}{2}(9.8\text{m/s}^2)(0.93\text{s})^2 = 4.2\text{m}$$

(ج) برد R از رابطه ۲۴ به دست می‌آید

$$R = \frac{v_0^2}{g} \sin 2\phi_0 = \frac{(15.5\text{m/s})^2}{9.8\text{m/s}^2} \sin 72^\circ = 23.3\text{m}$$

می‌توانیم در معادله ۲۲ بگذاریم $y = 0$ و زمان t_2 برای برگشت توپ به زمین را پیدا کنیم. نتیجه می‌شود که

$$t_2 = \frac{2v_0 \sin \phi_0}{g} = \frac{2(15.5\text{m/s})(\sin 36^\circ)}{9.8\text{m/s}^2} = 1.86\text{s}$$

توجه کنید که $t_2 = 2t_1$ است، که البته باید هم باشد چون زمان لازم برای بالا رفتن توپ (رسیدن آن از زمین به نقطه اوج) با زمان لازم برای سقوط توپ (رسیدن آن از نقطه اوج به زمین) برابر است.

v_0 باید هم جهت باشند. یعنی تفنگ را باید درست به طرف مکان اولیه هدف نشانه گرفت.

مثال ۳. می‌خواهیم بسته‌ای را از هواپیما روی هدف بیندازیم. هواپیما با سرعت ثابت افقی 155km/h در ارتفاع 225m از هدف پرواز می‌کند؛ جهت پرواز آن به طرف نقطه‌ای مستقیماً در بالای هدف است. زاویه خط دید هدف از هواپیما، α ، در لحظه رها کردن بسته چقدر باشد تا بسته به هدف برسد (شکل ۹)؟

حل: دستگاه مرجعی انتخاب می‌کنیم که نسبت به زمین ثابت، و مبدأ آن O ، نقطه رها شدن بسته باشد. حرکت بسته در لحظه رها شدن، همان حرکت هواپیماست. پس سرعت اولیه بسته، v_0 ، در راستای افق و اندازه آن 155km/h است. زاویه پرتاب ϕ_0 صفر است. زمان سقوط از معادله ۲۲ به دست می‌آید. با $\phi_0 = 0$ و $y = -225\text{m}$ نتیجه می‌شود که

$$t = \sqrt{\frac{-2y}{g}} = \sqrt{\frac{-(2)(-225\text{m})}{9.8\text{m/s}^2}} = 6.78\text{s}$$

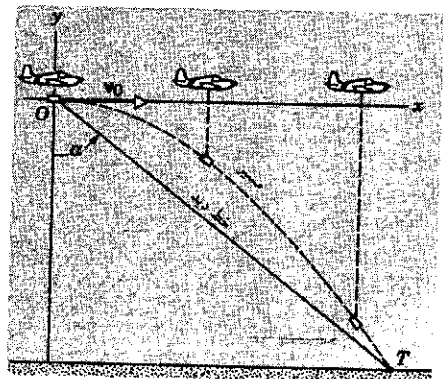
توجه کنید که زمان سقوط در پرتاب افقی، به سرعت هواپیما بستگی ندارد. (در پرتاب مایل چنین نیست؛ مسئله ۳۸). مسافت افقی‌ای که بسته در این مدت می‌پیماید از معادله ۲۱ به دست می‌آید:

$$x = v_{x_0} t = (155\text{km/h})(1\text{h}/3600\text{s})(6.78\text{s}) = 0.292\text{km} = 292\text{m}$$

بنابراین، زاویه دید (شکل ۹) باید برابر باشد با

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{x}{|y|} = \tan^{-1} \frac{292\text{m}}{225\text{m}} = 52^\circ$$

آیا مسیر حرکت بسته از دیدگاه دستگاه مرجعی که نسبت به هواپیما ساکن است، سهموی به نظر می‌رسد؟ (آیا تاکنون فیلمی از پرتاب بمب



شکل ۹. مثال ۳.

شکل ۱۰ الف این حرکت را نشان می‌دهد. فرض کنید که P_1 مکان ذره در زمان t_1 و P_2 مکان آن در زمان $t_2 = t_1 + \Delta t$ باشد و سرعت در P_1 بردار v_1 است که در این نقطه مماس بر منحنی است. سرعت در P_2 بردار v_2 است. اندازه v_1 و v_2 یکسان و برابر با v است، اما جهت آنها یکی نیست. طول مسیری که طی زمان Δt پیموده شده، همان طول قوس P_1P_2 است که برابر است با $r\theta$ (اگر θ را برحسب رادیان بسنجیم)، و همچنین برابر است با $v\Delta t$. پس،

$$r\theta = v\Delta t \quad (25)$$

اکنون دو بردار v_1 و v_2 را به صورت شکل ۱۰ ب، از یک نقطه رسم می‌کنیم. این کار مجاز است، به شرطی که اندازه و جهت بردارها، همان اندازه و جهتشان در شکل ۱۰ الف باشد. به کمک شکل ۱۰ ب، تغییر سرعت ذره از P_1 به P_2 ، کاملاً مشهود است. این تغییر، $\Delta v = v_2 - v_1$ برداری است که باید به v_1 اضافه کنیم تا v_2 به دست بیاید. اگر این تغییر سرعت در بازه P_1P_2 را از نقطه وسط قوس P_1P_2 بکشیم، Δv به طرف مرکز دایره خواهد بود.

مثلث OQ_1Q_2 که متشکل از v_1 ، v_2 و Δv است با مثلث CP_1P_2 (شکل ۱۰ ج)، که از وتر P_1P_2 و شعاعهای CP_1 و CP_2 ساخته می‌شود متشابه است چون که هر دو مثلث متساوی الساقین‌اند و زاویه رأسشان با هم برابر است؛ زاویه θ بین v_1 و v_2 همان زاویه P_1CP_2 است زیرا v_1 بر CP_1 و v_2 بر CP_2 است. در شکل ۱۰ ب، با توجه به نیمساز زاویه θ می‌بینیم که

$$\frac{1}{2}\Delta v = v \sin \frac{\theta}{2} \quad (26)$$

حالا با استفاده از نتایج معادلات ۲۵ و ۲۶ برای Δv و Δt ، اندازه شتاب متوسط را در این بازه زمانی به دست می‌آوریم:

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{2v \sin(\theta/2)}{r\theta/v} = \frac{v^2 \sin(\theta/2)}{r \theta/2} \quad (27)$$

برای به دست آوردن شتاب لحظه‌ای، حد این عبارت را در $\Delta t \rightarrow 0$ در نظر می‌گیریم. اگر Δt کوچک باشد، زاویه θ هم کوچک می‌شود. در این مورد می‌توانیم تقریب زاویه کوچک، $\sin x \approx x$ را به کار ببریم. (این رابطه فقط وقتی درست است که زاویه برحسب رادیان بیان شود. مثلاً، اگر $x = 5^\circ = 0.0873 \text{ rad}$ باشد، $\sin x = 0.0872$ است.) پس برای زوایای کوچک $\theta/2 \approx \sin(\theta/2)$ است و کسر دوم طرف راست معادله ۲۷ به $1/r$ می‌گراید. دقت کنید که در کسر اول طرف راست معادله ۲۷، نه v و نه r هیچ‌یک به Δt بستگی ندارند. بنابراین مقدار این کسر در حدگیری تغییر نمی‌کند. به این ترتیب، اندازه شتاب لحظه‌ای به دست می‌آید:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v^2 \sin(\theta/2)}{r \theta/2} = \frac{v^2}{r} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sin(\theta/2)}{\theta/2}$$

می‌شود دید که این نتایج با معادله $x = x_0 + v_{x0} t$ هم سازگارند. اگر بگذاریم $t = t_2$ باید برابر با R شود. از معادله ۲۱

$$R = v_{x0} t_2 = (v_0 \cos \phi_0) t_2 = 23.3 \text{ m}$$

که همان مقداری است که قبلاً به دست آمد.

(د) برای پیدا کردن سرعت توپ در لحظه برخورد با زمین، معادله ۱۷ را به کار می‌بریم و v_x را به دست می‌آوریم. v_x در طول حرکت ثابت می‌ماند:

$$v_x = v_0 \cos \phi_0 = (15.0 \text{ m/s})(\cos 36^\circ) = 12.0 \text{ m/s}$$

از معادله ۱۸ هم v_y را در $t = t_2$ به دست می‌آوریم:

$$v_y = v_0 \sin \phi_0 - gt = (15.0 \text{ m/s})(\sin 36^\circ) - (9.8 \text{ m/s}^2)(1.86 \text{ s}) = -9.1 \text{ m/s}$$

پس اندازه سرعت برابر است با

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(12.0 \text{ m/s})^2 + (-9.1 \text{ m/s})^2} = 15.0 \text{ m/s}$$

و جهت آن از این رابطه به دست می‌آید

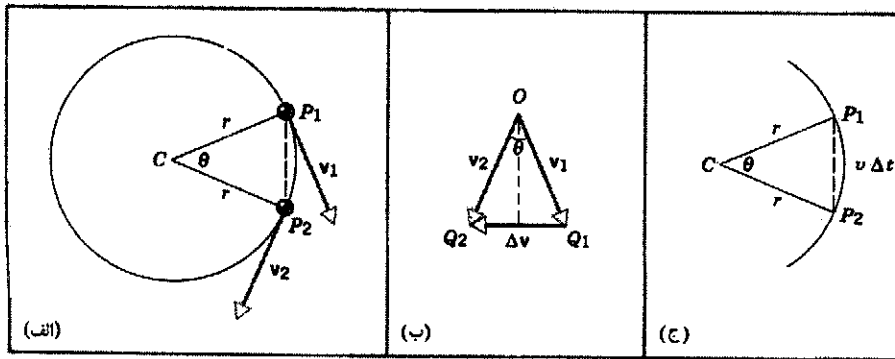
$$\tan \phi = v_y/v_x = -9.1/12.0$$

بنابراین، $\phi = -36^\circ$ ، یا 36° ساعتگرد نسبت به محور x است. توجه کنید که $\phi = -\phi_0$ است، یعنی همان است که از تقارن مسئله انتظار می‌رود (شکل ۵).

اندازه سرعت نهایی با اندازه سرعت اولیه برابر از آب در آمد. می‌توانید بگویید چرا؟ آیا این صرفاً یک تصادف است؟

۴-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت پرتابی، هم اندازه و هم جهت شتاب ثابت است، اما اندازه و جهت سرعت هر دو تغییر می‌کنند. اکنون حالت خاصی را بررسی می‌کنیم که ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازه سرعت آن ثابت است. چنانکه بعداً خواهیم دید، در این حرکت اندازه سرعت و اندازه شتاب، هر دو، ثابت‌اند اما جهت هر یک از این دو بردار به‌طور پیوسته تغییر می‌کند. این وضعیت را حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌نامند. از نمونه‌های این نوع حرکت می‌توانیم از حرکت ماهواره‌های زمین و حرکت نقاط روی اجسام چرخانی مثل پره‌های پنکه، صفحه گرامافون، و دیسک کامپیوتر نام ببریم. در واقع، اگر بتوانیم خودمان را ذره فرض کنیم، ما هم به خاطر چرخش زمین حرکت دایره‌ای یکنواخت داریم.



شکل ۱۰. حرکت دایره‌ای یکنواخت (الف) ذره روی دایره حرکت می‌کند و اندازه سرعت آن ثابت می‌ماند. سرعت ذره در دو نقطه P_1 و P_2 نشان داده شده است. (ب) تغییر سرعت ذره از P_1 تا P_2 ، Δv است. (ج) ذره در زمان Δt قوس P_1P_2 را طی می‌کند.

سرعت است. از نظر ابعادی

$$[a] = \frac{[v^2]}{[r]} = \frac{(L/T)^2}{L} = \frac{L}{T^2}$$

که همان بعد معمول شتاب است. پس یکای این شتاب ممکن است m/s^2 یا km/h^2 یا هر یکای دیگری با بعد L/T^2 باشد.

شتاب ناشی از تغییر جهت سرعت همانقدر واقعی است و همانقدر، از هر نظر، "شتاب" است که شتاب ناشی از تغییر اندازه سرعت. شتاب، طبق تعریف، آهنگ تغییر زمانی سرعت است؛ سرعت هم بردار است، یعنی هم تغییر اندازه آن می‌تواند منجر به شتاب شود هم تغییر جهتش. ویژگیهای جهتی کمیت‌های فیزیکی برداری را نمی‌شود نادیده گرفت؛ تغییرات جهتی این کمیتها درست همانقدر اهمیت دارد که تغییرات مقداری آنها.

باید بر این نکته تأکید کرد که لزومی ندارد در جهت شتاب، حرکت داشته باشیم، و در حالت کلی هیچ رابطه مشخصی بین جهت‌های a و v وجود ندارد. شکل ۱۲ مثالهایی را نشان می‌دهد که در آنها زاویه θ بین v و a از 0° تا 180° تغییر می‌کند. تنها در یک مورد، که $\theta = 0^\circ$ است، حرکت در جهت a است.

مثال ۵. ماه به دور زمین می‌گردد و زمان یک گردش کامل آن 27.3 روز است. فرض کنید که مدار دایره‌ای، و شعاع آن 238000 مایل است. اندازه شتاب ماه به طرف زمین چقدر است؟

حل: $r = 238000 \text{ mi} = 3.82 \times 10^8 \text{ m}$ است. زمان یک گردش کامل (زمان تناوب) $T = 27.3 \text{ d} = 2.36 \times 10^6 \text{ s}$ است. بنابراین اندازه سرعت ماه (که آن را ثابت فرض می‌کنیم) برابر است با

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi(3.82 \times 10^8 \text{ m})}{2.36 \times 10^6 \text{ s}} = 1018 \text{ m/s}$$

شتاب مرکزگرا برابر است با

$$a = \frac{v^2}{r} = \frac{(1018 \text{ m/s})^2}{3.82 \times 10^8 \text{ m}}$$

$$= 0.00271 \text{ m/s}^2 \quad \text{یا} \quad 2.76 \times 10^{-4} g_n$$

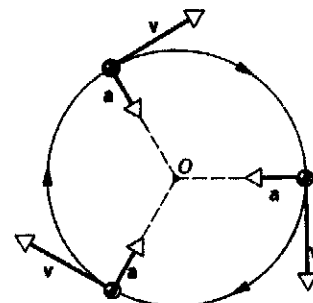
با استفاده از تقریب زاویه کوچک، به جای حد باقی‌مانده ۱ می‌گذاریم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{v^2}{r} \quad (28)$$

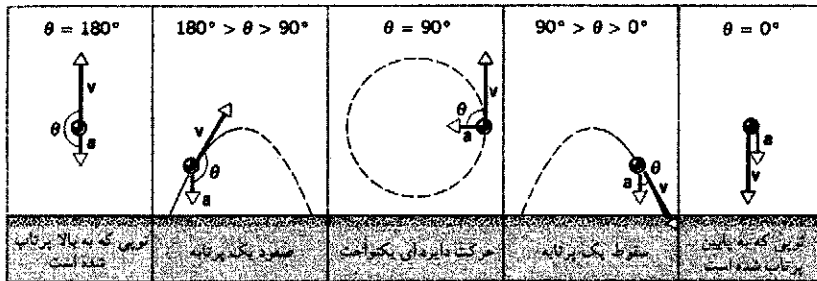
چون جهت شتاب متوسط همان جهت Δv است، جهت a همیشه شعاعی و به طرف مرکز دایره، (یا هر قوس دایره‌ای از مسیر حرکت) است.

شکل ۱۱ رابطه لحظه‌ای بین v و a را در نقاط مختلف مسیر نشان می‌دهد. اندازه v ثابت است، اما جهت آن مدام تغییر می‌کند. این سرعت منجر به شتابی (a) می‌شود که آن هم اندازه‌اش ثابت است ولی جهتش مدام تغییر می‌کند. سرعت v همواره مماس بر دایره و در جهت حرکت است؛ شتاب a همواره در راستای شعاع و به طرف داخل است. به همین علت، a را شتاب شعاعی، یا مرکزگرا می‌نامند. در بخش بعدی، معادله ۲۸ را با استفاده از بردارهای یکه به‌دست خواهیم آورد.

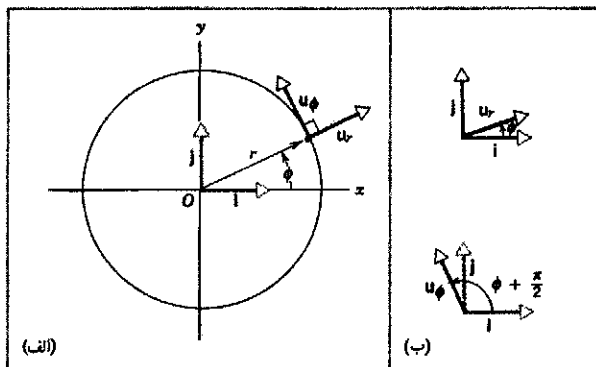
هم در سقوط آزاد و هم در حرکت پرتابی، جهت و اندازه a ثابت است، و می‌توانیم معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار ببریم. این معادلات را نمی‌شود برای حرکت دایره‌ای یکنواخت به‌کار برد، زیرا a جهتش تغییر می‌کند و بنابراین ثابت نیست. یکای شتاب مرکزگرا همان یکای شتاب ناشی از تغییر اندازه



شکل ۱۱. در حرکت دایره‌ای یکنواخت، شتاب a همواره به طرف مرکز دایره است، و بنابراین همواره بر v عمود است.



شکل ۱۲. رابطه هندسی میان v و a برای حرکت‌های مختلف.



شکل ۱۳. (الف) ذره‌ای که در جهت پادساعتگرد روی دایره‌ای به شعاع r حرکت می‌کند. (ب) بردارهای یکه u_r و u_ϕ و رابطه آنها با i و j .

می‌شود. با استفاده از روشهای برداری می‌توانیم ارتباط میان سرعت و شتاب، و جهت شتاب را تعیین کنیم.

ابتدا معادله ۲۸ برای شتاب مرکزگرا در سرعت ثابت را دوباره، این بار با روشهای برداری کلی‌تر، به دست می‌آوریم. شکل ۱۳ ذره‌ای را نشان می‌دهد که حول مبدأ O یک دستگاه مرجع، حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد. برای این حرکت، مختصات قطبی r و ϕ مفیدتر از مختصات دکارتی x و y است، زیرا r در طی حرکت ثابت می‌ماند و ϕ با زمان به صورت خطی ساده‌ای افزایش می‌یابد؛ رفتار x و y طی این نوع حرکت پیچیده‌تر است. رابطه این دو دسته مختصات با هم به شکل زیر است

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \text{و} \quad \phi = \tan^{-1}(y/x) \quad (29)$$

یا (روابط معکوس)

$$x = r \cos \phi \quad \text{و} \quad y = r \sin \phi \quad (30)$$

در دستگاه مختصات دکارتی، بردارهای یکه i و j را برای توصیف حرکت در صفحه xy به کار می‌بریم، اینجا بهتر است دو بردار یکه جدید، u_r و u_ϕ معرفی کنیم. طول این دو بردار هم، مثل i و j ، یک است. اینها هم بی‌بعدند، و فقط جهت مشخص می‌کنند.

۱. می‌توان از این بخش گذشت یا آن را تا بحث مربوط به حرکت دورانی در فصل ۱۱ به تعویق انداخت.

g_n (یعنی 9.80665 m/s^2) مقدار استاندارد بین‌المللی پذیرفته شده برای g است. این مقدار استاندارد، که در واقع مقدار تقریبی شتاب سقوط آزاد در سطح دریا در عرض جغرافیایی 45° است، خیلی وقتها به عنوان مقیاسی برای شتاب به کار می‌رود. مثلاً شتاب وارد بر خلبانهای جت، یا شتاب وارد بر مسافران اربابه‌های تفریحی بازیگانه‌ها را معمولاً برحسب g_n بیان می‌کنند.

مثال ۶. ماهواره‌ای در ارتفاع $h = 210 \text{ km}$ از سطح زمین، به دور زمین می‌گردد. در این ارتفاع، $g = 9.2 \text{ m/s}^2$ است. (این مقدار از 9.8 m/s^2 کمتر است چون g با زیاد شدن ارتفاع کم می‌شود، فصل ۱۶) سرعت این ماهواره را پیدا کنید. شعاع زمین $R = 6370 \text{ km}$ است.

حل: ماهواره هم، مثل اجسام دیگر نزدیک به زمین، یک شتاب g به طرف مرکز زمین دارد. این شتاب، همراه با سرعت مماسی ماهواره، موجب می‌شود که حرکت ماهواره دایره‌ای باشد. پس شتاب مرکزگرا همان شتاب گرانشی g است، و از معادله ۲۸ ($a = v^2/r$) به‌ازای $a = g$ و $r = R + h$ به دست می‌آید

$$g = \frac{v^2}{R + h}$$

یا

$$v = \sqrt{(R+h)g} = \sqrt{(6580 \text{ km})(9.2 \text{ m/s}^2)(10^3 \text{ m/km})}$$

$$= 7780 \text{ m/s} \quad \text{یا} \quad 17400 \text{ mi/h}$$

با این سرعت، ماهواره در هر 1.48 h یک بار به دور زمین می‌گردد.

۵-۴ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای (اختیاری)
چنانکه در بخش پیش دیدیم، ذره‌ای که با (مقدار) سرعت ثابت روی قوسی از دایره حرکت می‌کند شتاب مرکزگرا دارد. البته اگر اندازه سرعت ثابت نباشد باز هم شتاب مرکزگرا در کار هست، اما در این حالت ذره یک شتاب مماسی هم دارد که موجب تغییر سرعت مماسی آن

ذره با سرعت ثابت روی دایره حرکت می‌کند، پس $d\phi/dt$ برابر است با زاویه‌ای که در یک دور طی می‌شود (2π رادیان) تقسیم بر زمان پیمودن یک دور (مسافت $2\pi r$ تقسیم بر سرعت v):

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{2\pi}{2\pi r/v} = \frac{v}{r} \quad (37)$$

اکنون اگر معادله ۳۷ را در معادله ۳۶ بگذاریم، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= -\mathbf{u}_r v \frac{v}{r} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{v^2}{r} \end{aligned} \quad (38)$$

می‌بینیم که اندازه شتاب، ثابت و برابر با v^2/r است (همان‌طور که در معادله ۲۸ به‌دست آوردیم)، و جهت شتاب، شعاعی و به طرف داخل است (یعنی، برخلاف جهت \mathbf{u}_r). ضمن حرکت ذره روی دایره، جهت \mathbf{u}_r و \mathbf{a} نسبت به محورهای مختصات x و y تغییر می‌کند، زیرا جهت شعاعی تغییر می‌کند.

شتاب مماسی در حرکت دایره‌ای

اکنون حالت کلی‌تری را بررسی می‌کنیم که در آن اندازه سرعت v ذره‌ای که روی دایره حرکت می‌کند ثابت نیست. در این مورد هم از روشهای برداری و مختصات قطبی استفاده می‌کنیم. اینجا هم سرعت از معادله ۳۳ به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi$$

با این تفاوت که در این مورد نه تنها \mathbf{u}_ϕ بلکه v (اندازه سرعت) هم با زمان تغییر می‌کند. با استفاده از رابطه مشتق حاصل‌ضرب، شتاب را به‌دست می‌آوریم:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d(v\mathbf{u}_\phi)}{dt} = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} + \mathbf{u}_\phi \frac{dv}{dt} \quad (39)$$

در معادله ۳۴، جمله دوم طرف راست معادله ۳۹ وجود نداشت، زیرا v را ثابت فرض کرده بودیم. جمله اول طرف راست معادله ۳۹، چنانکه قبلاً به‌دست آوردیم، $-\mathbf{u}_r(v^2/r)$ است. به این ترتیب، معادله ۳۹ به‌صورت زیر در می‌آید

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r a_R + \mathbf{u}_\phi a_T \quad (40)$$

که در آن، $a_R = v^2/r$ و $a_T = dv/dt$ است. جمله اول، $-\mathbf{u}_r a_R$ ، مؤلفه برداری \mathbf{a} در راستای شعاعی به طرف مرکز دایره است، و ناشی از تغییر جهت سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار a_R و اندازه آن، هر دو را شتاب مرکزگرا می‌نامند. جمله دوم، $\mathbf{u}_\phi a_T$ ، مؤلفه برداری \mathbf{a} در جهت مماس بر مسیر ذره است، و ناشی از تغییر اندازه سرعت حرکت دایره‌ای است (شکل ۱۴). بردار a_T و اندازه آن a_T ، هر دو، را شتاب مماسی می‌نامند.

بردار یکه \mathbf{u}_r در هر نقطه در جهت افزایش r در آن نقطه است. این بردار در راستای شعاع و به طرف خارج از مرکز است. بردار یکه \mathbf{u}_ϕ در هر نقطه در جهت افزایش ϕ در آن نقطه است. این بردار در هر نقطه بر دایره‌ای به مرکز مبدأ که از آن نقطه می‌گذرد مماس، و در جهت پادساعتگرد است. چنانکه در شکل ۱۳ الف می‌بینیم، \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ برهم عمودند. اختلاف \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ با بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} در این است که جهت \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ ، نقطه به نقطه عوض می‌شود؛ بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} بردارهای ثابتی نیستند. بنابراین وقتی از عبارتهای شامل بردارهای یکه مشتق می‌گیریم، \mathbf{i} و \mathbf{j} را می‌توانیم ثابت بگیریم، اما \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ را نمی‌توانیم. بردارهای یکه \mathbf{u}_r و \mathbf{u}_ϕ را می‌شود برحسب بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} ، به‌صورت زیر نوشت (شکل ۱۳ ب):

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i} \cos \phi + \mathbf{j} \sin \phi \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\phi &= \mathbf{i} \cos(\phi + \pi/2) + \mathbf{j} \sin(\phi + \pi/2) \\ &= -\mathbf{i} \sin \phi + \mathbf{j} \cos \phi \end{aligned} \quad (22)$$

در جملاتی از نوع $\mathbf{i} \cos \phi$ بردار را در اسکار ضرب کرده‌ایم و ترتیب نوشتن عاملها مهم نیست؛ این جمله را به شکل $\mathbf{i} \cos \phi$ می‌شود نوشت.

اگر ذره با اندازه سرعت ثابت روی دایره حرکت کند، بردار سرعت آن مؤلفه شعاعی ندارد، و کلاً در جهت \mathbf{u}_ϕ است. به‌علاوه، اندازه سرعت همان v ثابت است. پس،

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_\phi \quad (23)$$

یعنی v بردایره مماس است و اندازه‌اش ثابت است، اما جهتش تغییر می‌کند.

حالا می‌توانیم شتاب را به‌دست بیاوریم:

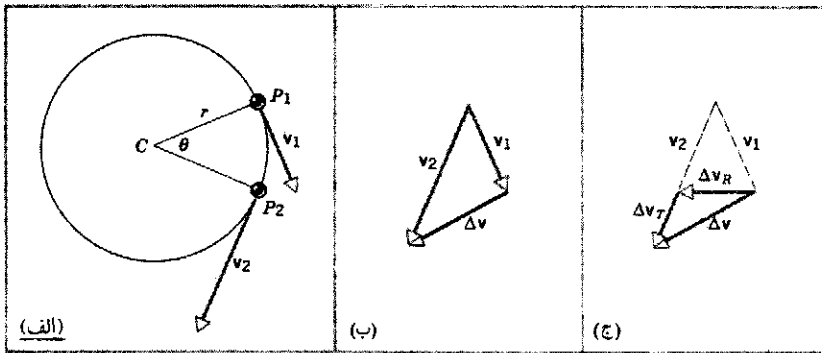
$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{u}_\phi) = v \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} \quad (24)$$

توجه کنید که سرعت ثابت v از مشتق بیرون می‌آید. برای به‌دست آوردن مشتق بردار یکه \mathbf{u}_ϕ ، معادله ۲۲ را به‌کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}_\phi}{dt} &= -\mathbf{i} \frac{d(\sin \phi)}{dt} + \mathbf{j} \frac{d(\cos \phi)}{dt} \\ &= -\mathbf{i} \cos \phi \frac{d\phi}{dt} - \mathbf{j} \sin \phi \frac{d\phi}{dt} \\ &= (-\mathbf{i} \cos \phi - \mathbf{j} \sin \phi) \frac{d\phi}{dt} \\ &= -\mathbf{u}_r \frac{d\phi}{dt} \end{aligned} \quad (25)$$

در آخرین مرحله، معادله ۲۱ را به‌کار برده‌ایم. به این ترتیب،

$$\mathbf{a} = -\mathbf{u}_r v \frac{d\phi}{dt} \quad (26)$$



شکل ۱۴. (الف) در حرکت دایره‌ای غیریکنواخت، اندازه سرعت متغیر است. (ب) تغییر سرعت از P_1 تا P_2 (ج) Δv شامل دو بخش است: Δv_R ، ناشی از تغییر جهت v ، و Δv_T ، ناشی از تغییر اندازه v ، در حد $\Delta t \rightarrow 0$ به طرف مرکز دایره، و Δv_T مماس بر مسیر است.

طرف داخل است. این رد در اتاقک حباب پراز هیدروژن مایع تشکیل شده است. حرکت الکترون، در اثر حرکت در مایع اتاقک طوری کند می‌شود که سرعت v آن به‌طور منظم کاهش می‌یابد. بنابراین، الکترون در هر نقطه یک شتاب مماسی a_T دارد که از dv/dt به دست می‌آید. البته الکترون روی دایره حرکت نمی‌کند ولی قوسهای کوچک مارپیچ کاملاً شبیه قوسهای دایره‌ای به شعاع r اند. پس شتاب مرکزگرای a_R در هر نقطه v^2/r است، که در آن r شعاع مسیر در آن نقطه است. با کاهش انرژی ذره، v و r هر دو کوچک می‌شوند. شتاب شعاعی الکترون ناشی از میدان مغناطیسی‌ای است که در اتاقک حباب حضور دارد. این میدان بر صفحه شکل ۱۵ عمود است (فصل ۳۴).

اندازه شتاب لحظه‌ای برابر است با

$$a = \sqrt{a_T^2 + a_R^2} \quad (41)$$

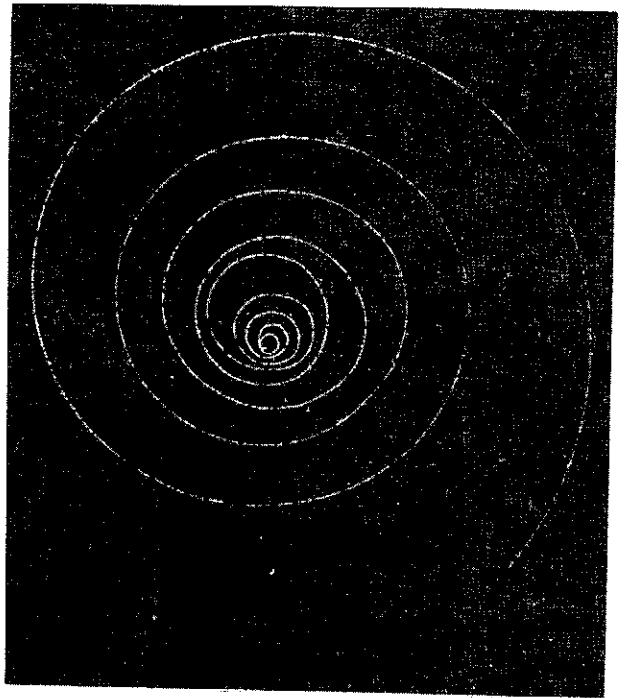
اگر اندازه سرعت ثابت باشد، $a_T = dv/dt = 0$ است و معادله ۴۰ به معادله ۳۸ تبدیل می‌شود. اگر اندازه سرعت ثابت نباشد، a_T صفر نمی‌شود و a_R هم، نقطه به نقطه تغییر می‌کند. اندازه سرعت v ممکن است چنان تغییر کند که a_T ثابت نباشد؛ در این صورت، a_R و a_T هر دو، نقطه به نقطه تغییر می‌کنند. شکل ۱۵ رد یک الکترون پراثری است که به شکل مارپیچی به

۴-۶ حرکت نسبی

فرض کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که با سرعت ثابت 55 mi/h حرکت می‌کند. اجسام دیگر موجود در اتومبیل هم با همان سرعت حرکت می‌کنند؛ سرعت آنها نسبت به زمین 55 mi/h است، اما نسبت به شما صفر است. در این اتومبیل می‌توان یک دسته آزمایش معمولی فیزیک انجام داد؛ نتیجه این آزمایشها از حرکت یکنواخت اتومبیل متأثر نمی‌شود. مثلاً می‌توانید توبی را (در دستگاه مرجع خودتان) به بالا پرتاب کنید؛ خواهید دید که توب مستقیماً به پایین سقوط می‌کند. توب (به خاطر حرکت اتومبیل) حرکت افقی دارد، اما شما هم همان حرکت افقی را دارید، در حرکت افقی نسبی صفر است.

اما نتیجه از دید ناظر زمینی فرق می‌کند. توب یک مؤلفه افقی سرعت دارد که 55 mi/h است، و یک مؤلفه عمودی که ناشی از حرکتی است که شما به آن می‌دهید. می‌دانیم که پرتابه‌ای با این سرعت، مسیر سهموی دارد. بنابراین، معادلاتی که شما و ناظر زمینی برای توصیف حرکت به‌کار می‌برید، با هم متفاوت‌اند، اما قوانین فیزیکی‌ای که بر حرکت توب حاکم‌اند از نظر هر دو ناظر یکی است؛ مثلاً هر دو شما یک مقدار برای شتاب سقوط آزاد به دست می‌آورید.

اتومبیل دیگری که با سرعت 57 mi/h از شما سبقت بگیرد، از نظر شما (نسبت به چارچوب مرجع شما) به آهستگی با سرعت 2 mi/h (یعنی $57 \text{ mi/h} - 55 \text{ mi/h}$) در حرکت است. اگر شواهد خلاف ... منظره، که از کنار شما می‌گذرند، هوایی که از اطراف



شکل ۱۵. رد یک الکترون در اتاقک حباب هیدروژن مایع. الکترون یک شتاب شعاعی دارد، که ناشی از میدان مغناطیسی است. این شتاب می‌خواهد که مسیر حرکت را دایره‌ای کند. اما الکترون، در اثر برخورد با اتمهای هیدروژن، کند می‌شود. بنابراین، یک شتاب مماسی هم دارد. مسیر حاصل از این دو شتاب، مارپیچ است.

نشان داده شده است، S و S' ، هر یک، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان تعیین می‌کنند. ذره P ، از دید S در نقطه متناظر با بردار r_{PS} ، و از دید S' در نقطه متناظر با بردار $r_{PS'}$ است. از شکل ۱۶ می‌بینیم که رابطه میان این سه بردار به صورت زیر است

$$r_{PS} = r_{S'S} + r_{PS'} = r_{PS'} + r_{S'S} \quad (42)$$

در رابطه بالا، برای عوض کردن ترتیب بردارها، از قانون جابه‌جایی‌پذیری جمع برداری استفاده کرده‌ایم و باز هم به ترتیب شاخصها دقت کنید. رابطه ۴۲، به زبان غیر ریاضی، می‌گوید که: "مکان P از دید S برابر است با مکان P از دید S' به اضافه مکان S' از دید S ."

فرض کنید ذره P با سرعت $v_{PS'}$ نسبت به S' حرکت می‌کند. S' چه سرعتی برای این ذره اندازه‌گیری می‌کند؟ برای پاسخ به این سؤال کافی است که از معادله ۴۲ نسبت به زمان مشتق بگیریم. نتیجه می‌شود

$$\frac{dr_{PS}}{dt} = \frac{dr_{PS'}}{dt} + \frac{dr_{S'S}}{dt}$$

آهنگ تغییر هر بردار مکان، سرعت متناظر با آن بردار است. پس،

$$v_{PS} = v_{PS'} + v_{S'S} \quad (43)$$

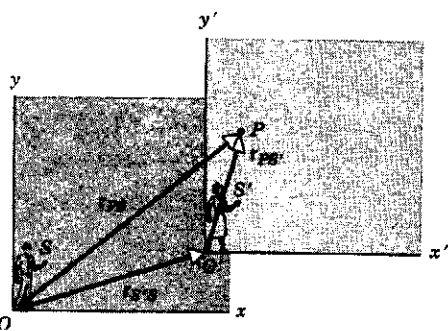
بنابراین، سرعت P نسبت به S در هر لحظه برابر است با سرعت P نسبت به S' به اضافه سرعت S' نسبت به S . معادلات ۴۲ و ۴۳، که برای حرکت دوبعدی به دست آورده‌ایم، برای حرکت سه‌بعدی هم کاملاً معتبرند.

معادله ۴۳ یک قانون تبدیل سرعت است. به کمک این قانون می‌توانیم سرعتی را که ناظر یک چارچوب مرجع، مثلاً S' ، می‌سنجد، به سرعتی که ناظر دیگری، مثلاً S ، می‌سنجد تبدیل کنیم. کافی است که سرعت نسبی در چارچوب مرجع را بدانیم. این قانون تبدیل سرعت با مشاهدات روزمره و مفاهیم بنیادی فضا و زمان در فیزیک کلاسیک گالیلی و نیوتون، به خوبی سازگار است. در واقع، معادله ۴۳ را اغلب شکل گالیلی‌ای قانون تبدیل سرعتها می‌نامند.

در اینجا تنها حالت خاص بسیار مهمی را بررسی می‌کنیم که سرعت دو چارچوب مرجع نسبت به هم ثابت است؛ یعنی هم‌جهت و هم‌اندازه $v_{S'S}$ ثابت است. v_{PS} و $v_{PS'}$ ، یعنی سرعتهای ذره از S و S' ، می‌توانند ثابت نباشند، و البته در حالت کلی با هم برابر نیستند. اما اگر یکی از ناظرها، مثلاً S' ، سرعت P را ثابت ببیند، هر دو جمله طرف راست معادله ۴۳ مستقل از زمان می‌شود، و به این ترتیب طرف چپ این معادله هم باید مستقل از زمان باشد. بنابراین، اگر ناظری سرعت ذره‌ای را ثابت ببیند، همه ناظرهای دیگری هم که نسبت به این ناظر با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، سرعت آن ذره را ثابت خواهند دید.

با مشتق‌گیری از معادله ۴۳ نتیجه مهم‌تری به دست می‌آید:

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt} + \frac{dv_{S'S}}{dt} \quad (44)$$



شکل ۱۶. ناظرهای S و S' ، که نسبت به هم حرکت می‌کنند، ذره P را مشاهده می‌کنند. این دو ناظر، در لحظه مشاهده، مکان ذره را نسبت به دستگاه مختصات خودشان، به ترتیب با r_{PS} و $r_{PS'}$ می‌سنجند. در همین لحظه ناظر S مکان S' را نسبت به مبدأ O ، با $r_{S'S}$ می‌سنجد.

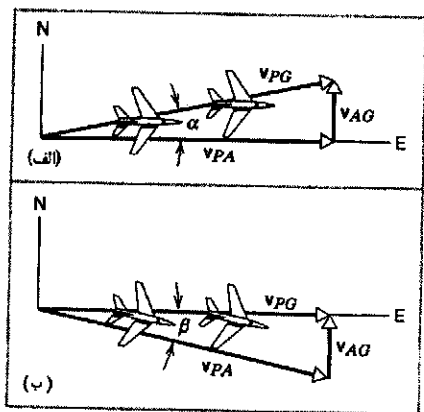
اتومبیل به عقب هجوم می‌برد، دست‌انداز جاده، و صدای موتور— را کنار بگذارید و فقط به "اتومبیل" توجه کنید، هیچ راهی ندارید برای اینکه "واقعاً" تعیین کنید که کدام اتومبیل دارد حرکت می‌کند. مثلاً اگر اتومبیل دیگر ساکن باشد و اتومبیل شما با سرعت 2 mi/h به عقب برود، باز هم نتیجه مشاهدات شما همین خواهد بود.

در این بخش، توصیف حرکت یک ذره را از دید دو ناظر، که نسبت به هم حرکت یکنواخت دارند، بررسی می‌کنیم. دو نفر را در نظر بگیرید که یکی در اتومبیلی که با سرعت ثابت در جاده‌ای مستقیم حرکت می‌کند نشسته و دیگری کنار جاده ایستاده است. ذره‌ای که هر دو ناظر مشاهده می‌کنند ممکن است مثلاً تویی باشد که از یک اتومبیل به هوا یا به طرف اتومبیل دیگر پرتاب می‌شود.

دو ناظر را S و S' می‌نامیم. هر ناظر، چارچوب مرجعی دارد که یک دستگاه مختصات دکارتی به آن متصل است. برای سادگی فرض می‌کنیم که هر ناظر در مبدأ دستگاه مختصات مربوط به خودش واقع شده است. تنها یک قید روی حرکت نسبی دو دستگاه می‌گذاریم: سرعت نسبی میان S و S' باید ثابت باشد منظور این است که هم اندازه و هم جهت سرعت ثابت باشد. دقت کنید که این محدودیت روی سرعت ذره‌ای که ناظرهای S و S' مشاهده می‌کنند نیست. لزومی ندارد که ذره با سرعت ثابت حرکت کند؛ ذره می‌تواند شتاب داشته باشد.

شکل ۱۶ دو دستگاه مختصات مربوط به S و S' را در زمان t نشان می‌دهد. برای سادگی، فقط حرکت دوبعدی را بررسی می‌کنیم. شکل ۱۶ دو صفحه xy و $x'y'$ را، که در واقع یک صفحه‌اند، نشان می‌دهد. مبدأ دستگاه S' ، نسبت به مبدأ دستگاه S ، با بردار $r_{S'S}$ مشخص می‌شود. به ترتیب شاخصهای پایین بردار خوب توجه کنید: شاخص اول نقطه‌ای را که محل آن مورد نظر است مشخص می‌کند (در این مورد، مبدأ دستگاه مختصات S') و شاخص دوم دستگاهی را که محل نقطه نسبت به آن مورد نظر است (در این مورد، دستگاه مختصات S).

در شکل ۱۶ یک ذره (P) هم در صفحه مشترک xy و $x'y'$



شکل ۱۷. (الف) هواپیمایی که جهت‌گیری آن به طرف شرق است و بادی به طرف شمال به آن می‌وزد. (ب) برای حرکت به طرف شرق، هواپیما باید قدری به درون باد جهت‌گیری کند.

مثال ۷. قطب‌نمای هواپیمایی نشان می‌دهد که سر هواپیما به طرف شرق است! سرعت سنج، آن که سرعت را نسبت به هوا می‌سنجد، مقدار 215 km/h را نشان می‌دهد. باد ثابتی با سرعت 65 km/h به طرف شمال می‌وزد. (الف) اندازه سرعت هواپیما نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) اگر خلبان بخواهد به طرف شرق برود، هواپیما را باید در چه جهتی هدایت کند، یعنی قطب‌نما چه جهتی را باید نشان بدهد؟ حل: (الف) در این مسئله، "ذره" متحرک، هواپیمای P است. دو چارچوب مرجع داریم، زمین (G) و هوا (A). زمین را دستگاه S و هوا را دستگاه S' می‌گیریم. معادله ۴۳ را، با تغییر ساده‌ای در نمادگذاری، چنین می‌نویسیم

$$v_{PG} = v_{PA} + v_{AG}$$

شکل ۱۷ الف این بردارها را نشان می‌دهد، که یک مثلث قائم‌الزاویه تشکیل می‌دهند. جمله‌های این رابطه، به ترتیب عبارت‌اند از سرعت هواپیما نسبت به زمین، سرعت هواپیما نسبت به هوا، و سرعت هوا نسبت به زمین (یعنی سرعت باد). توجه کنید که جهت‌گیری هواپیما به طرف شرق است، همان چیزی که قطب‌نما نشان می‌دهد. اندازه سرعت هواپیما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 + v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 + (65 \text{ km/h})^2} = 225 \text{ km/h}$$

زاویه α ، از شکل ۱۷ الف، از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \tan^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 16.8^\circ$$

بنابراین، هواپیما نسبت به زمین با سرعت 225 km/h در جهت 16.8° شمالی نسبت به شرق پرواز می‌کند. توجه کنید که سرعت هواپیما نسبت به زمین، از سرعت آن نسبت به باد بیشتر است.

جمله آخر معادله ۴۴ صفر است، چون فرض کرده‌ایم که سرعت نسبی دو چارچوب مرجع ثابت است. پس

$$\frac{dv_{PS}}{dt} = \frac{dv_{PS'}}{dt}$$

اگر در دو طرف این معادله، به جای مشتق سرعت، شتاب متناظر با آن را قرار بدهیم می‌بینیم که

$$a_{PS} = a_{PS'} \quad (45)$$

یعنی، شتاب P از دید دو ناظر یکی است!

در فصل بعدی خواهیم دید که شتاب کمیته بنیادی در رفتار دینامیکی اجسام است: قانون دوم نیوتون $F = ma$ ، نیروی F ، جرم m ، و شتاب a را به هم مربوط می‌کند. معادله ۴۵ در شرایط خاصی که چارچوبهای مرجع S و S' نسبت به هم با سرعت ثابت (هم از نظر جهت و هم از نظر اندازه) در حرکت باشند به دست آمد. چنین چارچوبهایی را، که ممکن است نسبت به هم در حرکت باشند اما ناظرهای آنها برای یک جسم معین، شتاب یکسانی مشاهده می‌کنند، چارچوب مرجع لخت می‌نامند. در فصل بعد خواهیم دید که این چارچوبها، به ویژه از این نظر مهم‌اند که قوانین نیوتون تنها در آنها برقرار است.

در اینجا مثالی از یک قانون فیزیکی می‌آوریم که می‌شود آن را برای تعیین لخت بودن یا نبودن چارچوبهای مرجع به کار برد. جرمی را به یک سر نخ ببندید و سر دیگر نخ را در دست بگیرید تا جرم آویزان شود. جاذبه گرانشی زمین بر جرم، آن را به طرف مرکز زمین می‌کشد؛ راستای نخ را می‌شود برای تعریف محور قائم به کار برد. اکنون همین آزمایش را در اتومبیلی که با سرعت ثابت 55 mi/h بر خط مستقیم حرکت می‌کند تکرار کنید. نتیجه عوض نمی‌شود: نخ در همان راستای قائم آویزان می‌ماند. این اتومبیل هم، مثل زمین، یک چارچوب مرجع لخت است. اگر این آزمایش را در اتومبیلی که در حال سرعت گرفتن، ترمز کردن، یا دور زدن باشد انجام بدهید، نخ از راستای قائم منحرف می‌شود. چارچوبهای شتابدار (حتی اگر شتابشان شتاب مرکزگرا باشد) چارچوب نالخت‌اند. (در واقع زمین هم فقط به طور تقریبی یک چارچوب لخت است. به خاطر چرخش زمین به دور محور خودش، دو ناظر در عرضهای جغرافیایی متفاوت، نسبت به هم یک سرعت مماسی دارند که جهت آن با چرخش زمین تغییر می‌کند. البته این اثر کوچک و در بسیاری از موارد قابل چشمپوشی است؛ اما در کارهای بسیار دقیق باید آن را در نظر گرفت. ضمناً در مقیاس بزرگ، این پدیده می‌تواند آثار چشمگیری داشته باشد. مثلاً نالخت بودن چارچوب مرجع سطح زمین باعث چرخش باد حول مراکز پر فشار یا کم فشار می‌شود. این چرخش می‌تواند توفانهایی شدید و مخرب به بار بیاورد. در بخش ۸-۶، آثار دیگری را که در چارچوبهای نالخت مشاهده می‌شود بررسی خواهیم کرد.

تولید می‌کنند. بنابراین، میدانهای الکتریکی و مغناطیسی متحرک نور عملاً طی حرکت پرتو تور خودشان را باز تولید می‌کنند. اینشتین استدلال کرد که اگر معادله ۴۳ درست باشد، ناظر S می‌تواند پرتو نوری با سرعت c در جهت x بفرستد، و ناظر S' می‌تواند با $v_{S'S} = c$ در جهت x نسبت به S حرکت کند و پرتو نور را بگیرد. درست مثل اتومبیلی که با همان سرعت اتومبیل شما، کنار اتومبیلتان حرکت کند. در این صورت، پرتو نور، از دید ناظر S' ساکن به نظر می‌رسد. این، از نظر اینشتین، تناقض شدیدی بود؛ چطور ممکن است پرتو نوری را، که اصولاً میدان الکترومغناطیسی متحرک است، "ساکن" ببینیم؟ اینشتین برای حل این مشکل راهی پیشنهاد کرد که به نظر خودش بدیهی بود: هیچ پرتو نوری را نمی‌توان "ساکن" دید. پس حتماً باید نتیجه گرفت که معادله ۴۳، برای سرعتهای نزدیک به c ، غلط است. اینشتین یک گام از این هم جلوتر رفت: اظهار کرد که هر دو ناظر S و S' باید دقیقاً یک مقدار برای سرعت نور به دست بیاورند، سرعت نسبی شان هر چه می‌خواهد باشد! این حکم با عقل متعارف و با پیش‌بینی معادله ۴۳، مغایر به نظر می‌رسد؛ اگر دو ناظر با سرعت c نسبت به هم حرکت کنند، چطور ممکن است که نتیجه اندازه‌گیری هر دویشان از سرعت پرتو نوری که یکی از آنها گسیل کرده است یکسان و برابر با c باشد؟

توصیف ریاضی کامل این مسئله را به فصل ۲۱ ماکول می‌کنیم؛ اینجا فقط مختصری در مورد حالت خاصی که همه سرعتها در راستای x (یا x') باشند صحبت می‌کنیم. در این حالت، نتیجه اینشتین برای تبدیل سرعتها چنین است:

$$v_{PS} = \frac{v_{PS'} + v_{S'S}}{1 + v_{PS'}v_{S'S}/c^2} \quad (46)$$

ببینید که چه نتیجه زیبایی است. اگر $v_{PS'}$ و $v_{S'S}$ (نسبت به c) کوچک باشند، مخرج معادله ۴۶ خیلی نزدیک به ۱ می‌شود، و معادله ۴۶ به معادله ۴۳ تبدیل می‌شود. در سرعتهای کم، تبدیل گالیله‌ای سرعت جواب قابل قبولی می‌دهد. اگر $v_{PS'} = c$ باشد (S' پرتو نور را مشاهده می‌کند)، از معادله ۴۶ نتیجه می‌شود که $v_{PS} = c$ ، و فرقی هم نمی‌کند که مقدار $v_{S'S}$ چه باشد. همه ناظرها سرعت نور را یکسان می‌سنجند؛ یعنی مقداری که می‌سنجند به سرعت نسبی شان بستگی ندارد.

فرض اینشتین، و سینماتیک و مکانیکی که به دنبال آن می‌آید، لازم نمی‌دارد که فیزیک نیوتونی را کنار بگذاریم؛ تنها می‌گویید که محاسبات نیوتونی را به سرعتهای بسیار کوچک، در مقایسه با c ، محدود کنیم. برای اجسام متحرکی که معمولاً با آنها سروکار داریم، این محدودیت به خوبی برقرار است. حتی سرعت سریعترین موشکهای که بشر ساخته است ($v = 10^4 \text{ m/s}$)، آنقدر کمتر از سرعت نور $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ است، که فرمول گالیله را با اطمینان به‌کار ببریم، بی‌آنکه مرتکب خطای قابل توجهی شده باشیم. اما ذراتی مثل الکترون یا پروتون را می‌شود به راحتی تا سرعتهای خیلی نزدیک به c شتاب داد. در این سرعتهای زیاد باید از یک فیزیک جدید، با معادلات جدید سینماتیکی

(ب) به این منظور، هوایما باید طوری در مقابل باد جهت‌گیری کند که سرعت هوایما نسبت به زمین به طرف شرق باشد. سرعت باد همان است که بود، و نمودار برداری معادله ۴۳ به صورت شکل ۱۷ ب است. توجه کنید که در این مورد هم این سه بردار یک مثلث قائم‌الزاویه می‌سازند، با این تفاوت (نسبت به شکل ۱۷ الف) که این بار وتر مثلث v_{PA} است نه v_{PG} .

در این مورد، سرعت هوایما نسبت به زمین برابر است با

$$v_{PG} = \sqrt{v_{PA}^2 - v_{AG}^2} = \sqrt{(215 \text{ km/h})^2 - (65 \text{ km/h})^2} \\ = 205 \text{ km/h}$$

چنانکه جهت‌گیری هوایما در شکل ۱۷ ب نشان می‌دهد، هوایما باید به اندازه زاویه β به درون باد هدایت شود. این زاویه برابر است با

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v_{AG}}{v_{PA}} = \sin^{-1} \frac{65 \text{ km/h}}{215 \text{ km/h}} = 17.6^\circ$$

همان‌طور که می‌بینید، در این حالت سرعت هوایما نسبت به زمین کمتر از سرعت آن نسبت به هواست.

حرکت نسبی در سرعتهای زیاد (اختیاری)

مطالبی که در مورد حرکت نسبی گفته شد، مبنای مکانیک نیوتونی است، که بررسی آن را از فصل ۵ شروع خواهیم کرد. در اینجا هیچ محدودیتی روی سرعت نسبی چارچوبهای مرجع، یا روی سرعت ذراتی که بررسی می‌شوند وجود ندارد (تنها کافی است که سرعت نسبی چارچوبهای مرجع ثابت باشد). دو قرن پس از نیوتون، آلبرت اینشتین سعی کرد نتیجه کاربرد معادله ۴۳ را برای پرتو نوری که با سرعت $c = 299792458 \text{ m/s}$ در خلا حرکت می‌کند، مجسم کند. فرض کنید ناظر S' پرتو نوری را مشاهده می‌کند که با سرعت c در جهت مثبت x' در حرکت است. باز فرض کنید خود S' هم نسبت به S با سرعت $v_{S'S} = 1 \text{ m/s}$ در همان جهت x' حرکت می‌کند. ناظر S چه سرعتی برای پرتو نور می‌سنجد؟ مکانیک نیوتونی طبق معادله ۴۳ جواب می‌دهد:

$$v_{PS} = 299792458 \text{ m/s} + 1 \text{ m/s} = 299792459 \text{ m/s}$$

اینشتین البته کتابهای درسی اش را خوانده بود و می‌دانست که مکانیک نیوتونی درباره مشاهده سرعت توسط ناظرهای متحرک نسبت به یکدیگر، چه می‌گوید؛ این را هم می‌دانست که نور یک شیء متحرک عادی نیست. پرتوهای نوری به شکل خاصی حرکت می‌کنند. نور تابش الکترومغناطیسی است، و می‌شود آن را برحسب میدانهای الکتریکی و مغناطیسی سازنده اش تحلیل کرد. میدان الکتریکی متحرک میدان مغناطیسی تولید می‌کند، و میدان مغناطیسی متحرک میدان الکتریکی

۹. شکل ۱۹، مسیر سه توپ فوتبال را نشان می‌دهد. (الف) کوتاهترین مدت پرواز، (ب) بزرگترین مؤلفه قائم سرعت در زمان شروع حرکت، (ج) بزرگترین مؤلفه افقی سرعت در زمان شروع حرکت، و (د) کمترین سرعت در زمان شروع حرکت، مربوط به کدام یک از این مسیرهاست؛ (مقاومت هوا را ناچیز بگیرید).



شکل ۱۹. پرش ۹

۱۰. تفنگی، وقتی به طرف هدفی هم تراز با خودش نشانه برود، به هدف می‌زند. نشان بدهید که اگر این تفنگ به طرف هدفهای بالاتر یا پایین‌تر از خودش نشانه‌روی شود، به شرط آنکه فاصله هدف عوض نشود، همیشه "بالا می‌زند".^۱

۱۱. پیتربرانکازو در کتاب "دانش ورزش" در مورد پرتابه‌هایی مثل گوی بیسبال یا گوی گلف می‌نویسد: "با فرض اینکه بقیه شرایط یکسان باشد، برد پرتابه‌ها در روزهای گرم بیشتر است تا در روزهای سرد، در سطوح مرتفع بیشتر است تا در سطح دریا، و در هوای مرطوب بیشتر است تا در هوای خشک". آیا می‌توانید درستی این گفته‌ها را توضیح بدهید؟

۱۲. نمودار ارتفاع-زمان پرتابه‌ای که در راستای قائم به بالا پرتاب شود، سهمی است. مسیر پرتابه‌ای هم که به‌طور مایل به بالا پرتاب شود سهمی است. آیا این شباهت تصادفی است؟ جواب خودتان را توجیه کنید.

۱۳. توپهای بلندبرد را در زاویه "برد بیشینه" 45° تنظیم نمی‌کنند، بلکه در زاویه‌های بزرگتر، در گستره 55° تا 65° تنظیم می‌کنند. زاویه 45° چه اشکالی دارد؟

۱۴. آیا در حرکت پرتابه، اگر مقاومت هوا قابل چشمپوشی باشد، هیچ وقت لازم می‌شود که حرکت را، به‌جای دوبعدی، سه‌بعدی در نظر بگیریم؟

۱۵. آیا ممکن است که اندازه سرعت ثابت باشد ولی حرکت شتابدار باشد؟ آیا می‌شود با شتاب صفر روی یک مسیر منحنی حرکت کرد؟ با شتاب ثابت چگونه؟

۱۶. مهره‌ای را در نظر بگیرید که در امتداد سیم بدون اصطکاک به شکل مارپیچ با سرعت ثابت می‌لغزد و حلقه‌هایی را که به تدریج کوچکتر می‌شوند طی می‌کند. شتاب این مهره را به‌طور کیفی توصیف کنید.

۱۷. نشان بدهید که اگر هم چرخش و هم گردش زمین را به حساب

و دینامیکی، استفاده کرد. این فیزیک جدید، اساس نظریه نسبیت خاص است، که آن را به تفصیل بیشتر در فصل ۲۱ مطالعه خواهیم کرد.

پرسشها

۱. آیا ممکن است جهت شتاب جسمی تغییر کند، بی‌آنکه جهت سرعت آن تغییر کند؟

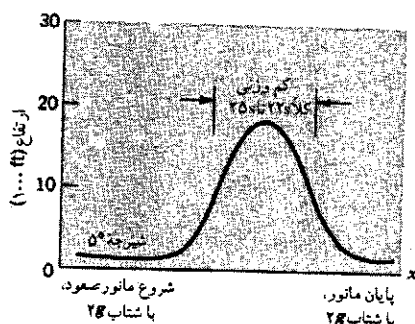
۲. اگر v و a به ترتیب نماینده سرعت و شتاب اتومبیلی باشد، وضعیت حرکت در هر یک از این حالتها چگونه است؟ (الف) v و a موازی و هم‌جهت‌اند؛ (ب) v و a موازی و در جهتهای مخالف‌اند؛ (ج) v و a برهم عمودند؛ (د) v صفر و a مخالف صفر است؛ (ه) a صفر و v مخالف صفر است.

۳. آیا در پرش طول، ارتفاعی هم که ورزشکار به آن می‌رسد اهمیت دارد؟ چه عواملی برد پرش را تعیین می‌کنند؟

۴. الکترونهای باریکه‌ای را که از تفنگ الکترونی خارج می‌شود، و نیز مولکولهای جریان آبی را که از لوله بیرون می‌زند در نظر بگیرید. چرا، در اثر گرانش، الکترون به اندازه مولکول آب سقوط نمی‌کند؟ فرض کنید که حرکت اولیه ذرات، در هر دو مورد، افقی است.

۵. سرعت پرتابه در کدام نقطه یا نقاط مسیر کمینه است؟ در کجا بیشینه است؟

۶. شکل ۱۸ مسیر پرواز یکی از هواپیماهای جت ناسا را نشان می‌دهد. هدف از این پرواز، شبیه‌سازی شرایط کم‌وزنی برای مدتی کوتاه است. استدلال کنید که اگر مسیر هواپیما، سهمی خاصی باشد، مسافران آن احساس بی‌وزنی خواهند کرد.



شکل ۱۸. پرش ۶

۷. پرتابه‌ای از نقطه‌ای بالاتر از سطح زمین پرتاب می‌شود. زاویه پرتاب متناظر با بیشترین برد کمتر از 45° است. آیا می‌توانید این مشاهده را توضیح بدهید؟

۸. پرتابه‌ای را در اوج مسیری در نظر بگیرید. در این نقطه (الف) سرعت پرتابه، برحسب v_0 و ϕ_0 چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر و در کدام جهت است؟ (ج) جهت شتاب پرتابه چه ارتباطی با جهت سرعت آن دارد؟

۱. در این باره می‌توانید رجوع کنید به

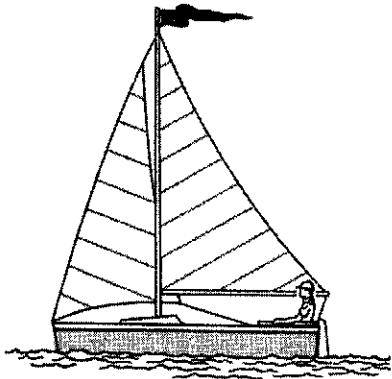
"A Puzzle in Elementary Ballistics," Ole Anton Haugland, *The Physics Teacher*, April 1983, p. 246.

۲۵. سطلی زیر باران است. باران به طور یکنواخت می بارد و در سطل جمع می شود. آیا اگر باد افقی ثابتی بوزد، آهنگ جمع شدن آب در سطل تغییر می کند؟

۲۶. شیشه جلوی اتوبوسی در صفحه قائم است. این اتوبوس زیر باران شدید با سرعت v_0 حرکت می کند قطرات باران با سرعت حد v_r در راستای قائم سقوط می کنند. این قطره ها با چه زاویه ای به شیشه جلو می خورند؟

۲۷. فرض کنید بارانی با قطره های منظم و عمود بر زمین می بارد و شما می خواهید در زیر این باران مسافت معینی را طوری طی کنید که حتی الامکان کمتر خیس بشوید (یعنی قطره های کمتری به شما اصابت کند). آیا باید خیلی تند بدوید؟ خیلی آهسته راه بروید؟ یا یک سرعت میانی مناسب انتخاب کنید؟^۱

۲۸. شکل ۲۱ چه ایرادی دارد؟ قایق دارد با نیروی باد حرکت می کند.



شکل ۲۱. پرسش ۲۸

۲۹. تبدیل گالیله ای سرعت (معادله ۴۳) از تجربیات روزمره چنان به ذهن ما آشناست که گاهی ادعا می شود که "صحت آن بدیهی است و نیاز به اثبات ندارد." بسیاری از (به اصطلاح) ابطالهای نظریه نسبیت هم در واقع مبتنی بر همین ادعاست. چگونه می شود این ادعا را رد کرد؟

مسئله ها

بخش ۱-۴ مکان، سرعت، و شتاب

۱. هواپیمایی از شهر A ، 410 mi به طرف شرق پرواز می کند و در مدت 45 min به شهر B می رسد. سپس 820 mi به طرف جنوب پرواز می کند و در مدت $1 \text{ h } 30 \text{ min}$ به شهر C می رسد. (الف) اندازه و جهت بردار جابه جایی مربوط به کل مسیر را به دست بیاورید.

۱. نگاه کنید به

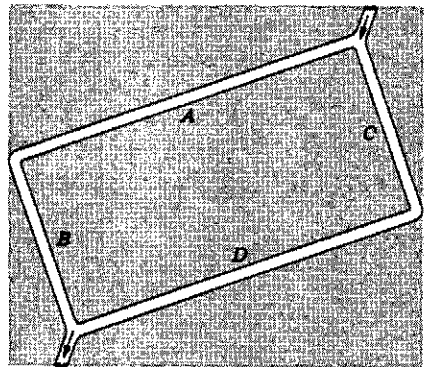
"An Optimal Speed for Traversing a Constant Rain", S. A. Stern, *American Journal of Physics*, September 1983, p. 815.

بیاوریم، کتابی که روی میزتان است، شبها تندتر از روزها حرکت می کند. این گفته در کدام چارچوب مرجع درست است؟

۱۸. هوانوردی در پایان یک شیرجه، روی قوسی از دایره حرکت می کند. گفته می شود که هوانورد، با شتاب $3g$ از حالت شیرجه خارج شده است. معنی این عبارت را توضیح دهید.

۱۹. آیا می شود شتاب یک پرتابه را برحسب مؤلفه های شعاعی و مماسی آن در هر نقطه از مسیر حرکت نشان داد؟ اگر چنین است، آیا این نمایش مزیتی هم دارد؟

۲۰. لوله ای به شکل مستطیلی با گوشه های گرد در صفحه قائم قرار دارد (شکل ۲۰). دو بلبرینگ را در گوشه بالای سمت راست، یکی را در مسیر AB و دیگری را در مسیر CD رها می کنیم. کدام یک زودتر به گوشه پایین سمت چپ می رسد؟



شکل ۲۰. پرسش ۲۰

۲۱. آیا اگر شتاب جسمی در یک چارچوب مرجع خاص ثابت باشد،

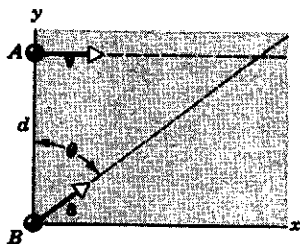
در چارچوبهای مرجع دیگر هم الزاماً ثابت است؟

۲۲. کودکی در قطاری که با سرعت ثابت حرکت می کند نشسته است. این کودک توپی را مستقیماً به بالا پرتاب می کند. آیا توپ پشت سرش می افتد، جلویش می افتد، یا توی دستهایش؟ اگر در مدتی که توپ در هواست، قطار به طرف جلو شتاب بگیرد، یا روی ریل منحنی حرکت کند، توپ در برگشت چه وضعیتی خواهد داشت؟

۲۳. شخصی روی سکوی عقبی قطاری که سرعت ثابت دارد ایستاده است. این شخص در حالی که روی ریل خم شده است، سکه ای را رها می کند. مسیر حرکت سکه را از دید این ناظرها بررسی کنید: (الف) خود شخص، (ب) شخصی که نزدیک ریل ایستاده است، و (ج) شخصی که در قطار دیگری است که روی ریلی موازی با ریل قطار اول، و در جهت مخالف این قطار حرکت می کند.

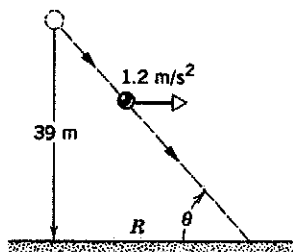
۲۴. آسانسوری با سرعت ثابت پایین می آید. شخصی در این آسانسور، سکه ای را رها می کند. شتاب سکه افتان (الف) از دید این شخص و (ب) از دید شخصی که نسبت به چاه آسانسور ساکن است چقدر است؟

۲۲. ذره B ، هنگامی که A از محور y می‌گذرد، با سرعت صفر و شتاب ثابت a ($a = 40^\circ \text{m/s}^2$) از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. زاویه θ بین a و جهت مثبت محور y چقدر باشد تا دو ذره با هم برخورد کنند؟



شکل ۲۲. مسئله ۹

۱۰. توپی از ارتفاع 39m رها می‌شود. باد، افقی می‌وزد و به توپ شتاب 1.2m/s^2 می‌دهد. (الف) نشان بدهید که توپ روی یک خط راست حرکت می‌کند و مقادیر R و θ در شکل ۲۳ را پیدا کنید. (ب) چه مدتی طول می‌کشد تا توپ به زمین برسد؟ (ج) توپ با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟



شکل ۲۳. مسئله ۱۰

بخش ۳-۴ حرکت پرتابی

۱۱. توپی روی میزی افقی به ارتفاع 4.23ft می‌غلتد و از آن به زمین می‌افتد. نقطه برخورد توپ به زمین در فاصله افقی 5.11ft از لبه میز است. (الف) توپ چه مدتی در هوا بوده است؟ (ب) سرعت آن هنگام افتادن از میز چقدر بوده است؟

۱۲. الکترون هم، مثل همه انواع دیگر ماده، تحت تأثیر گرانش سقوط می‌کند. الکترونی با سرعت $3.0 \times 10^7 \text{m/s}$ (یک دهم سرعت نور) به طور افقی پرتاب می‌شود. این الکترون، طی مسافت افقی 1m ، چقدر سقوط می‌کند؟

۱۳. پیکانی با سرعت اولیه 10m/s به طرف مرکز تخته هدف، نقطه P پرتاب می‌شود و 19° بعد در نقطه Q که در امتداد قائم زیر P است فرو می‌رود؛ شکل ۲۴. (الف) فاصله PQ چقدر است؟ (ب) فاصله پرتاب‌کننده از هدف چقدر بوده است؟

(ب) بردار سرعت متوسط و (ج) متوسط اندازه سرعت را پیدا کنید.

۲. مکان ذره‌ای در صفحه xy با رابطه $\mathbf{r} = (2t^2 - 5t)\mathbf{i} + (6 - 7t^2)\mathbf{j}$ بر حسب متر و t بر حسب ثانیه است. (الف) \mathbf{r} ، \mathbf{v} و \mathbf{a} را در $t = 2\text{s}$ حساب کنید.

۳. بالونی در مدت $3\text{h}24\text{min}$ ، از نقطه رهاشدنش در سطح زمین، 87km به شمال، 97km به شرق، و 29km به طرف بالا می‌رود. (الف) اندازه سرعت متوسط بالون و (ب) زاویه بردار سرعت متوسط با سطح افقی را پیدا کنید.

۴. سرعت ذره‌ای در صفحه xy از رابطه $\mathbf{v} = (6t - 4t^2)\mathbf{i} + 8\mathbf{j}$ بر حسب متر بر ثانیه و t (> 0) بر حسب ثانیه است. (الف) شتاب ذره را در $t = 3\text{s}$ پیدا کنید. (ب) شتاب در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (ج) سرعت در چه زمانی صفر می‌شود (اگر اصولاً صفر شود)؟ (د) سرعت در چه زمانی 10m/s می‌شود (اگر اصولاً چنین زمانی در کار باشد)؟

بخش ۲-۴ حرکت با شتاب ثابت

۵. در یک لامپ پرتو کاندی، باریکه‌ای از الکترون‌ها با سرعت 10^8cm/s به طور افقی وارد ناحیه‌ای به طول 2.3cm میان دو صفحه افقی می‌شود. بین این دو صفحه یک میدان الکتریکی وجود دارد که به الکترون‌ها شتاب رو به پایین $9.4 \times 10^{16} \text{cm/s}^2$ می‌دهد. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا الکترون‌ها از ناحیه میان صفحات بگذرند؟ (ب) جابه‌جایی عمودی باریکه طی این مدت چقدر است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت باریکه، هنگام خروج از این ناحیه چقدر است؟

۶. یک قایق بادبانی یخ‌نوردی، با شتاب ثابت حاصل از باد، روی سطح دریاچه یخ‌زده‌ای حرکت می‌کند. سرعت آن در زمان معینی $6.30\mathbf{i} - 8.42\mathbf{j}$ (بر حسب m/s) است. سه ثانیه بعد، قایق به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. شتاب قایق در این مدت چه بوده است؟

۷. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که مکان آن بر حسب زمان به صورت زیر تغییر می‌کند:

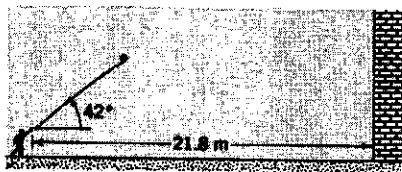
$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

(الف) سرعت و (ب) شتاب آن را بر حسب زمان بنویسید. (ج) مسیر ذره به چه شکلی است؟

۸. ذره‌ای در $t = 0$ ، با سرعت اولیه $\mathbf{v}_0 = 36\mathbf{i}$ m/s ، از مبدأ حرکت می‌کند. شتاب این ذره ثابت و برابر با $1.4\mathbf{j} - 1.2\mathbf{i}$ m/s^2 است. (الف) ذره در چه زمانی به بیشترین مختصه x خود می‌رسد؟ (ب) سرعت ذره در این زمان چقدر است؟ (ج) در این زمان، ذره کجاست؟

۹. ذره A در راستای خط $y = d(30\text{m})$ ، با سرعت ثابت

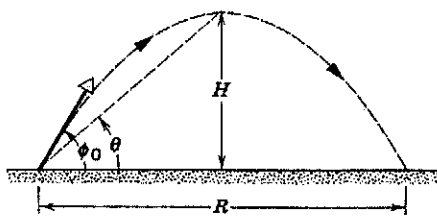
مسیرش به دیوار می‌خورد؟



شکل ۲۵. مسئله ۱۹

۲۰. نشان بدهید که ارتفاع نقطه اوج پرتابه،
 $y_{\max} = (v_0 \sin \phi_0)^2 / 2g$ است.

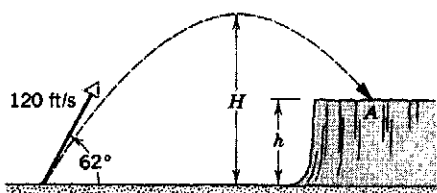
۲۱. (الف) پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویه ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. نشان بدهید که نسبت ارتفاع نقطه اوج H به برد R برابر است با $H/R = 1/2 \tan \phi_0$.
 (ب) زاویه پرتاب چقدر باشد تا ارتفاع اوج با برد افقی برابر شود؟ (شکل ۲۶).



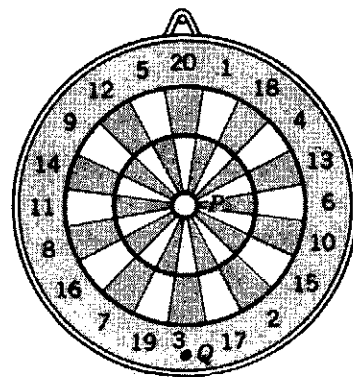
شکل ۲۶. مسئله‌های ۲۱ و ۲۲

۲۲. پرتابه‌ای را در نظر بگیرید که از سطح زمین با زاویه ϕ_0 بالاتر از سطح افقی پرتاب می‌شود. (الف) نشان بدهید که رابطه زاویه فراز نقطه اوج نسبت به نقطه پرتاب (θ در شکل ۲۶)، با ϕ_0 چنین به صورت $\tan \theta = 1/2 \tan \phi_0$ است. (ب) θ را به ازای $\phi_0 = 45^\circ$ حساب کنید.

۲۳. سنگی را از سطح زمین با سرعت اولیه 120 ft/s در جهت 62° بالاتر از سطح افق به طرف صخره‌ای به ارتفاع h پرتاب می‌کنند (شکل ۲۷). این سنگ 5 s پس از پرتاب در نقطه A به زمین می‌خورد. (الف) ارتفاع صخره (h) ، (ب) سرعت سنگ درست پیش از برخورد در نقطه A ، و (ج) ارتفاع اوج سنگ نسبت به زمین (H) را پیدا کنید.



شکل ۲۷. مسئله ۲۳



شکل ۲۴. مسئله ۱۳

۱۴. تفنگی به طور افقی به طرف هدفی به فاصله 130 ft نشانه رفته است. گلوله 75 in ر^۰ زیر هدف می‌خورد. (الف) زمان پرواز گلوله چقدر بوده است؟ (ب) سرعت خروج گلوله چقدر بوده است؟

۱۵. گلوله‌ای با سرعت 250 m/s در راستای افق از تفنگی در ارتفاع 450 m از سطح زمین شلیک می‌شود. (الف) گلوله چه مدتی در هوا می‌ماند؟ (ب) فاصله افقی نقطه برخورد گلوله به زمین از نقطه شلیک چقدر است؟ (ج) مؤلفه قائم سرعت گلوله، هنگام برخورد با زمین، چقدر است؟

۱۶. یک بازیکن بیسبال، توپ را با سرعت 92 mi/h به طور افقی پرتاب می‌کند. فاصله پرتاب‌کننده تا بازیکنی که چوب بیسبال را در دست دارد، 60 ft است. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ 30 ft افقی اول مسیر را بپیماید؟ چقدر طول می‌کشد تا 30 ft دوم را بپیماید؟ (ب) در طی 30 ft افقی اول، توپ تحت تأثیر گرانش چقدر سقوط می‌کند؟ (ج) در 30 ft دوم چقدر؟ (د) چرا این دو مقدار با هم برابر نیستند؟ مقاومت هوا را ناچیز بگیرید.

۱۷. در یک داستان پلیسی، جسدی به فاصله 15 ft از دیوار ساختمانی، و زیر پنجره‌ای باز به ارتفاع 80 ft پیدا می‌شود. حدس می‌زنید که مرگ تصادفی بوده است یا خیر؟ چرا؟

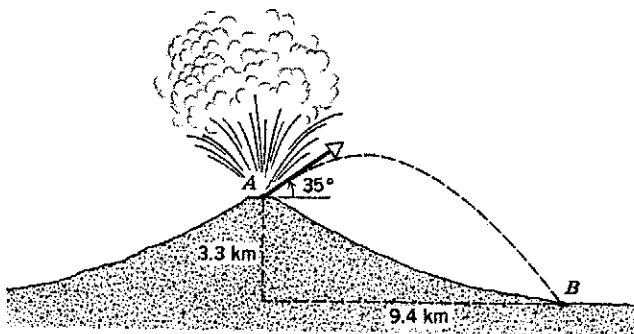
۱۸. گلوله‌ای را با سرعت اولیه 15 m/s و با زاویه 20° زیر سطح افق، از بالای صخره‌ای پرتاب می‌کنیم. (الف) جابه‌جایی افقی و (ب) جابه‌جایی عمودی گلوله 2.3 s بعد از پرتاب چقدر است؟

۱۹. توپ کوچکی را با سرعت 25.3 m/s با زاویه 42° بالاتر از سطح افق، مستقیماً به طرف دیواری پرتاب می‌کنیم (شکل ۲۵). دیوار 21.8 m از نقطه پرتاب توپ فاصله دارد. (الف) چقدر طول می‌کشد تا توپ به دیوار برخورد کند؟ (ب) توپ چقدر بالاتر از نقطه پرتاب به دیوار می‌خورد؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت توپ در لحظه برخورد به دیوار چقدر است؟ (د) آیا توپ، پس از گذشتن از نقطه اوج

برای اینکه قابل زدن باشد، باید حداقل $1.3 \times 10^3 \text{ ft}$ و حداکثر $3.6 \times 10^3 \text{ ft}$ از نقطه پرتاب پایین تر باشد.

۳۲. طبق معادله ۲۴، برد پرتابه‌ها نه تنها به v_0 و ϕ_0 ، بلکه به مقدار شتاب گرانشی g هم بستگی دارد. این شتاب، در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. در سال ۱۹۳۶، جسی اونس در بازیهای المپیک برلن ($g = 9.8128 \text{ m/s}^2$) رکورد جهانی 8.9 m را برای پرش طول به جا گذاشت. اگر او، با همان مقدار v_0 و ϕ_0 ، در المپیک ۱۹۵۶ ملبورن ($g = 9.7999 \text{ m/s}^2$) شرکت می‌کرد، رکوردش چقدر تغییر می‌کرد؟

۳۳. هنگام فوران آتشفشان، ممکن است قطعات سنگ جامد هم از دهانه آتشفشان به بیرون پرتاب شوند؛ این پرتابه‌ها را پاره‌های آتشفشانی می‌نامند. شکل ۲۹ مقطع کوه فوجی (در ژاپن) را نشان می‌دهد. (الف) پاره‌ای که با زاویه 35° نسبت به سطح افقی از دهانه A خارج می‌شود سرعتش چقدر باشد تا در نقطه B در پای کوه آتشفشان به زمین برسد؟ (ب) زمان حرکت این پاره در هوا چقدر است؟



شکل ۲۹. مسئله ۳۳

۳۴. یک بازیکن بیسبال می‌خواهد توپ را به نقطه‌ای در فاصله 127 ft پرتاب کند. بیشترین سرعتی که او می‌تواند به توپ بدهد 85 mi/h است. (الف) اگر توپ را به‌طور افقی و از فاصله 3 ft بالاتر از سطح زمین پرتاب کند، چه بر سر توپ می‌آید؟ (ب) توپ را باید با چه زاویه‌ای به طرف بالا پرتاب کند تا بازیکن دیگری که در نقطه فرود توپ ایستاده است بتواند آن را بگیرد؟ فرض کنید گیرنده توپ هم آن را 3 ft بالاتر از سطح زمین می‌گیرد. (ج) مدت پرواز توپ در این مورد چقدر است؟

۳۵. بازیکنی توپ بسکتبال را با زاویه 55° بالاتر از سطح افقی به طرف حلقه پرتاب می‌کند؛ شکل ۳۰. سرعت اولیه توپ چقدر باشد تا توپ مستقیماً وارد حلقه شود؟ قطر حلقه 18 in است. اطلاعات دیگر را از شکل ۳۰ بخوانید.

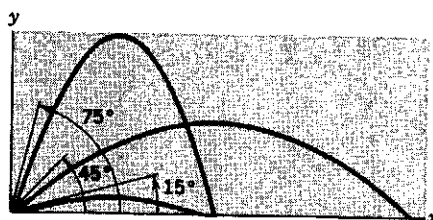
۱. رجوع کنید به

"The Earth's Gravity", Weikko A. Heiskanen, *Scientific American*, September 1955, p. 164.

۲۴. در المپیک ۱۹۶۸ مکزیکوسیتی، باب بیمون رکورد 8.9 m را برای پرش طول به جا گذاشت. فرض کنید سرعت اولیه او در لحظه آغاز پرش 9.5 m/s (تقریباً برابر با سرعت دونده‌های سرعت) بوده باشد، اختلاف این رکورد با رکوردی که در همین شرایط و در غیاب مقاومت هوا به دست می‌آمد چقدر است؟ مقدار g در مکزیکوسیتی 9.78 m/s^2 است.

۲۵. در مثال ۳، (الف) اندازه سرعت بسته در موقع برخورد با هدف و (ب) زاویه برخورد نسبت به راستای قائم چقدر است؟ (ج) چرا زاویه برخورد با زاویه دید هدف از نقطه پرتاب برابر نیست؟

۲۶. (الف) گالیله در کتاب دو علم جدید می‌نویسد که "برای زاویه‌های پرتابی که به یک اندازه از 45° بیشتر یا کمتر باشند، برد یکسان است" این گفته را اثبات کنید (شکل ۲۸). (ب) دو زاویه پرتابی را پیدا کنید که بردشان به ازای سرعت اولیه 3 m/s برابر با 20 m باشد.



شکل ۲۸. مسئله ۲۶

۲۷. تردستی می‌تواند پنج توپ را در حرکت نگه دارد. او توپها را پشت سر هم تا ارتفاع 3 m به هوا پرتاب می‌کند. (الف) مدت بین دو پرتاب متوالی چقدر است؟ (ب) وقتی که یکی از توپها به دست تردست می‌رسد، بقیه توپها کجاها هستند؟ (از زمان لازم برای اینکه تردست توپ را از یک دستش به دست دیگر بدهد صرف‌نظر کنید).

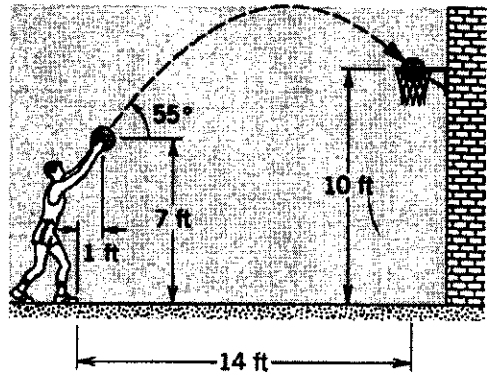
۲۸. گلوله‌های تفنگی با سرعت 150 ft/s از لوله خارج می‌شوند. هدف در فاصله 150 ft از تفنگ است. چقدر بالاتر از هدف را باید نشانه گرفت تا گلوله به هدف برخورد؟

۲۹. توپی از بالاترین پله پلکانی قل می‌خورد و با سرعت افقی 5 ft/s از لبه آن رها می‌شود. ارتفاع هر پله 8 in ، و عرض هر پله هم 8 in است. اولین پله‌ای که توپ روی آن می‌افتد پله چندم است؟

۳۰. توپی را از زمین به هوا پرتاب می‌کنیم. سرعت توپ در ارتفاع 1 m به صورت $v = 6.1 + 6.1x$ ، بر حسب m/s است (x محور افقی است و y محور قائم به طرف بالا). (الف) ارتفاع اوج توپ چقدر است؟ (ب) کل مسافت افقی‌ای که توپ می‌پیماید چقدر است؟ (ج) (اندازه و جهت) سرعت توپ را در لحظه پیش از برخورد به زمین به دست بیاورید.

۳۱. منطقه پرتاب توپ در زمین بیسبال، 125 ft بالاتر از زمین بازی است. آیا پرتاب‌کننده می‌تواند توپی سریع را به‌طور افقی با سرعت 92 mi/h پرتاب کند. چنانکه توپ در منطقه ضربه قابل زدن باشد؟ منطقه ضربه 5 ft با منطقه پرتاب فاصله دارد، فرض کنید که توپ،

۳۸. بمب افکنی با زاویه 56° نسبت به راستای قائم شیرجه می‌رود و بمبی را در ارتفاع 730 m رها می‌کند. بمب 10 s بعد به زمین می‌رسد، اما به هدف برنمی‌خورد. (الف) سرعت بمب افکن، موقع رها کردن بمب، چقدر بوده است؟ (ب) بمب، در طی پروازش، چه مسافت افقی‌ای پیموده است؟ (ج) مؤلفه‌های افقی و عمودی سرعت بمب، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر بوده‌اند؟ (د) اندازه سرعت، و زاویه برخورد بمب نسبت به محور قائم، در زمان برخورد بمب با زمین چقدر بوده است؟



شکل ۳۰. مسئله ۳۵

۳۹. طول هواپیمای B-۵۲ (شکل ۳۲) 49 m است. این هواپیما دارد با سرعت 820 km/h (یعنی 510 mi/h) بر فراز منطقه‌ای که قرار است بمباران شود پرواز می‌کند. فاصله حفره‌هایی که بمبها روی زمین ایجاد می‌کنند از یکدیگر چقدر خواهد بود؟ هر کمیت دیگری را که لازم دارید مستقیماً روی شکل اندازه‌گیری کنید، فرض کنید باد نمی‌وزد و مقاومت هوا را هم ناچیز بگیرید. مقاومت هوا چه تأثیری بر جواب شما خواهد داشت؟

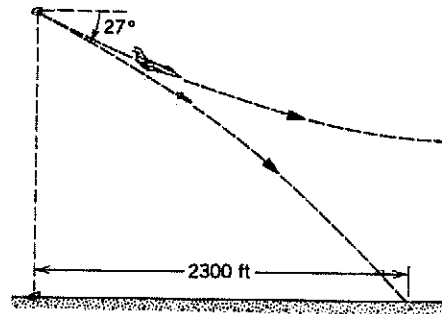
۴۰. فوتبالیستی توپ را با سرعت اولیه 64 ft/s با زاویه 42° بالاتر از سطح افقی شوت می‌کند. در همان لحظه بازیکن دیگری که به فاصله 65 yd از قبلی در جهت حرکت افقی توپ ایستاده است شروع به دویدن می‌کند تا توپ را بگیرد. سرعت متوسط این بازیکن چقدر باشد تا بتواند درست پیش از برخورد توپ به زمین به آن برسد؟ از مقاومت هوا چشمپوشی کنید.

۴۱. (الف) تنیس‌بازی در یک مسابقه، چنان "سرو می‌زند" که به توپ سرعت 23.6 m/s می‌دهد (این مقدار توسط رادار ثبت می‌شود). اگر توپ 2.37 m بالاتر از سطح زمین و در راستای افق از راکت جدا شده باشد، در چه فاصله‌ای از بالای تور عبور می‌کند؟ تور در فاصله 12 m از محل سرویس است و 90° ارتفاع دارد. (ب) فرض کنید تنیس‌باز به همان ترتیب سرو بزند، اما توپ با زاویه 5° پایین‌تر از سطح افقی از راکت جدا شود. آیا این بار هم توپ از تور می‌گذرد؟

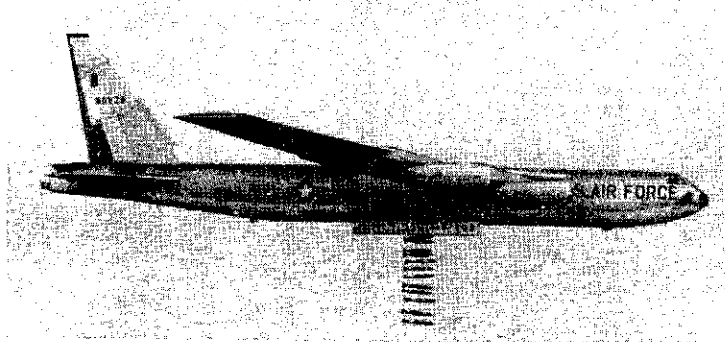
۴۲. یک بازیکن بیسبال، توپ را با چوب بیسبال در ارتفاع 4 ft از سطح زمین چنان می‌زند که زاویه پرتاب توپ 45° و برد افقی آن

۳۶. فوتبالیستی توپ را چنان شوت می‌کند که زمان پرواز آن یعنی 4.5 s و برد آن 50 yd (یعنی 45.8 m) است. توپ در ارتفاع 5 ft (یعنی 1.52 m) از سطح زمین، از پای بازیکن جدا می‌شود. (اندازه و جهت) سرعت اولیه توپ چقدر بوده است؟

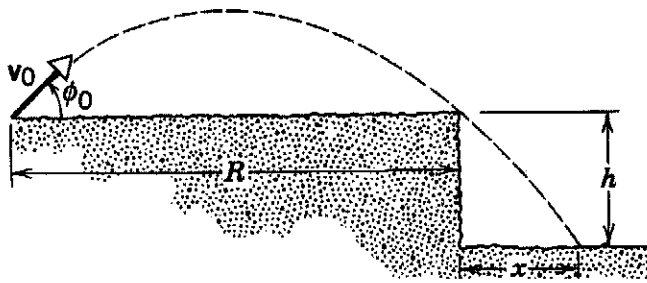
۳۷. هواپیمایی با سرعت 180 mi/h و با زاویه 27° پایین‌تر از افق در حال شیرجه است که یک "گول‌زنک" رادار از آن رها می‌شود. فاصله افقی میان نقطه رها شدن گول‌زنک و نقطه برخورد آن با زمین 2300 ft است. گول‌زنک (الف) چه مدتی در هوا بوده؟ و (ب) در چه ارتفاعی از هواپیما رها شده است؟ (شکل ۳۱)



شکل ۳۱. مسئله ۳۷



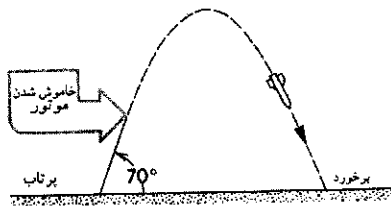
شکل ۳۲. مسئله ۳۹



شکل ۳۵. مسئله ۴۶

۴۷. متصدی رادار، از زمین پرتابه‌ای را "مشاهده می‌کند" که دارد نزدیک می‌شود. در یک لحظه معین، اطلاعات دریافتی از حرکت پرتابه این است: پرتابه در نقطه اوج است و با سرعت v به‌طور افقی حرکت می‌کند؛ فاصله مستقیم پرتابه از محل L است؛ پرتابه تحت زاویه θ ، بالاتر از سطح افقی، دیده می‌شود. (الف) فاصله D بین ناظر و نقطه برخورد پرتابه به زمین چقدر است؟ D را برحسب مقادیر مشاهده شده θ ، L ، v ، و مقدار معلوم g به‌دست بیاورید. فرض کنید زمین مسطح است و ناظر در صفحه مسیری پرتابه است. (ب) آیا پرتابه از ناظر می‌گذرد یا جلوی او به زمین می‌خورد؟

۴۸. موشکی از حالت سکون، با شتاب ۴۶۰ m/s^2 و روی خط راستی با زاویه ۷۰° نسبت به سطح افقی، شروع به حرکت می‌کند. مدت پرواز تحت تأثیر نیروی پیشران، ۳۰ s است. پس از این مدت، موتور خاموش می‌شود و موشک در مسیری سهموی به زمین برمی‌گردد؛ شکل ۳۶. (الف) زمان پرواز، از لحظه پرتاب تا لحظه برخورد، چقدر است؟ (ب) ارتفاع اوج موشک چقدر است؟ (ج) فاصله نقطه پرتاب از نقطه برخورد چقدر است؟ از تغییر g با ارتفاع صرف‌نظر کنید.

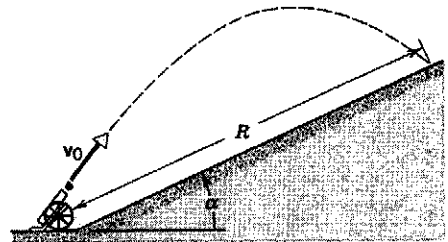


شکل ۳۶. مسئله ۴۸

۲۴ ft می‌رسد که ۳۲۰ ft از نقطه پرتاب فاصله دارد. آیا توپ از بالای زده می‌گذرد؟ اگر می‌گذرد، در چه فاصله‌ای؟

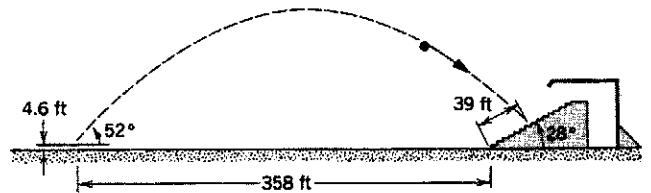
۴۳. بازیکنی می‌تواند توپ فوتبال را با سرعت ۲۵ m/s شوت کند. زاویه شوت نسبت به سطح زمین در چه گستره‌ای باشد تا توپ درست از زیر تیر افقی وارد دروازه شود؟ دروازه ۵ m دورتر است و ارتفاع تیر افقی آن از سطح زمین ۳.۴۴ m است.

۴۴. توپی گلوله‌هایش را با سرعت v_0 پرتاب می‌کند. این توپ در پای تپه‌ای به زاویه شیب α قرار دارد؛ شکل ۳۳. زاویه پرتاب گلوله نسبت به سطح افقی چقدر باشد تا برد گلوله‌ها روی تپه بیشینه شود؟



شکل ۳۳. مسئله ۴۴

۴۵. در یک بازی بیسبال، بازیکنی توپ را با چوب خود در ارتفاع ۴.۶ ft از سطح زمین می‌زند. زاویه پرتاب توپ نسبت به سطح افقی ۵۲° است. توپ در جایگاه تماشاگران، و به فاصله ۳۹ ft از پایین آن، فرود می‌آید؛ شکل ۳۴. شیب جایگاه ۲۸° است و پایین‌ترین نیمکتهای آن ۳۵.۸ ft از محل ضربه فاصله دارند. توپ با چه سرعتی از چوب بازیکن جدا شده است؟ (مقاومت هوا ناچیز است.)

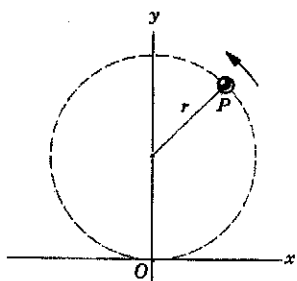


شکل ۳۴. مسئله ۴۵

۴۹. سلاح ضد تانکی روی لبه سطحی است که ۶۰ m بالاتر از دشت اطراف است؛ شکل ۳۷. خدمه سلاح، یکی از تانکهای دشمن را در دشت در فاصله افقی ۲.۲ km از سلاح می‌بیند که ساکن است. در همین لحظه، خدمه تانک متوجه سلاح ضد تانک می‌شوند و با شتاب ۹۰ m/s^2 شروع به حرکت در جهت مخالف می‌کنند و از سلاح دور می‌شوند. سلاح ضد تانک می‌تواند گلوله‌ای با سرعت ۲۴۰ m/s و با زاویه ۱۰° بالاتر از سطح افقی شلیک کند. خدمه سلاح باید چه

۴۶. پرتابه‌هایی را از فاصله R از لبه صخره‌ای به ارتفاع h چنان پرتاب می‌کنیم که در نقطه‌ای به فاصله افقی x از پای صخره فرود بیایند؛ شکل ۳۵. ϕ_0 و v_0 را چنان تعیین کنید که x کمینه شود. فرض کنید می‌توانیم v_0 را از صفر تا مقدار بیشینه متناهی v_{max} تغییر بدهیم و ϕ_0 را هم به دلخواه تنظیم کنیم. شرط مسئله این است که پرتابه باید تنها یک بار به زمین بخورد.

می‌کند و هر 2°s یک دور می‌زند؛ شکل ۳۸. ذره در $t = 0^{\circ}$ از O می‌گذرد. (الف) اندازه و جهت بردار مکان ذره در زمانهای 5°s ، 7.5°s و 1°s (نسبت به O)؛ (ب) اندازه و جهت بردار جابه‌جایی در بازه 5° ثانیه‌ای از پایان ثانیه پنجم تا پایان ثانیه دهم؛ (ج) بردار سرعت متوسط در این بازه؛ (د) بردار سرعت لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه؛ و (ه) بردار شتاب لحظه‌ای در آغاز و پایان این بازه را پیدا کنید. زاویه‌ها را در جهت پادساعتگرد نسبت به محور x بسنجید.

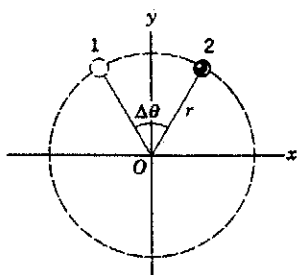


شکل ۳۸. مسئله ۵۸

۵۹. ذره‌ای روی دایره‌ای به مرکز مبدأ مختصات O ، با سرعت v به طور یکنواخت حرکت می‌کند. (الف) نشان بدهید که زمان Δt لازم برای جابه‌جایی زاویه‌ای ذره به اندازه $\Delta\theta$ از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta t = \frac{2\pi r}{v} \frac{\Delta\theta}{360^{\circ}}$$

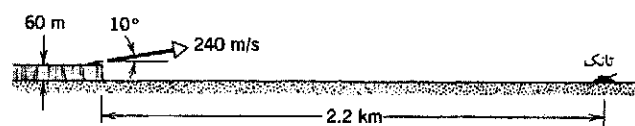
که در آن $\Delta\theta$ برحسب درجه و r شعاع دایره است. (ب) در شکل ۳۹، مؤلفه‌های x و y سرعت در نقاط ۱ و ۲ را در نظر بگیرید. نشان بدهید که برای دو نقطه متقارن نسبت به محور y ، و به ازای $\Delta\theta = 90^{\circ}$ خواهیم داشت $\vec{a}_x = 0$ و $\vec{a}_y = -0.9v^2/r$ (ج) نشان بدهید که اگر $\Delta\theta = 30^{\circ}$ باشد، $\vec{a}_x = 0$ و $\vec{a}_y = -0.99v^2/r$ است. (د) نشان بدهید که در حد $\Delta\theta \rightarrow 0$ ، $\vec{a}_y \rightarrow -v^2/r$ ، و اینکه تقارن دورانی ایجاد می‌کند که این نتیجه برای همه نقاط روی دایره درست باشد.



شکل ۳۹. مسئله ۵۹

۶۰. کودکی سنگی را که به نخ بسته است روی دایره‌ای افقی به شعاع 1.4m و در ارتفاع 1.9m از سطح زمین می‌گرداند. نخ پاره می‌شود و سنگ به طور افقی پرتاب می‌شود و 11m دورتر به زمین می‌خورد. شتاب مرکزگرای سنگ در حرکت دایره‌ای چقدر بوده است؟

مدتی بعد از شروع حرکت تانک شلیک کنند تا گلوله به تانک بخورد؟



شکل ۳۷. مسئله ۴۹

۵۰. بازیکنی می‌تواند توپ بیسبال را حداکثر تا فاصله 60m پرتاب کند. همین بازیکن توپ را حداکثر تا چه ارتفاعی می‌تواند پرتاب کند؟ فرض کنید که توپ، در هر دو حالت، از ارتفاع 1.6m و با سرعت اولیه یکسان رها می‌شود.

بخش ۴-۴ حرکت دایره‌ای یکنواخت

۵۱. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون روی مداری دایره‌ای به شعاع $5.29 \times 10^{-11}\text{m}$ و با سرعت $2.18 \times 10^6\text{m/s}$ به دور پروتون می‌گردد. شتاب الکترون در این مدل چقدر است؟

۵۲. فضاپرونده‌ای در یک دستگاه گریز از مرکز (سانتریفوز) به شعاع 5.2m چرخانده می‌شود. (الف) به ازای چه سرعتی، شتاب فضاپرونده $6g$ می‌شود؟ (ب) این سرعت متناظر با چند دور بر دقیقه است؟

۵۳. ماهواره‌ای در یک مدار دایره‌ای به ارتفاع 640km از سطح زمین حرکت می‌کند. زمان یک دور چرخش ماهواره 98min است. (الف) سرعت ماهواره چقدر است؟ (ب) شتاب سقوط آزاد در مدار ماهواره چقدر است؟

۵۴. شعاع چرخ و فلکی 15m است. این چرخ و فلک، هر دقیقه پنج بار به دور محور افقی‌اش می‌گردد. (الف) (اندازه و جهت) شتاب مسافران را در بالاترین نقطه چرخ و فلک پیدا کنید. (ب) شتاب مسافران را در پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک پیدا کنید.

۵۵. پنکه‌ای در هر دقیقه 1200 دور می‌زند. نقطه‌ای در بالای پره را در نظر بگیرید که 15m از محور فاصله دارد. (الف) در هر دور، این نقطه چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) سرعت این نقطه چقدر است؟ (ج) شتاب این نقطه چقدر است؟

۵۶. قطار سریع‌السیر TGV آتلانتیک، در مسیر بین پاریس و لمان در فرانسه کار می‌کند. بیشترین سرعت این قطار 310km/h است. (الف) اگر قرار باشد این قطار با همین سرعت از پیچی بگذرد، و اگر شتاب مجاز مسافران $0.5g$ باشد، شعاع پیچ حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) اگر شعاع پیچی 94km باشد، سرعت قطار در آن پیچ حداکثر چقدر می‌تواند باشد؟

۵۷. فرض بر این است که بعضی از ستاره‌های نوترونی (ستاره‌هایی فوق‌العاده چگال) با آهنگ حدود 1rev/s به دور خود می‌چرخند. اگر شعاع چنین ستاره‌ای 20km باشد (که نوعاً چنین است)، (الف) سرعت نقاط واقع بر استوای این ستاره چقدر است؟ (ب) شتاب مرکزگرای این نقاط چقدر است؟

۵۸. ذره P با سرعت ثابت روی دایره‌ای به شعاع 3m حرکت

بخش ۴-۶ حرکت نسبی

۶۷. شخصی پله برقی ساکنی به طول ۱۵m را در ۹s می‌پیماید. اگر شخصی روی همین پله برقی بایستد و پله برقی حرکت کند، همان مسیر در ۶s طی می‌شود. اگر شخصی از پله برقی بالا برود و پله هم در حرکت باشد، پیمودن این مسیر چقدر طول می‌کشد؟ آیا جواب به طول پله برقی بستگی دارد؟

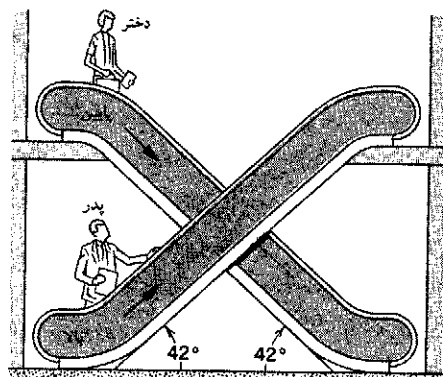
۶۸. پایانه فرودگاه زنو در سویس، یک "پیاده روی متحرک" دارد که حرکت مسافرا را در یک راهرو طویل سریع می‌کند. پیترا از این پیاده روی استفاده نمی‌کند و راهرو را در ۱۵s می‌پیماید. پل فقط روی پیاده روی می‌ایستد و راهرو را در ۷s می‌پیماید. مری ضمن استفاده از پیاده روی، روی آن راه هم می‌رود. با فرض اینکه سرعت راه رفتن مری و پیترا یکسان باشد، چقدر طول می‌کشد تا مری راهرو را بپیماید؟

۶۹. زمان برنامه‌ریزی شده یک پرواز بین قاره‌ای به مسافت ۲۷۰۰mi، در جهت غرب ۵min بیشتر است تا در جهت شرق. سرعت هواپیما نسبت به هوا ۶۰۰mi/h است. در تعیین این برنامه، چه فرضی درباره سرعت وزش باد شده است؟ باد را شرقی غربی در نظر بگیرید.

۷۰. برف در راستای قائم با سرعت ثابت ۷m/s می‌بارد. راننده‌ای اتومبیلش را روی جاده‌ای مسطح با سرعت ۵۵km/h می‌راند. از دید راننده، دانه‌های برف (الف) با چه زاویه‌ای نسبت به راستای قائم، و (ب) با چه سرعتی سقوط می‌کنند؟

۷۱. قطاری با سرعت ۲۸m/s (نسبت به زمین) به طرف جنوب در حرکت است. در مسیر باران می‌بارد و باد باران را به طرف جنوب کج می‌کند. مسیر قطره‌های باران، از دید ناظر ساکن بر زمین، با راستای قائم زاویه ۶۴° می‌سازد. اما ناظر سوار بر قطار، بارش باران را دقیقاً عمود به سطح زمین می‌بیند. سرعت قطره‌های باران نسبت به زمین چقدر است؟

۷۲. در یک فروشگاه بزرگ، شخصی روی پله برقی‌ای با زاویه شیب ۴۲° که با سرعت ۷۵m/s به بالا می‌رود ایستاده است. این شخص از کنار دخترش می‌گذرد که روی پله برقی مشابهی ایستاده است و دارد از طبقه بالا به پایین می‌آید؛ شکل ۴۱. بردار سرعت شخص را نسبت به دخترش پیدا کنید.



شکل ۴۱. مسئله ۷۲

۶۱. (الف) با استفاده از داده‌های پیوست ج، نسبت شتابهای مرکزگرای زمین و زحل را، در گردش به دور خورشید، به دست بیاورید. فرض کنید که هر دو سیاره با سرعت ثابت در مدار دایره‌ای به دور خورشید می‌گردند. (ب) نسبت فاصله این دو سیاره از خورشید چقدر است؟ (ج) جوابهای دو قسمت (الف) و (ب) را با هم مقایسه کنید و رابطه ساده‌ای بین شتاب مرکزگرا و فاصله از خورشید پیشنهاد کنید. فرضیه خودتان را با محاسبه همین نسبت برای دو سیاره دیگر بیازمایید.

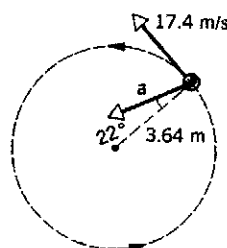
۶۲. (الف) شتاب مرکزگرای اجسام واقع بر استوای زمین (به علت چرخش زمین به دور خودش) چقدر است؟ (ب) دوره تناوب چرخش زمین باید چقدر می‌بود تا شتاب مرکزگرای اجسام روی استوا 9.8 m/s^2 باشد؟

۶۳. شتاب ناشی از چرخش زمین شخصی که در عرض جغرافیایی 40° است، چقدر است؟

۶۴. فرض کنید شخصی با 1.6 m قد به مدت 24 h در عرض جغرافیایی 50° ، صاف ایستاده باشد. (الف) در این مدت، مسافتی که "نوک" سر او می‌پیماید چقدر بیشتر از مسافتی است که نوک پایش می‌پیماید؟ (ب) شتاب نوک سر او چقدر بزرگتر از شتاب نوک پاهایش است؟ فقط آثار ناشی از چرخش زمین را در نظر بگیرید.

بخش ۴-۵ بردارهای سرعت و شتاب در حرکت دایره‌ای

۶۵. ذره‌ای در مسیری دایره‌ای به شعاع 3.64 m حرکت می‌کند. در یک لحظه معین، سرعت ذره 17.4 m/s ، و شتاب آن در جهت 22° نسبت به جهت مرکز دایره است؛ شکل ۴۰. (الف) آهنگ افزایش اندازه سرعت ذره چقدر است؟ (ب) اندازه شتاب ذره چقدر است؟



شکل ۴۰. مسئله ۶۵

۶۶. ذره‌ای طبق معادلات

$$x = R \sin \omega t + \omega R t$$

$$y = R \cos \omega t + R$$

در صفحه حرکت می‌کند؟ ω و R ثابت‌اند. مسیر حرکت این ذره را چرخزاد می‌نامند. این منحنی، مسیر نقطه‌ای است بر محیط چرخشی که بدون لغزش در راستای محور x می‌غلتد. (الف) مسیر را رسم کنید. (ب) سرعت و شتاب لحظه‌ای ذره را، در حالتی که در بیشترین و کمترین مقدار y است، به دست بیاورید.

۷۶. آسانسوری با شتاب $4r^\circ \text{ft/s}^2$ بالا می‌رود. در لحظه‌ای که سرعت آن $8r^\circ \text{ft/s}$ به طرف بالا است، پیچ لقی از سقف آسانسور رها می‌شود. بلندی اتاقک آسانسور $9r^\circ \text{ft}$ است. (الف) زمان حرکت پیچ از سقف تا کف آسانسور، و (ب) مسافت سقوط پیچ از دید ناظر زمین چقدر است؟

۷۷. هواپیمای سبکی با سرعت 48°km/h نسبت به هوا پرواز می‌کند. مقصد خلبان نقطه‌ای در فاصله 81°km به طرف شمال است. خلبان متوجه می‌شود که هواپیما را باید به اندازه 21° از شمال به طرف شرق هدایت کند تا به مقصد برسد. هواپیما در مدت $1r9 \text{h}$ به مقصد می‌رسد. اندازه و جهت سرعت باد را پیدا کنید.

۷۸. پلیس ایالت نیوهمپشایر، برای پاییندن سرعت اتومبیلها در بزرگراهها، از هواپیما استفاده می‌کند. فرض کنید سرعت یکی از این هواپیماها، در هوای ساکن، 135mi/h باشد. هواپیما مستقیماً به طرف شمال پرواز می‌کند تا همواره بر فراز یک بزرگراه شمالی-جنوبی باشد. یک ناظر زمینی با رادیو به خلبان خبر می‌دهد که بادی با سرعت 7°mi/h جریان دارد، اما فراموش می‌کند جهت باد را بگوید. خلبان مشاهده می‌کند که با وجود باد، باز هم هواپیمایش می‌تواند 135mi بر فراز بزرگراه را طی 1h ببیماید. یعنی اندازه سرعت هواپیما نسبت به زمین، همان است که در هوای آرام بود. (الف) باد در چه جهتی می‌وزد؟ (ب) سر هواپیما در چه جهتی است، یعنی زاویه بین محور هواپیما و بزرگراه چقدر است؟

۷۹. شخصی می‌تواند قایقی را با سرعت 4°mi/h در آب ساکن براند. (الف) اگر او بخواهد از عرض رودخانه‌ای بگذرد که سرعت جریان آن $2r^\circ \text{mi/h}$ است، قایقش را باید در چه جهتی هدایت کند تا درست به نقطه مقابل برسد؟ (ب) اگر عرض رودخانه $4r^\circ \text{mi}$ باشد، چقدر طول می‌کشد تا از رودخانه بگذرد؟ (ج) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای $2r^\circ \text{mi}$ پایین‌تر برود و برگردد؟ (د) چه مدتی طول می‌کشد تا به نقطه‌ای $2r^\circ \text{mi}$ بالاتر برود و برگردد؟ (ه) قایق را در چه جهتی براند تا در کوتاهترین زمان ممکن از رودخانه بگذرد؟ این زمان چقدر است؟

۸۰. واگنی چوبی روی ریل مستقیمی با سرعت v_1 حرکت می‌کند. راهزنی با تفنگ پر قدرتی به آن شلیک می‌کند سرعت اولیه گلوله v_2 است. گلوله از هر دو دیواره جانبی واگن می‌گذرد و دو سوراخ ایجاد می‌کند. این سوراخها، از دید ناظر واگن، درست روبه روی هم‌اند. گلوله در چه جهتی، نسبت به واگن شلیک شده است؟ فرض کنید که گلوله هنگام ورود به واگن منحرف نشده، اما سرعتش به اندازه 20% کم شده است. فرض کنید $v_1 = 85 \text{km/h}$ و $v_2 = 65 \text{m/s}$ است. (تعجب می‌کنید که برای حل مسئله لازم نیست که عرض واگن معلوم باشد؟)

۸۱. مردی می‌خواهد با قایق از رودی به عرض 5°m بگذرد. سرعت حاصل از پارو زنی او (نسبت به آب) $3r^\circ \text{km/h}$ ، سرعت جریان آب $2r^\circ \text{km/h}$ ، و سرعت پیاده روی مرد در ساحل $5r^\circ \text{km/h}$ است. (الف) مسیری را پیدا کنید که این شخص بتواند از طریق آن در

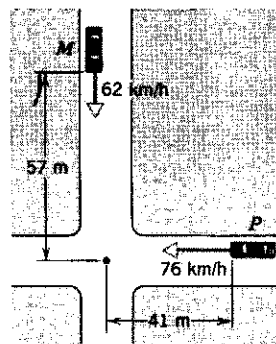
۷۳. خلبانی باید در جهت شرق از A به B برود. بعد در جهت غرب به A برگردد. سرعت هواپیما نسبت به هوا v ، و سرعت هوا نسبت به زمین u است. فاصله A تا B برابر با l است، و سرعت هواپیما نسبت به هوا ثابت می‌ماند. (الف) نشان بدهید که اگر $u = 0$ باشد (هوای ساکن)، زمان رفت و برگشت $t_0 = 2l/v$ است. (ب) فرض کنید که سرعت باد در جهت شرق (یا غرب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_E = \frac{t_0}{1 - u^2/v^2}$$

(ج) فرض کنید که سرعت باد در جهت شمال (یا جنوب) است. نشان بدهید که زمان رفت و برگشت برابر است با

$$t_N = \frac{t_0}{\sqrt{1 - u^2/v^2}}$$

(د) در قسمتهای (ب) و (ج) باید فرض کرد که $u < v$ است. چرا؟ ۷۴. دو بزرگراه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ شکل ۴۲. در لحظه‌ای که در شکل نشان داده شده است، اتومبیل پلیس (P) در فاصله 41m از تقاطع است و با سرعت 76km/h حرکت می‌کند. اتومبیل سواری (M) از تقاطع فاصله دارد و با سرعت 62km/h در حرکت است. سرعت (اندازه و زاویه بردار سرعت نسبت به خط دید) اتومبیل M را نسبت به اتومبیل پلیس پیدا کنید.



شکل ۴۲. مسئله ۷۴

۷۵. هلی‌کوپتری بر فراز یک دشت مسطح، روی خط راست پرواز می‌کند. سرعت هلی‌کوپتر ثابت، و برابر با 62m/s است. ارتفاع پرواز هم ثابت، و برابر با 95m است، بسته‌ای با سرعت افقی 12m/s نسبت به هلی‌کوپتر، و در خلاف جهت حرکت هلی‌کوپتر، از آن رها می‌شود. (الف) سرعت اولیه بسته نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) فاصله افقی بین هلی‌کوپتر و بسته، در لحظه برخورد بسته به زمین چقدر است؟ (ج) زاویه بردار سرعت بسته با زمین، درست پیش از برخورد، از دید ناظر زمین چقدر است؟ (د) این زاویه از دید خلبان هلی‌کوپتر چقدر است؟

بی آنکه نیاز به تغییر بقیه مقادیر باشد. برنامه را با مسئله زیر آزمایش کنید. نتایج کامپیوتری را با نتایج حاصل از عبارتهای جبری مناسب مقایسه کنید.

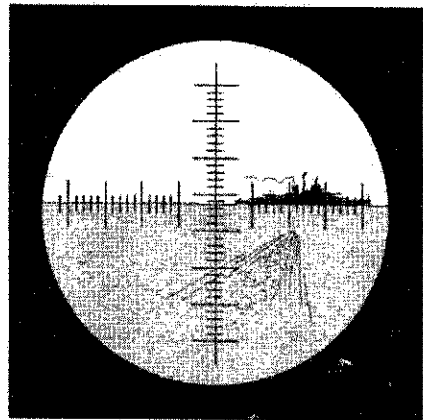
پرتابه‌ای با سرعت $v_0 = 50 \text{ m/s}$ و با زاویه 25° بالاتر از افق، از زمین شلیک می‌شود. (الف) $x(t), y(t), v_x(t), v_y(t)$ را در هر 1 s ، از $t = 0$ تا $t = 4.5 \text{ s}$ ، به دست بیاورید. (ب) دو زمان متوالی را که لحظه رسیدن پرتابه به نقطه اوج بین آن دو است پیدا کنید. حالا برنامه را دوباره اجرا کنید. این بار t_1 را زمان کوچکتر دو زمان بالا، و Δt را 0.5 s بگیرید. با استفاده از جدول، مختصات نقطه اوج را تا رقم ۲ با معنی به دست بیاورید. (ج) با استفاده از همین روش، زمان، مختصات، و مؤلفه‌های سرعت پرتابه را در موقعی که به ارتفاع نقطه شلیک برگشته است پیدا کنید.

۸۶. ذره‌ای با شتاب $a_x = -1.7$ و $a_y = -0.45$ در صفحه xy حرکت می‌کند. (در این مسئله، همه طولها بر حسب سانتی‌متر و همه زمانها بر حسب ثانیه‌اند.) در $t = 0$ ، ذره با سرعت $v_x = 1$ و $v_y = 2$ از نقطه $x = 1, y = 1$ می‌گذرد. برنامه‌ای بنویسید که متغیرهای زیر را، که حرکت ذره را توصیف می‌کنند، تنها برای مواقعی که ذره در ربع اول (طرف راست بالا) دستگاه مختصات است جدول‌بندی کند. t, x, y, v_x, v_y, ϕ (یعنی $\tan^{-1}y/x$), θ (یعنی $\tan^{-1}v_y/v_x$). با استفاده از جدولی که حاصل می‌شود، به این پرسشها پاسخ بدهید. (الف) ذره در چه زمانی و در کدام نقطه از ربع اول خارج می‌شود؟ (ب) بیشترین فاصله ذره از مبدأ چقدر است و در این نقطه چه سرعتی دارد؟ (ج) ذره، در لحظه‌ای که سرعت آن 2.0 است، در چه جهتی حرکت می‌کند؟ (د) ذره در چه نقطه‌ای خط 45° (نیمساز ربع اول) را قطع می‌کند؟

۸۷. مختصات جسمی که روی دایره به شعاع R به طور یکنواخت حرکت می‌کند، $x = R \cos \omega t$ و $y = R \sin \omega t$ است؛ ω ثابت و زاویه ωt بر حسب رادیان است. برنامه‌ای بنویسید یا الگوریتمی طرح کنید، که بردار سرعت متوسط را در بازه زمانی t_0 تا $t_0 + \Delta t$ محاسبه کند. به ازای $R = 1.5 \text{ m}$ و $\omega = 5 \text{ rad/s}$ ، حساب کنید که $\bar{v}_x = [x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)]/\Delta t$ و $\bar{v}_y = [y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)]/\Delta t$ چقدر است. برنامه را چنان تنظیم کنید که بشود در هر اجرا مقادیر t_0 و Δt را به راحتی تغییر داد. اگر همه متغیرها را با دقت مضاعف بگیرید، اذت دقت در محاسبات کم می‌شود. (الف) به ازای $x, y, \bar{v}_x, \bar{v}_y$ و $x\bar{v}_x + y\bar{v}_y$ را حساب کنید. عبارت اخیر برابر است با حاصل ضرب اسکالر بردارهای مکان و سرعت متوسط که صفر است اگر این دو بردار بر هم عمود باشند. حالا این محاسبه را به ازای 1 s ، $\Delta t = 0.1 \text{ s}$ ، $\Delta t = 0.01 \text{ s}$ و $\Delta t = 0.001 \text{ s}$ تکرار کنید. دقت کنید که مؤلفه‌های \bar{v} ، مرتباً به مقادیر حدی خودشان، که مؤلفه‌های سرعت لحظه‌ای v اند، نزدیکتر می‌شوند، و خود \bar{v} هم مرتباً به جهت بردار مکان (یعنی مماس بر دایره) نزدیکتر می‌شود.

کوتاهترین زمان ممکن درست به نقطه مقابل در آن طرف رودخانه برسد. (حرکت می‌تواند ترکیبی از قایق‌رانی و پیاده‌روی باشد.) (ب) این زمان چقدر است؟

۸۲. رزم‌ناوی با سرعت 24 km/h به طرف شرق می‌رود. از یک زیردریایی در فاصله 4 km اذری با سرعت 5 km/h به طرف آن شلیک می‌شود؛ شکل ۴۳. ناو از زیردریایی، در جهت 20° شرق شمال مشاهده می‌شود. (الف) اذدر در چه جهتی شلیک شود تا به ناو اصابت کند؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا اذدر به ناو برسد؟



شکل ۴۳. مسئله ۸۲

۸۳. الکترونی با سرعت $0.42c$ نسبت به ناظر B حرکت می‌کند. ناظر B با سرعت $0.63c$ ، در همان جهت حرکت الکترون، نسبت به ناظر A در حرکت است. سرعت الکترون از دید ناظر A چقدر است؟ ۸۴. رصد نشان می‌دهد که کهکشان آلفا با سرعت $0.35c$ از ما دور می‌شود. کهکشان بتا هم، که درست در نقطه مقابل کهکشان آلفاست، با همین سرعت از ما دور می‌شود. از دید ناظر آلفا (الف) کهکشان ما و (ب) کهکشان بتا با چه سرعتی از کهکشان خودش دور می‌شوند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۸۵. کامپیوتر می‌تواند جدولی از مختصات، مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب یک جسم در زمانهای معین را تهیه کند. به کمک این جدول می‌توانیم کمیتهای مورد نظر، مثلاً اوج مسیر، زمان برگشت به زمین، و غیره را جستجو کنیم. برنامه‌ای بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات و مؤلفه‌های سرعت یک پرتابه را در پایان بازه‌های زمانی Δt از زمان t_1 تا زمان $t_1 + \Delta t$ محاسبه کند. فرض کنید پرتابه در $t = 0$ از مبدأ شروع به حرکت می‌کند. کامپیوتر باید $v_x = v_0 \cos \theta_0 - \frac{1}{2}gt^2$ ، $x = v_0 t \cos \theta_0$ ، $v_y = v_0 \sin \theta_0 - gt$ و $y = v_0 t \sin \theta_0$ را به ازای $t = t_1 + \Delta t$ ، $t = t_1 + 2\Delta t$ ، $t = t_1 + 3\Delta t$ ، ... حساب کند. ابتدا مقادیر $v_0, \theta_0, t_1, \Delta t$ ، و N را به کامپیوتر بدهید. برنامه را چنان تنظیم کنید که در هر اجرا به راحتی بشود $t_1, \Delta t$ ، و N را تغییر داد

دو بردار با هم موازی باشند، صفر است. محاسبه را به ازای $t_0 = 1\text{ s}$ و $\Delta t = 1\text{ s}$ ، $\Delta t = 0.1\text{ s}$ ، $\Delta t = 0.01\text{ s}$ ، $\Delta t = 0.001\text{ s}$ انجام دهید. توجه کنید که \bar{a} مدام به مقدار a خود محدود می‌شود، که شتاب لحظه‌ای a است، نزدیکتر می‌شود، و خود a هم به جهت بردار مکان نزدیکتر می‌شود. مؤلفه‌های a عبارت‌اند از $a_x = -\omega^2 R \cos \omega t$ و $a_y = -\omega^2 R \sin \omega t$. این مقادیر را به دست بیاورید و با نتایج حاصل از برنامه خودتان مقایسه کنید. همچنین تحقیق کنید که نتایج حاصل از برنامه شما هم مقدار $a = v^2/R$ را برای اندازه شتاب به دست می‌دهد.

چنانکه مستقیماً با مشتق‌گیری می‌شود نشان داد، مؤلفه‌های v عبارت‌اند از $v_x = -\omega R \sin \omega t$ و $v_y = \omega R \cos \omega t$. این مقادیر را به دست بیاورید و به کمک آن ببینید که برنامه شما با چه دقتی v را تخمین زده است. (ب) حالا برنامه را تغییر بدهید و مؤلفه‌های شتاب متوسط، $\bar{a}_x = [v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)]/\Delta t$ و $\bar{a}_y = [v_y(t_0 + \Delta t) - v_y(t_0)]/\Delta t$ را حساب کنید. برای این کار، عبارت $v_x(t) = -\omega R \sin \omega t$ و $v_y(t) = \omega R \cos \omega t$ را به کار ببرید. $x\bar{a}_y - y\bar{a}_x$ را هم حساب کنید. قدرمطلق این مقدار، اندازه حاصل ضرب برداری بردارهای مکان و شتاب است، که اگر این



نیرو و قوانین نیوتون

در فصلهای ۲ و ۴، حرکت ذرات را بررسی کردیم. نپرسیدیم که چه چیزی "باعث" حرکت می‌شود؛ صرفاً به توصیف حرکت برحسب بردارهای x ، v و a پرداختیم. در این فصل و فصل بعدی، علت حرکت را بررسی می‌کنیم. این بخش از مکانیک را دینامیک می‌نامند.

رهیافتی به دینامیک که ما در این فصل و فصل بعدی اختیار کرده‌ایم عموماً مکانیک کلاسیک نامیده می‌شود. این رهیافت در قرنهای هفدهم و هیجدهم فرمولبندی و با موفقیت آزموده شد. در قرن ما نظریه‌های جدیدی (نسبیت خاص و عام و مکانیک کوانتومی) ظهور کرده‌اند که واقعیتهایی فراتر از تجربیات روزمره را آشکار می‌کنند؛ این واقعیتها در حوزه‌هایی بروز می‌کنند که در آنها مکانیک کلاسیک نمی‌تواند پیش‌بینیهای سازگار با تجربه ارائه کند. اما همین نظریه‌ها هم در حد اجسام معمولی به مکانیک کلاسیک تحویل می‌شوند.

بدون نیاز به نسبیت خاص و عام یا مکانیک کوانتومی هم می‌شود آسمانخراش‌های عظیم ساخت و خواص مواد سازنده آنها را بررسی کرد؛ می‌شود هواپیماهایی ساخت که صدها نفر را جابه‌جا کنند و نیمی از کره زمین را یکسره بپیمایند؛ و می‌شود فضاپیماهایی ساخت که مأموریت‌های مشکلی به سوی دنباله‌دارها، سیاره‌ها، و جز آنها انجام بدهند. اینها همه در قلمرو مکانیک کلاسیک‌اند.

۱-۵ مکانیک کلاسیک

مطالعه را به حرکت یک جسم معین معطوف می‌کنیم. این جسم با اجسام اطراف خودش (یعنی با محیط خودش) برهم‌کنش می‌کند، و به این ترتیب سرعتش تغییر می‌کند؛ شتاب تولید می‌شود. در جدول ۱، چند حرکت شتابدار معمولی و همچنین در هر مورد مؤثرترین عامل در تولید شتاب آمده است. مسئله اساسی مکانیک کلاسیک این است: ۱. جسمی داریم که مشخصات آن (از قبیل جرم، حجم، و بار الکتریکی) را می‌دانیم. ۲. این جسم را، در مکان اولیه مشخص و با

سرعت اولیه مشخص، در محیطی که کاملاً می‌شناسیم رها می‌کنیم.

۳. حرکت بعدی این جسم چگونه است؟

در فصلهای قبلی، اجسام فیزیکی را ذره در نظر گرفتیم، یعنی اجسامی که ساختار یا حرکات درونی‌شان قابل اغماض است و همه اجزایشان دقیقاً یک جور حرکت می‌کنند. در بررسی برهم‌کنشی اجسام با محیط، اغلب باید اجسام گسترده‌ای را در نظر گرفت که بخشهای متفاوتشان به طرق مختلفی با محیط برهم‌کنش دارند. مثلاً کارگری را در نظر بگیرید که یک صندوق سنگین را روی یک سطح ناهموار

جدول ۱. چند حرکت شتابدار و علت آنها.

جسم	تغییر حرکت	علت اصلی (محیط)
سیب	افتادن از درخت	گرانش (زمین)
گوی بیلیارد	واجبیدن از یک گوی دیگر	گوی دیگر، میز، گرانش (زمین)
اسکی‌باز	لغزیدن از تپه به پایین	گرانش (زمین)، اصطکاک (برف)، مقاومت هوا
پرتو الکترون (در تلویزیون)	کانونی شدن و انحراف	میدان الکترومغناطیسی (آهنربا و اختلاف ولتاژ)
دنباله‌دار هالی	گردش در منظومه شمسی	گرانش (خورشید)

۲-۵ قانون اول نیوتون

مسئله حرکت و علل آن، قرنهای یکی از موضوعات مهم فلسفه طبیعی (آنچه امروز فیزیک می‌نامیم) بود. اما تازه در زمان گالیله و نیوتون بود که پیشرفت چشمگیری به دست آمد. ایزاک نیوتون، که در همان سال مرگ گالیله در انگلستان به دنیا آمد، معمار اصلی مکانیک کلاسیک است. او بود که تفکرات گالیله و پیشینیانش را کاملاً به ثمر رساند. سه قانون حرکت نیوتون، ابتدا (در سال ۱۶۸۶) در کتابش، اصول ریاضی فلسفه طبیعی، منتشر شد. این کتاب را اغلب به نام اصلی‌اش "پرنسیپیا" می‌نامند.

پیش از گالیله، بیشتر فلاسفه می‌پنداشتند که نوعی اثر یا "نیرو" لازم است تا جسمی در حال حرکت بماند. آنها فکر می‌کردند اجسام زمانی در "حالت طبیعی" خودشان هستند که ساکن باشند. مثلاً گمان می‌کردند برای اینکه جسمی با سرعت ثابت روی خط راست حرکت کند، یک عامل خارجی لازم است تا پیوسته آن را براند؛ در غیر این صورت به گمان آنها، جسم "طبیعتاً" می‌ایستاد.

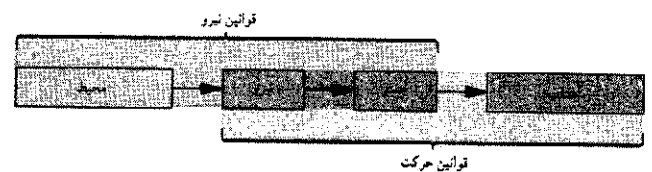
کسی که بخواهد این افکار را تجربه کند، اول باید راهی بیابد که همه آثار محیطی یا همه نیروها را، برای جسم مورد بررسی حذف کند. این کار خیلی سخت است، اما در موارد خاصی می‌شود نیروها را فوق‌العاده کوچک کرد. اگر حرکت اجسام را، هنگامی که نیروها را کوچک و کوچکتر می‌کنیم، بررسی کنیم، می‌توانیم تصویری از حالتی که نیروهای خارجی واقعاً صفر شده‌اند به دست بیاوریم.

فرض کنید جسم آزمونی، مثلاً یک قالب، را روی سطح افقی زبری بگذاریم. اگر قالب را روی صفحه بلغزانیم، خواهیم دید که حرکتش به تدریج کند می‌شود و می‌ایستد. در واقع همین قبیل مشاهدات بود که توقف حرکت در غیاب عامل خارجی را تأیید می‌کرد. در این مورد، عامل خارجی فشار دست است، که با برداشتن آن جسم متوقف می‌شود. اما می‌توانیم برای مردود شمردن این فکر، چنین استدلال کنیم: فرض کنید آزمایش را تکرار می‌کنیم، اما این بار با قالبی صافتر و سطحی صافتر، خواهیم دید که سرعت جسم آهسته‌تر از حالت پیش کم می‌شود. قالب و سطح را بار هم صیقلی‌تر می‌کنیم و این بار روان‌کننده هم به‌کار می‌بریم. خواهیم دید که آهنگ کاهش سرعت قطعه مرتباً کمتر می‌شود و قطعه هر بار مسافت بیشتری را تا زمان توقف می‌پیماید. شاید خودتان با ریل هوا هم آزمایش کرده باشید: می‌شود اجسام را بر ریل هوا روی لایه نازکی از هوا شناور کرد. با چنین ابزاری به حد بدون اصطکاک نزدیک می‌شویم: حتی ضربه کوچکی به جسم کافی است تا آن را، با سرعت کم و تقریباً ثابت، روی ریل براند. حالا می‌توانیم برونیایی کنیم و بگوییم که اگر می‌شد اصطکاک را کاملاً حذف کرد، اجسام به‌طور نامحدود با سرعت ثابت روی خط راست حرکت می‌کردند. برای به حرکت درآوردن اجسام نیرو لازم است، اما برای اینکه جسمی به حرکت با سرعت ثابت ادامه بدهد نیروی خارجی لازم نیست.

دستیابی به شرایطی که هیچ نیروی خارجی‌ای بر جسم اثر نکند

هل می‌دهد. کارگر به یکی از وجوه قائم صندوق نیرو وارد می‌کند؛ در همین حال، به کف افقی صندوق نیروی بازدارنده اصطکاک وارد می‌شود. همچنین ممکن است وجه جلویی صندوق تحت اثر مقاومت هوا قرار بگیرد.

در قسمتهای بعدی همین کتاب، مکانیک اجسام گسترده را هم به تفصیل بررسی خواهیم کرد. فعلاً همچنان فرض می‌کنیم که همه قسمتهای جسم یک نوع حرکت دارند و در نتیجه می‌توانیم جسم را ذره در نظر بگیریم. در این شرایط، مهم نیست که محیط به کجای جسم اثر می‌کند؛ هدف اصلی ما فعلاً بررسی اثر خالص محیط است. ایزاک نیوتون (۱۶۴۲ تا ۱۷۲۷) با ارائه قوانین حرکت و قانون گرانش جهانی خود، این مسئله مکانیک کلاسیک را، لااقل برای بسیاری از محیطها، حل کرد. برنامه حل این مسئله، در چارچوب مکانیک کلاسیک، چنین است: ۱. از مفهوم نیرو (F) را که فعلاً به صورت هل دادن یا کشیدن در نظر می‌گیریم— معرفی می‌کنیم و آن را بر حسب شتابی (a) که به یک جسم استاندارد معین می‌دهد تعریف می‌کنیم. ۲. روشی برای نسبت دادن جرم (m) به اجسام اختیار می‌کنیم؛ به این ترتیب می‌توانیم بفهمیم که اجسام با جرمهای متفاوت در محیطهای یکسان شتابهای مختلفی می‌گیرند. ۳. سرانجام، سعی می‌کنیم راهی برای محاسبه نیروهای وارد بر اجسام، بر حسب خواص اجسام و محیط آنها، پیدا کنیم؛ یعنی دنبال قوانین نیرو می‌گردیم. نیرو، که اساساً واسطه محیط با حرکت جسم است، هم در قوانین حرکت (که می‌گویید یک جسم معین تحت تأثیر نیرویی معین چه شتابی دارد) ظاهر می‌شود و هم در قوانین نیرو (که می‌گویید چگونه می‌توان نیروی وارد بر جسمی معین در محیطی معین را حساب کرد). قوانین حرکت و قوانین نیرو، با هم، قوانین مکانیک را تشکیل می‌دهند (شکل ۱). بخشهای مختلف این برنامه مکانیک را نمی‌شود جداگانه آزمود. باید آن را به صورت واحد در نظر گرفت، و این برنامه وقتی موفق است که بتوانیم به این دو پرسش پاسخ مثبت بدهیم: ۱. آیا نتایج حاصل از برنامه با تجربه سازگار است؟ ۲. آیا شکل قوانین نیرو شکل ساده‌ای دارند؟ تاج افتخار مکانیک نیوتونی این است که واقعاً می‌شود به هر دو پرسش پاسخ مثبت داد.



شکل ۱. برنامه ما در مکانیک. سه جعبه سمت چپ نشان می‌دهند که نیرو برهم‌کنش جسم و محیط آن است. سه جعبه سمت راست نشان می‌دهند که نیروی وارد بر جسم، به آن شتاب می‌دهد.

که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر جسم در حالت سکون نماند، چارچوب لخت نیست. به همین ترتیب می‌شود جسم متحرکی را (که باز هم نیروی خالصی بر آن وارد نشود) در این چارچوب گذاشت؛ اگر (اندازه یا جهت) سرعت تغییر کند، چارچوب لخت نیست. چارچوبی که به این آزمون در همه نقاط مختلف پاسخ مثبت بدهد (جسم ساکن همچنان ساکن بماند و سرعت جسم متحرک ثابت بماند) یک چارچوب لخت است. همین‌که یک چارچوب لخت پیدا کردیم، به سادگی می‌توانیم بسیاری چارچوبهای لخت دیگر هم پیدا کنیم، چون، هر چارچوب مرجعی که نسبت به چارچوب اول با سرعت ثابت حرکت کند هم یک چارچوب لخت است.

در این کتاب، تقریباً همیشه قوانین مکانیک کلاسیک را از دیدگاه ناظرهای چارچوبهای لخت به‌کار می‌بریم. گاهی هم مسائلی را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت — مثلاً اتومبیل شتابدار، صفحه دوار، یا ماهواره‌های گردان در مدار — بررسی می‌کنیم. اگرچه زمین در حال چرخش است، می‌توانیم چارچوب مرجع وابسته به آن را، در اکثر موارد عملی، یک چارچوب تقریباً لخت در نظر بگیریم، اما در کاربردهای بزرگ مقیاس، مثلاً در تحلیل حرکت موشکهای فاره‌پیمای یا بررسی باد و جریانهای اقیانوس، نالخت بودن زمین چرخان اهمیت پیدا می‌کند. توجه کنید که قانون اول فرقی میان اجسام ساکن و اجسام متحرک با سرعت ثابت قائل نمی‌شود. اگر نیروی خالص وارد بر جسم صفر باشد، هر دو حرکت "طبیعی" اند. اگر جسمی را که نسبت به یک چارچوب مرجع ساکن است از دید چارچوب مرجع دیگری، که با سرعت ثابت نسبت به اولی حرکت می‌کند، بررسی کنیم، این موضوع روشنتر می‌شود. ناظر چارچوب اول جسم را ساکن می‌بیند؛ ناظر چارچوب دوم همان جسم را در حال حرکت با سرعت ثابت می‌بیند. هر دو ناظر در می‌یابند که جسم شتاب ندارد، یعنی سرعت آن تغییر نمی‌کند، و هر دو از قانون اول نتیجه می‌گیرند که نیروی خالصی بر جسم اثر نمی‌کند.

اگر برهم‌کنش خالصی بین جسم و اشیای محیط وجود داشته باشد، این اثر ممکن است حالت "طبیعی" حرکت جسم را تغییر بدهد. برای تحقیق این موضوع باید مفهوم نیرو را به‌دقت بررسی کنیم.

۳-۵ نیرو

برای پروراندن مفهوم نیرو، آن را به‌طور عملیاتی تعریف می‌کنیم. در زبان روزمره، نیرو همان هل دادن یا کشیدن است. برای سنجش کمی چنین نیروهایی، آنها را برحسب شتابی که به یک جسم استاندارد می‌دهند تعریف می‌کنیم.

به عنوان جسم استاندارد، کیلوگرم استاندارد را به‌کار می‌بریم (یا فرض می‌کنیم که داریم به‌کار می‌بریم). به این جسم، طبق تعریف، جرم m_0 دقیقاً برابر با 1kg نسبت داده شده است (شکل ۵ در فصل ۱). بعداً توضیح خواهیم داد که چگونه به هر جسم دیگری جرم نسبت می‌دهیم.

دشوار است. نیروی گرانش بر همه اجسامی که روی زمین، یا نزدیک آن، واقع شده‌اند اثر می‌کند؛ نیروهای بازدارنده‌ای مثل اصطکاک یا مقاومت هوا هم با حرکت اجسام بر سطح زمین یا در هوا مقابله می‌کنند. خوشبختانه لازم نیست به خلأ فضاهای دور برویم تا بتوانیم حرکت اجسام را به دور از نیروهای خارجی بررسی کنیم چون، تا آنجا که تنها حرکت انتقالی کلی جسم مطرح است، بین جسمی که هیچ نیروی خارجی به آن وارد نمی‌شود، و جسمی که مجموعاً یا برآیند نیروهای خارجی وارد بر آن صفر است، تفاوتی وجود ندارد. معمولاً برآیند همه نیروهای وارد بر جسم را نیروی "خالص" می‌نامیم. مثلاً، نیروی وارد از دست به قالب لغزنده، می‌تواند با نیروی اصطکاک وارد بر قالب مقابله کند و نیروی رو به بالای سطح افقی می‌تواند با نیروی گرانش مقابله کند. به این ترتیب، نیروی خالص وارد بر قالب می‌تواند صفر شود، و قطعه می‌تواند با سرعت ثابت حرکت کند. نیوتون این اصل را به عنوان نخستین قانون از قوانین سه‌گانه‌اش برگزید:

جسمی را در نظر بگیرید که هیچ نیروی خالصی بر آن وارد نمی‌شود. اگر این جسم ساکن باشد، در حالت سکون باقی خواهد ماند. اگر در حال حرکت باشد، با سرعت ثابت به حرکتش ادامه خواهد داد.

قانون اول نیوتون در واقع گزاره‌ای درباره چارچوبهای مرجع است. به‌طور کلی، شتاب اجسام بستگی به چارچوب مرجعی دارد که این شتاب نسبت به آن سنجیده می‌شود. اما قوانین مکانیک کلاسیک تنها در چارچوبهای مرجع خاصی درست‌اند، در آنهایی که ناظرهایشان همگی شتاب یکسانی برای جسم متحرک می‌سنجند. به کمک قانون اول نیوتون می‌شود این گروه چارچوبهای مرجع را مشخص کرد. به این منظور، قانون اول را چنین بیان می‌کنیم:

می‌توان دسته‌ای از چارچوبهای مرجع یافت که اگر نیروی خالص وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم در این چارچوبها صفر باشد.

تمایل اجسام برای باقی ماندن در حالت سکون یا در حرکت راستخط یکنواخت را لختی، و قانون اول نیوتون را اغلب قانون لختی می‌نامند. چارچوبهایی هم که این قانون در آنها برقرار است چارچوبهای لخت نامیده می‌شوند. قبلاً در بخش ۴-۶ در باره این چارچوبها صحبت کردیم؛ به خاطر دارید که ناظرهای چارچوبهای مرجع لخت متفاوت (که با سرعت ثابت نسبت به هم حرکت می‌کنند) همه یک شتاب می‌سنجند. بنابراین، فقط یک چارچوب نیست که شتاب در آن صفر است: مجموعه‌ای از چارچوبهای مرجع هست که همگی چنین خاصیتی دارند.

برای اینکه ببینیم یک چارچوب مرجع خاص لخت هست یا نه، جسم آزمونی را به حالت سکون در آن رها می‌کنیم و مطمئن می‌شویم

محور x تولید می‌کند، و نیروی 3N در جهت محور y هم شتاب 3m/s^2 در جهت محور y به جسم می‌دهد؛ شکل ۳ الف. اگر دو نیرو را با هم اعمال کنیم؛ شکل ۳ ب، خواهیم دید که شتاب جسم 5m/s^2 و در جهت خطی است که با محور x زاویه 37° می‌سازد. اگر به جسم نیروی 5N در این جهت وارد می‌شد هم همین شتاب به دست می‌آمد. برای به دست آوردن این نتیجه، می‌توانستیم اول دو نیروی 4N و 3N را جمع برداری کنیم (شکل ۳ ج) تا برآیند 5N در جهت 37° از محور x به دست بیاید، و بعد این نیروی خالص را به جسم اعمال کنیم. با آزمایشهایی از این نوع معلوم می‌شود که نیرو بردار است: یعنی اندازه و جهت دارد، و طبق قانون جمع برداری جمع می‌شود.

توجه کنید که دو روش تحلیل داریم که هر دو باید به یک نتیجه بینجامند. ۱. می‌توانیم شتاب حاصل از هر نیرو را پیدا کنیم و شتابها را با هم جمع برداری کنیم. ۲. می‌توانیم نیروها را جمع برداری کنیم، برآیند حاصل را به جسم اعمال کنیم و شتاب را به دست بیاوریم.

۴-۵ جرم

در بخش ۳-۵، فقط شتابهای یک جسم خاص، یعنی کیلوگرم استاندارد را بررسی کردیم. از اینجا توانستیم نیرو را به طور کمی تعریف کنیم، اما بینیم نیرو بر اجسام دیگر چه اثری می‌گذارد؟ چون جسم استاندارد را دلبخواه انتخاب کرده بودیم، طبیعی است که برای هر جسمی، شتاب مستقیماً متناسب با نیرویی باشد که بر آن وارد می‌شود. پرسش مهمی که باقی می‌ماند این است: اثر یک نیروی یکسان بر اجسام متفاوت چگونه است؟

پاسخ کیفی این سؤال از تجربیات روزمره حاصل می‌شود. نیروهای یکسان، شتابهای متفاوتی به اجسام متفاوت می‌دهند. یک نیروی معین، به توپ بیسبال شتاب بیشتری می‌دهد تا به یک اتومبیل. برای به دست آوردن پاسخ کمی به این پرسش، به روشی برای اندازه‌گیری جرم نیاز داریم، یعنی به روشی برای سنجش خاصیتی از جسم که مقاومت آن را در برابر تغییر حرکتش تعیین می‌کند.

فرض کنید که فزنی به جسم استانداردمان (کیلوگرم استاندارد، که خودمان به آن جرم m_0 ، دقیقاً برابر با 1kg نسبت دادیم) ببندیم و آن را، به روش شکل ۲ ب، چنان بکشیم که شتاب آن a ، 2.0m/s^2 شود. تغییر طول ΔL فنر را، که متناظر با نیرویی است که از فنر بر جسم وارد می‌شود، دقیقاً اندازه می‌گیریم.

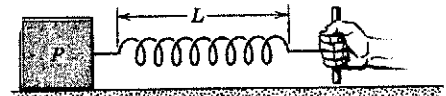
اکنون دو جسم استاندارد یکسان را به فنر می‌بندیم و همان نیروی سابق را به آنها وارد می‌کنیم (یعنی فنر را آنقدر می‌کشیم تا افزایش طول آن به همان اندازه ΔL باشد. شتاب مجموعه دو جسم را اندازه می‌گیریم، و می‌بینیم 1.0m/s^2 می‌شود. اگر سه جسم استاندارد به‌کار برده بودیم و همان نیرو را اعمال می‌کردیم، شتاب مجموعه را برابر می‌آوردیم.

برای اینکه محیطی داشته باشیم که نیرو وارد کند، جسم استاندارد را روی یک میز افقی با اصطکاک ناچیز می‌گذاریم و یک فنر به آن می‌بندیم و سر دیگر فنر را در دست می‌گیریم؛ شکل ۲ الف. سپس فنر را به راست می‌کشیم، چنانکه با آزمون خطا به حالتی برسیم که شتاب جسم استاندارد دقیقاً برابر با مقدار ثابت 1m/s^2 باشد. در این حالت می‌گوییم که فنر (که جسم با اهمیت محیط است) طبق تعریف هر کیلوگرم استاندارد نیروی ثابتی به اندازه "۱ نیوتون" (به اختصار 1N) وارد می‌کند. متوجه می‌شویم که فنر، در حالتی که این نیرو را وارد می‌کند، به اندازه ΔL ، نسبت به طول معمولی‌اش، کشیده شده است (شکل ۲ ب).

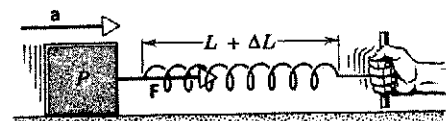
می‌شود آزمایش را تکرار کرد، و این بار فنر سخت‌تری به‌کار برد یا فنر را بیشتر کشید، تا شتابی که برای جسم استاندارد اندازه می‌گیریم برابر با 2m/s^2 بشود. در این حالت می‌گوییم که فنر نیروی 2N به جسم استاندارد وارد می‌کند. به‌طور کلی، اگر مشاهده کنیم که این جسم در یک محیط معین شتاب a دارد، می‌گوییم که محیط بر جسم 1kg استاندارد نیروی F وارد می‌کند. که در آن F (برحسب نیوتون) از لحاظ عددی برابر با a (برحسب متر بر مجذور ثانیه) است.

حالا ببینیم که آیا نیرو، که به شکل بالا تعریف کردیم، یک کمیت برداری است یا نه. در شکل ۲ ب به نیروی F اندازه نسبت دادیم. به راحتی می‌توانیم به آن جهت هم نسبت بدهیم، که این جهت همان جهت شتابی است که همین نیرو ایجاد کرده است. اما برای اینکه کمیتی بردار باشد کافی نیست که اندازه و جهت داشته باشد؛ این کمیت باید از قوانین جمع برداری فصل ۳ هم تبعیت کند. تنها با آزمایش می‌شود فهمید که نیرو، که به روش بالا تعریف شد، واقعاً طبق این قوانین رفتار می‌کند یا خیر.

یک نیروی 4N در راستای محور x و یک نیروی 3N در راستای محور y اعمال می‌کنیم. این نیروها را یکبار جداگانه و بعد با هم به جسم استاندارد، که همچنان روی سطح افقی بدون اصطکاک قرار دارد، وارد می‌کنیم. شتاب جسم چه خواهد بود؟ از آزمایش نتیجه می‌شود که نیروی 4N در جهت محور x ، شتاب 4m/s^2 در جهت

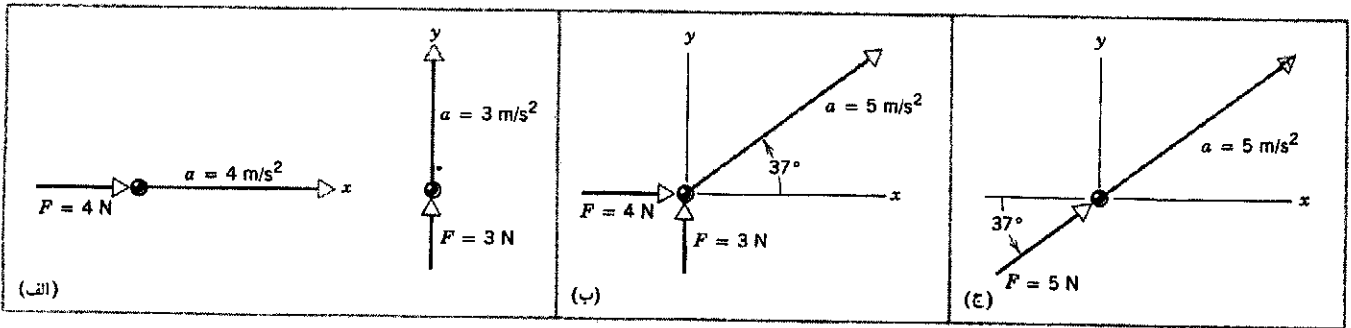


(الف)



(ب)

شکل ۲. الف) "ذره" P (کیلوگرم استاندارد) در حالت سکون روی یک سطح افقی بدون اصطکاک. ب) جسم، با کشیدن فنر به طرف راست، شتاب گرفته است.



شکل ۴. (الف) نیروی ۴N در جهت x ، شتاب 4 m/s^2 در جهت x تولید می‌کند، و نیروی ۳N در جهت y شتاب 3 m/s^2 در جهت y . (ب) اگر دو نیرو با هم اعمال شوند، شتاب برآیند برابر با 5 m/s^2 در جهتی است که نشان داده شده است. (ج) این شتاب را می‌شود با یک نیروی ۵N در جهت مشخص شده تولید کرد.

خواهیم دید که نسبت شتابها، a'_1/a_1 ، برابر با همان نسبت آزمایش قبلی است؛ یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} = \frac{a'_0}{a'_1}$$

مثلاً فرض کنید نیروی بزرگتری اعمال کنیم، چنانکه فنر به اندازه $1.5\Delta L$ کشیده شود. در این حالت خواهیم دید که جرم m_0 شتاب 3 m/s^2 و جرم مجهول m_1 شتاب 7.5 m/s^2 می‌گیرد. از اینجا جرم مجهول چنین به دست می‌آید:

$$m_1 = m_0 \left(\frac{a'_0}{a'_1} \right) = (1.0\text{ kg}) \left(\frac{3.0\text{ m/s}^2}{7.5\text{ m/s}^2} \right) = 0.4\text{ kg}$$

که همان مقداری است که در آزمایش قبل به دست آمد. مهم نیست که مقدار نیروی مشترکی که به کار می‌بریم چقدر باشد، در هر حال مقداری که برای m_1 حاصل می‌شود یکی است. نسبت جرم m_1/m_0 مستقل از نیروی مشترکی است که اعمال شده است؛ جرم از خواص بنیادی جسم است و بستگی به مقدار نیرویی که برای مقایسه جرم مجهول با جرم استاندارد به کار رفته است ندارد. پس به کمک این روش می‌توانیم جرم اجسام را از مقایسه با کیلوگرم استاندارد به دست بیاوریم.

این روش را می‌شود به مقایسه مستقیم جرم هر دو جسمی تعمیم داد. مثلاً فرض کنید که ابتدا جسم دلخواه دیگری را به همان روش قبلی با جسم استاندارد مقایسه و جرم آن، مثلاً m_2 ، را تعیین کنیم. اکنون می‌توانیم دو جسم m_1 و m_2 را مستقیماً با هم مقایسه کنیم: در اثر نیروی F''' ، شتابهای a''_1 و a''_2 به دست می‌آیند. نسبت جرمها که طبق معمول از رابطه

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{a''_1}{a''_2} \quad (\text{به‌ازای نیروی یکسان})$$

تعریف می‌شود، برابر با همان نسبتی است که از دو جرم m_1 و m_2 که مستقیماً از مقایسه با جرم استاندارد به دست آمده باشند، حاصل شده است.

از این مشاهدات معلوم می‌شود که به‌ازای نیروی ثابت، هر چه جرم بزرگتر باشد شتاب کوچکتر می‌شود. از این آزمایش و آزمایشهای مشابه دیگر، نتیجه می‌گیریم که شتابی که شتابی که یک نیروی معین تولید می‌کند، تناسب معکوس با جرم جسمی دارد که شتاب می‌گیرد. به بیان دیگر: جرم اجسام متناسب با عکس شتابی است که از یک نیروی معین می‌گیرند. به این ترتیب، جرم جسم را می‌توانیم معیاری کمی از مقاومت آن در برابر یک نیروی معین در نظر بگیریم.

با این مشاهده، روش مستقیمی برای مقایسه جرم اجسام مختلف به دست می‌آید: کافی است شتاب اجسام تحت تأثیر یک نیروی معین را بسنجیم و با هم مقایسه کنیم. نسبت جرمهای دو جسم برابر با عکس نسبت شتابهایی است که در اثر آن نیرو کسب می‌کنند، یعنی

$$\frac{m_1}{m_0} = \frac{a_0}{a_1} \quad (\text{به‌ازای نیروی یکسان})$$

اینجا در واقع داریم شتاب a_1 جسمی به جرم مجهول m_1 را با شتاب a_0 جسم استاندارد به جرم m_0 مقایسه می‌کنیم.

مثلاً فرض کنید نیرویی اعمال کنیم که به جرم استاندارد شتاب 2 m/s^2 بدهد. همان نیرو را به جسمی به جرم مجهول m_1 وارد می‌کنیم (برای این کار فنر را به همان اندازه ΔL می‌کشیم)، و شتاب a_1 را می‌سنجیم، که مثلاً برابر با 5 m/s^2 می‌شود. حالا می‌توانیم m_1 را از رابطه بالا بیاوریم. نتیجه می‌شود که

$$m_1 = m_0 \left(\frac{a_0}{a_1} \right) = (1.0\text{ kg}) \left(\frac{2.0\text{ m/s}^2}{5.0\text{ m/s}^2} \right) = 0.4\text{ kg}$$

شتاب جسم دوم، در اثر همان نیروی وارد بر جسم اول، یک چهارم شتاب جسم اول است؛ بنابراین، جرم آن چهار برابر جرم جسم اول است. این مثال رابطه معکوس میان جرم و شتاب را به‌ازای نیروی معین، نشان می‌دهد.

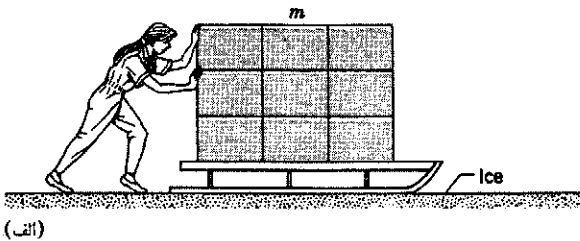
آزمایش بالا را برای همین دو جسم تکرار می‌کنیم، اما این بار به هر دو نیروی F' وارد می‌کنیم، که با F متفاوت است. این نیرو به جسم استاندارد شتاب a'_0 و به جسم مجهول شتاب a'_1 می‌دهد.

مربوط می‌کنند. لازم است تأکید کنیم که $\sum F_x$ جمع جبری مؤلفه‌های x همه نیروها، $\sum F_y$ جمع جبری مؤلفه‌های y همه نیروها، و $\sum F_z$ جمع جبری مؤلفه‌های z همه نیروهای وارد بر m است. در به‌دست آوردن جمع جبری، باید علامت مؤلفه‌ها (یعنی جهت نیروها نسبت به همدیگر) را در نظر گرفت.

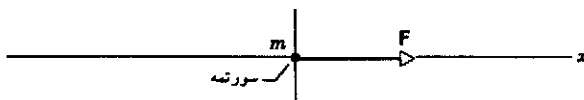
در تحلیل مسائل به کمک قانون دوم نیوتون، خوب است نموداری رسم کنیم که جسم مورد نظر را به شکل یک نقطه، و نیروهای وارد بر آن را به شکل بردارهایی که بر آن اثر می‌کنند نشان بدهد. چنین نمایشی را نمودار جسم آزاد می‌نامند؛ این نمایش یک گام اولیه اساسی، هم در تحلیل مسئله و هم در تجسم وضعیت فیزیکی، است.

مثال ۱. دانشجویی سورتme بارشده‌ای به جرم $m = 240 \text{ kg}$ را تا مسافت $d = 2.3 \text{ m}$ روی سطح بدون اصطکاک دریاچه یخزده‌ای با نیروی افقی ثابت $F = 130 \text{ N}$ (یعنی 29 lb) هل می‌دهد؛ شکل ۴ الف. اگر سورتme از حالت سکون شروع به حرکت کند، سرعت نهایی آن چه خواهد بود؟

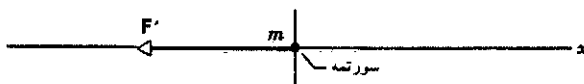
حل: یک محور x افقی می‌کشیم (شکل ۴ ب)، جهت افزایش x را به‌طرف راست می‌گیریم، و سورتme را ذره در نظر می‌گیریم. شکل ۴ ب یک نمودار جسم آزاد جزئی است. در کشیدن نمودار جسم آزاد، مهم است که همه نیروهای وارد بر ذره را در نظر بگیریم، اما در اینجا دو نیروی عمودی را حذف کرده‌ایم. این دو نیرو را — که تأثیری بر حل مسئله ما ندارند — بعداً در همین فصل بررسی خواهیم کرد.



(الف)



(ب)



(ج)

شکل ۴. مثالهای ۱ و ۲. (الف) دانشجویی سورتme بارشده را روی سطحی بدون اصطکاک هل می‌دهد. (ب) نمودار جسم آزادی که سورتme را به شکل "ذره"، همراه با نیروی وارد بر آن، نشان می‌دهد. (ج) نمودار جسم آزاد دیگری که نیروی وارد بر جسم را، وقتی که دانشجو آن را در جهت مخالف هل می‌دهد، نشان می‌دهد.

با آزمایش دیگری از همین نوع، می‌شود نشان داد که اگر دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 را به هم ببندیم، جسمی به‌دست می‌آید که از نظر مکانیکی مثل جسمی به جرم $m_1 + m_2$ رفتار می‌کند. به عبارت دیگر، جرم مانند کمیت‌های اسکالر جمع می‌شود (اسکالر هم هست). یکی از کاربردهای عملی این روش — تعیین جرم اجسام از راه مقایسه شتاب نسبی آنها در اثر نیروی یکسان — اندازه‌گیری دقیق جرم اتمهاست. در این مورد، نیروی منحرف‌کننده مغناطیسی، و شتاب شتاب مرکزگراست، اما اصول کار دقیقاً همان است که دیدیم. اگر نیروی مغناطیسی وارد بر دو اتم یکسان باشد، نسبت جرمهای دو اتم برابر با عکس نسبت شتابهای آنهاست. با اندازه‌گیری مقدار انحراف، مثلاً در طیف‌سنج جرمی (شکل ۶ در فصل ۱)، می‌شود نسبت دقیق جرم اتمهای مختلف را سنجید، و با تعریف ^{12}C به عنوان استاندارد، می‌شود مقادیر دقیق برای جرمها به‌دست آورد (مثل مقادیر جدول ۶ در فصل ۱).

۵-۵ قانون دوم نیوتون

حالا می‌توانیم همه آزمایشها و تعریفهای قبلی را در یک معادله، معادله بنیادی مکانیک کلاسیک، خلاصه کنیم:

$$\sum \mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1)$$

در این معادله، $\sum \mathbf{F}$ جمع (برداری) همه نیروهایی است که بر جسم اثر می‌کنند، m جرم جسم، و \mathbf{a} (بردار) شتاب آن است. معمولاً $\sum \mathbf{F}$ را نیروی برآیند یا نیروی خالص می‌نامند.

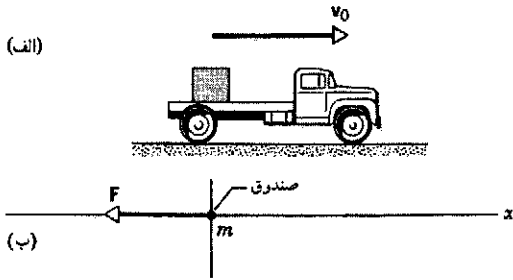
معادله ۱ بیانی از قانون دوم نیوتون است. اگر آن را به شکل $\mathbf{a} = (\sum \mathbf{F})/m$ بنویسیم، به سادگی دیده می‌شود که اندازه شتاب جسم مستقیماً متناسب با اندازه نیروی برآیند وارد بر آن است، و جهت شتاب هم با جهت نیرو موازی است. همچنین دیده می‌شود که شتاب حاصل از یک نیروی معین، با جرم جسم نسبت عکس دارد.

توجه کنید که قانون اول نیوتون را می‌شود حالت خاصی از قانون دوم تلقی کرد، چون اگر $\sum \mathbf{F} = 0$ باشد $\mathbf{a} = 0$ است. به بیان دیگر، اگر نیروی برآیند وارد بر جسمی صفر باشد، شتاب جسم صفر می‌شود و جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و این همان است که قانون اول نیوتون می‌گوید. اما قانون اول یک نقش مهم و مستقل از قانون دوم هم دارد، و آن تعریف چارچوبهای مرجع لخت است. بدون چنین تعریفی، نمی‌شود چارچوبهایی را که قانون دوم نیوتون در آنها معتبر است مشخص کرد. بنابراین هر دو قانون را لازم داریم تا سیستم مکانیکی کاملی داشته باشیم.

معادله ۱ معادله‌ای برداری است. این معادله را هم، مثل همه معادلات برداری دیگر، می‌توانیم به شکل سه معادله اسکالر بنویسیم:

$$\sum F_x = ma_x, \quad \sum F_y = ma_y, \quad \sum F_z = ma_z \quad (2)$$

این سه معادله، مؤلفه‌های x ، y ، و z نیروی برآیند $(\sum F_x)$ ، $(\sum F_y)$ ، و $(\sum F_z)$ را به مؤلفه‌های شتاب (a_x) ، (a_y) ، و (a_z) — m —



شکل ۵. مثال ۳. الف) صندوقی در کامیونی که سرعتش در حال کم شدن است. ب) نمودار جسم آزاد صندوق.

(که فرض می‌کنیم ثابت است) بر صندوق وارد می‌شود؟ فرض کنید صندوق روی کفه نمی‌لغزد.

حل: ابتدا شتاب (ثابت) صندوق را پیدا می‌کنیم. به این منظور از معادله ۱۵ فصل ۲ ($v = v_0 + at$) استفاده می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(62 \text{ km/h}) - (120 \text{ km/h})}{17 \text{ s}} = \left(-3.41 \frac{\text{km}}{\text{h} \cdot \text{s}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3600 \text{ s}}\right) \left(\frac{1000 \text{ m}}{1 \text{ km}}\right) = -0.95 \text{ m/s}^2$$

جهت مثبت راستای افقی را به طرف راست گرفته‌ایم. پس بردار شتاب به طرف چپ است.

نیروی وارد بر صندوق از قانون دوم نیوتون به دست می‌آید:

$$F = ma = (360 \text{ kg})(-0.95 \text{ m/s}^2) = -340 \text{ N}$$

نیرو هم در همان جهت شتاب، یعنی به طرف چپ شکل ۵ ب، است. این نیرو از طریق یک عامل خارجی به صندوق وارد می‌شود، مثلاً از طریق تسمه‌ها یا وسایل دیگری که برای محکم نگه‌داشتن صندوق به کار رفته است. اگر صندوق را نبسته باشند، نیرو باید از اصطکاک بین صندوق و کفه تأمین شود. اگر این اصطکاک برای تأمین 340 N نیرو کافی نباشد، صندوق روی کفه می‌لغزد و از دید ناظر ساکن نسبت به زمین، سرعتش با آهنگ کمتری (از کامیون) کند می‌شود.

فرض می‌کنیم که تنها نیروی افقی وارد بر سورتمه، نیروی F است که دانشجو وارد می‌کند. حالا می‌توانیم شتاب سورتمه را از قانون دوم نیوتون به دست بیاوریم:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{130 \text{ N}}{240 \text{ kg}} = 0.54 \text{ m/s}^2$$

چون شتاب ثابت است، می‌شود معادله ۲۰ فصل دوم $[v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)]$ را به کار برد و سرعت نهایی را به دست آورد. می‌گذاریم $v_0 = 0$ و $x - x_0 = d$ و v را حساب می‌کنیم؛ نتیجه می‌شود که

$$v = \sqrt{2ad} = \sqrt{(2)(0.54 \text{ m/s}^2)(2.3 \text{ m})} = 1.6 \text{ m/s}$$

نیرو، شتاب، جابه‌جایی، و سرعت نهایی سورتمه، همه مثبت‌اند؛ یعنی جهت آنها، در شکل ۴ ب به طرف راست است.

توجه کنید که دانشجو، برای اینکه بتواند همین نیروی ثابت را مدام اعمال کند، باید پیوسته تندتر و تندتر حرکت کند تا از سورتمه شتابدار عقب نماند. سرانجام، سرعت سورتمه از بیشترین مقدار سرعت دویدن دانشجو بیشتر می‌شود، و از آن پس دانشجو دیگر نمی‌تواند به سورتمه نیرو وارد کند. از این پس (اگر اصطکاک نباشد) سورتمه با سرعت ثابت به لغزش خود ادامه خواهد داد.

مثال ۲. دانشجوی مثال ۱ می‌خواهد جهت سرعت سورتمه را در مدت 4.5 s برعکس کند. به این منظور چه نیروی ثابتی باید بر سورتمه وارد کند؟

حل: با استفاده از معادله ۱۵ فصل ۲ ($v = v_0 + at$)، شتاب (ثابت) جسم را پیدا می‌کنیم:

$$a = \frac{v - v_0}{t} = \frac{(-1.6 \text{ m/s}) - (1.6 \text{ m/s})}{4.5 \text{ s}} = -0.71 \text{ m/s}^2$$

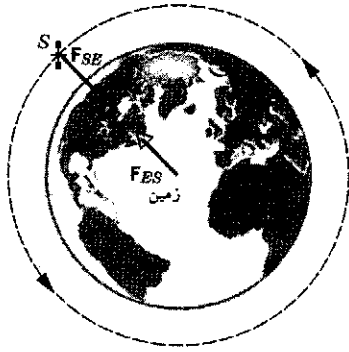
اندازه این شتاب، بزرگتر از اندازه شتاب مثال ۱ (0.54 m/s^2) است؛ پس در این حالت دانشجو قاعدتاً باید سورتمه را شدیدتر هل بدهد. این نیروی (ثابت) F' به صورت زیر محاسبه می‌شود

$$F' = ma = (240 \text{ kg})(-0.71 \text{ m/s}^2) = -170 \text{ N} (= -38 \text{ lb})$$

علامت منفی نشان می‌دهد که دانشجو سورتمه را در جهت کاهش x ، یعنی به طرف چپ در نمودار جسم آزاد شکل ۴ ج، هل می‌دهد.

۵-۶ قانون سوم نیوتون
نیروهای وارد بر یک جسم از اجسامی ناشی می‌شوند که محیط آن جسم را تشکیل می‌دهند. اگر نیروهای وارد بر جسم دیگری را که قبلاً جزء محیط جسم اول بوده است بررسی کنیم، خود جسم اول هم جزئی از محیط جسم دوم و منشأ بخشی از نیروهای وارد بر جسم دوم خواهد بود. بنابراین، هر تک نیرویی در واقع بخشی از برهم‌کنش متقابل میان دو جسم است. آزمایش نشان می‌دهد که اگر جسمی

مثال ۳. صندوقی به جرم m برابر با 360 kg روی کفه کامیونی که با سرعت v_0 برابر با 120 km/h در حرکت است قرار دارد، و نسبت به کامیون ساکن است (شکل ۵ الف). راننده ترمز می‌کند و طی 17 s سرعت را به 62 km/h می‌رساند. طی این مدت چه نیرویی



شکل ۷. ماهواره‌ای در مدار زمین. نیروهایی که در شکل می‌بینید یک زوج عمل-عکس‌العمل‌اند. توجه کنید که این دو نیرو بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند.

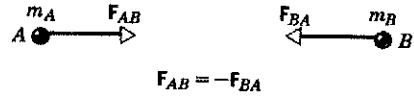
همین است. اگر این دو نیرو بر یک جسم اثر می‌کردند، نیروی خالص وارد بر آن جسم صفر می‌شود و حرکت شتابداری وجود نمی‌داشت.

هنگامی که چوب بیسبال به توپ می‌خورد، چوب نیرویی بر توپ وارد می‌کند. (عمل) و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر چوب وارد می‌کند. هنگامی که فوتبالیستی توپ را شوت می‌کند، پا نیرویی بر توپ وارد می‌کند (عمل)، و توپ هم نیرویی هم‌اندازه و در خلاف جهت بر پا وارد می‌کند. هنگامی که دارید سعی می‌کنید اتومبیل وامانده‌ای را هل بدهید، می‌توانید حس کنید که اتومبیل هم شما را به عقب هل می‌دهد. در هر مورد، اگر هدف ما بررسی دینامیک یکی از دو جسم باشد — مثلاً فقط توپ بیسبال — تنها یکی از زوج نیروهای عمل-عکس‌العمل را در نظر می‌گیریم؛ نیروی دیگر به جسم دیگری وارد می‌شود، و فقط وقتی به آن نیاز داریم که بخواهیم دینامیک آن جسم دیگر را بررسی کنیم.

در مثالهای زیر می‌بینیم که قانون سوم چگونه عمل می‌کند:

۱. ماهواره‌ای که در مدار زمین است. شکل ۷ ماهواره‌ای را نشان می‌دهد که به دور زمین می‌گردد. تنها نیروی وارد بر آن F_{SE} است، نیرویی که از (جاذبه گرانشی) زمین بر ماهواره وارد می‌شود. عکس‌العمل متناظر با این نیرو کجاست؟ این نیرو F_{ES} است، نیروی ناشی از جاذبه گرانشی ماهواره که بر زمین وارد می‌شود.

شاید فکر کنید که ماهواره به این کوچکی نمی‌تواند جاذبه گرانشی قابل ملاحظه‌ای بر زمین وارد کند، اما این کار را می‌کند، درست همان‌طور که لازمه قانون سوم نیوتون است. اگر فقط اندازه دو نیرو را در نظر بگیریم، می‌دانیم که $F_{ES} = F_{SE}$ (به خاطر دارید که اندازه هر برداری مثبت است.) نیروی F_{ES} باعث می‌شود که زمین شتاب بگیرد، اما چون جرم زمین خیلی زیاد است، این شتاب آنقدر کوچک است که آشکار نمی‌شود.



شکل ۶. قانون سوم نیوتون. جسم A نیروی F_{BA} را بر جسم B وارد می‌کند. در این حال، جسم B هم باید نیروی F_{AB} را بر جسم A وارد کند، و $F_{AB} = -F_{BA}$ است.

بر جسم دیگری نیرو وارد کند، همیشه جسم دوم هم نیرویی بر جسم اول وارد می‌کند. به علاوه، معلوم می‌شود که همواره اندازه این دو نیرو یکسان و جهت آنها مخالف هم است. پس هیچ نیرویی به صورت تک نیروی مجزا نمی‌تواند وجود داشته باشد.

فرض کنید که چنین نمی‌بود. دو جسم A و B را در نظر بگیرید که از محیط منزوی‌اند، و فرض کنید که A نیرویی بر B وارد می‌کند اما B نیرویی بر A وارد نمی‌کند. در این صورت نیروی کل وارد بر مجموعه $A + B$ غیر صفر می‌شد و جسم مرکب می‌بایست شتاب می‌گرفت. اگر چنین چیزی در کار بود، چشمه بی‌پایانی از انرژی می‌داشتیم که می‌توانست $A + B$ را، بی‌هیچ هزینه‌ای در فضا حرکت بدهد: فایتهای بادبانی می‌توانستند با دمیدن نفس مسافران به بادبانهایشان حرکت کنند، و سفینه‌های فضایی می‌توانستند با فشاری که فضانوردان بر دیواره‌هایشان وارد می‌کردند شتاب بگیرند. ناممکن بودن این چیزها نتیجه‌ای از قانون سوم نیوتون است.

به دلخواه، یکی از نیروهای برهم‌کنش بین دو جسم را نیروی "عمل" و دیگری را نیروی "عکس‌العمل" می‌نامیم. قانون سوم نیوتون، در شکلی که از قدیم رایج بوده است، چنین بیان می‌شود:

هر عملی، عکس‌العملی به همان اندازه و در خلاف جهت عمل دارد.

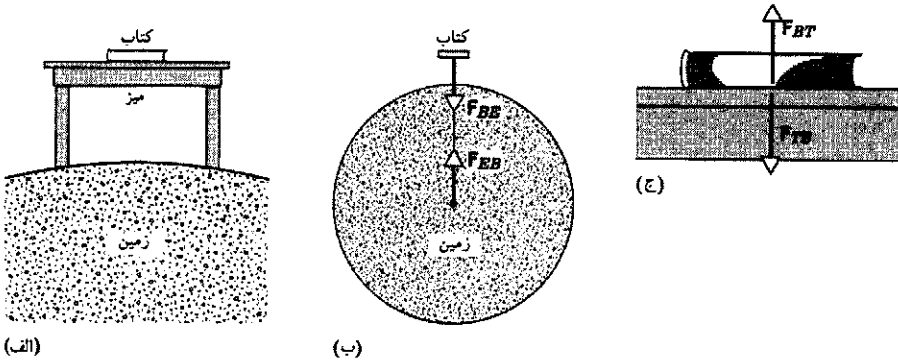
در روایت جدیدتری از قانون سوم، به نیروی متقابلی که دو جسم به هم وارد می‌کنند پرداخته می‌شود:

وقتی دو جسم به یکدیگر نیرو وارد کنند، این دو نیرو هم‌اندازه و در جهت‌های مخالف هم‌اند.

برای صورتبندی ریاضی این تعریف، فرض کنید — در شکل ۶ — جسم A نیروی F_{BA} را به جسم B وارد می‌کند؛ آزمایش نشان می‌دهد که جسم B هم نیروی F_{AB} را به جسم A وارد می‌کند. (به ترتیب زیروندها توجه کنید؛ نیرو بر جسمی وارد می‌شود که با زیروند اول مشخص شده است، و این نیرو را جسمی وارد می‌کند که با زیروند دوم مشخص شده است.) این را می‌شود به شکل یک معادله برداری نوشت:

$$F_{AB} = -F_{BA} \quad (3)$$

توجه کنید که عمل و عکس‌العمل همواره بر دو جسم مختلف اثر می‌کنند؛ تفاوت زیروندهای اول در دو طرف معادله هم نادآور



شکل ۸. الف) کتابی روی میز در حالت سکون است؛ خود میز هم نسبت به زمین ساکن است. ب) کتاب و زمین نیروهای گرانشی برهم وارد می‌کنند، که یک زوج عمل-عکس‌العمل‌اند. ج) میز و کتاب نیروهای تماسی عمل-عکس‌العمل برهم وارد می‌کنند.

را به جلو می‌راند. شکل، سه زوج عمل-عکس‌العمل را نشان می‌دهد:

$$\begin{aligned} \text{(صندوق ۱ و صندوق ۲)} \quad F_{21} &= -F_{12} \\ \text{(کارگر و صندوق ۱)} \quad F_{1W} &= -F_{W1} \\ \text{(کارگر و زمین)} \quad F_{WG} &= -F_{GW} \end{aligned}$$

شتاب جسم ۲، طبق قانون دوم نیوتون، از نیروی خالص وارد بر آن به دست می‌آید:

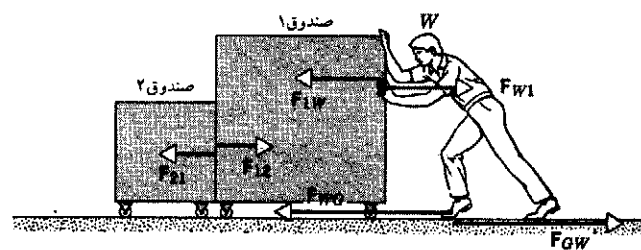
$$F_{21} = m_2 a_2$$

شتاب صندوق ۱ هم از نیروی خالص وارد بر این صندوق تعیین می‌شود:

$$F_{1W} - F_{12} = m_1 a_1$$

در رابطه بالا جمع برداری دو نیرو را به صورت تقاضا اندازه دو نیرو نوشته‌ایم، چون این دو در جهت مخالف هم بر صندوق ۱ اثر می‌کنند. اگر دو صندوق در تماس با هم بمانند، شتابشان باید یکی باشد. این شتاب را با a نشان می‌دهیم و دو معادله را با هم جمع می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$F_{1W} = (m_1 + m_2)a$$



شکل ۹. کارگری صندوق ۱ را هل می‌دهد، و صندوق ۱ هم صندوق ۲ را هل می‌دهد. صندوقها روی چرخ‌اند و می‌توانند آزادانه حرکت کنند؛ یعنی اصطکاک صندوقها با زمین ناچیز است.

۲. کتابی که روی میز، ساکن است. شکل ۸ الف کتابی را نشان می‌دهد که روی میزی، به حالت سکون، قرار دارد. زمین کتاب را با نیروی F_{BE} به طرف پایین می‌کشد، اما کتاب شتاب نمی‌گیرد چون این نیرو با نیروی تماسی F_{BT} خنثی می‌شود. این نیرو با نیروی اول هم‌اندازه و در جهت مخالف آن است، و میز آن را بر کتاب وارد می‌کند.

F_{BT} و F_{BE} هم‌اندازه و در جهت مخالف هم‌اند، اما زوج عمل-عکس‌العمل نیستند. چرا؟ چون هر دو بر یک جسم - به کتاب - وارد می‌شوند. این دو نیرو هم دیگر را خنثی می‌کنند، و به همین علت است که شتاب کتاب صفر است.

هر یک از این دو نیرو البته باید در جایی یک نیروی عکس‌العمل متناظر هم داشته باشد. این عکس‌العملها کجا هستند؟ عکس‌العمل F_{BE} نیروی F_{EB} است، نیروی (گرانشی) وارد بر زمین از طرف کتاب. شکل ۸ ب این زوج عمل-عکس‌العمل را نشان می‌دهد.

شکل ۸ ج عکس‌العمل F_{BT} را نشان می‌دهد، که نیروی F_{TB} است، یعنی نیروی تماسی‌ای که کتاب بر میز وارد می‌کند. زوجهای عمل-عکس‌العمل این مسئله، که کتاب هم در آنها دخیل است، و اجسامی که این نیروها بر آنها اثر می‌کنند، عبارت‌اند از

$$\text{زوج اول: } F_{BE} = -F_{EB} \quad (\text{کتاب و زمین})$$

و

$$\text{زوج دوم: } F_{BT} = -F_{TB} \quad (\text{کتاب و میز})$$

۳. هل دادن یک ردیف صندوقی. شکل ۹ کارگری (W) را نشان می‌دهد که دو صندوق را هل می‌دهد. هر یک از این دو صندوق روی صفحه چرخداری است که می‌تواند با اصطکاک ناچیزی روی زمین حرکت کند. کارگر نیروی F_{1W} را بر صندوق ۱ وارد می‌کند، و صندوق ۱ هم با نیروی عکس‌العمل F_{W1} کارگر را به عقب می‌راند. صندوق ۱ صندوق ۲ را با نیروی F_{12} هل می‌دهد. (توجه کنید که کارگر مستقیماً بر صندوق ۲ نیرویی وارد نمی‌کند.) کارگر برای اینکه به جلو حرکت کند باید یک نیروی F_{GW} بر زمین وارد کند. F_{WG} کاگ.

F' (که همان عکس‌العمل به F است)، w (وزن فنر که معمولاً قابل چشمپوشی است)، و P (که از سقف به فنر وارد می‌شود). وقتی فنر در حالت سکون است، نیروی خالص وارد بر آن باید صفر شود:

$$P + w + F' = 0$$

عکس‌العمل به P نیرویی است که (مثلاً به اسم P') که بر سقف اثر می‌کند. چون در این نمودارها سقف را به عنوان جسم مستقلی بررسی نکرده‌ایم، P' را هم نشان نداده‌ایم.

۷-۵ یکاهای نیرو

قانون دوم نیوتون ($F = ma$) هم، مثل همه معادلات دیگر، باید از نظر ابعادی سازگار باشد. بعد طرف راست $[m][a] = ML/T^2$ است (از فصل ۱ به خاطر دارید که [] نماد بعد است)، بنابراین، بعد نیرو هم باید همین باشد.

$$[F] = ML/T^2$$

منشأ نیرو هرچه باشد گرانشی، الکتریکی، هسته‌ای، یا هر چیز دیگر— و معادله توصیف‌کننده آن هر قدر پیچیده هم باشد، بعد آن همین است. در سیستم یکاهای SI، جرم را برحسب kg و شتاب را برحسب m/s^2 می‌سنجند. برای اینکه به جرم 1 kg شتاب 1 m/s^2 بدهیم، باید 1 kg m/s^2 نیرو به آن وارد کنیم. این ترکیب نه چندان خوش دست یکاها را نیوتون (مخفف N) می‌نامند:

$$1\text{ N} = 1\text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

اگر جرم را برحسب kg و شتاب را برحسب m/s^2 بسنجیم، قانون دوم نیوتون نیرو را برحسب N به دست می‌دهد. دو سیستم رایج دیگر، سیستم cgs (سانتی‌متر-گرم-ثانیه) و سیستم بریتانیایی‌اند. در سیستم cgs، جرم را برحسب گرم و شتاب را برحسب cm/s^2 می‌سنجند. یکای نیرو در این سیستم دین (dyne) نامیده می‌شود که معادل است با 1 g cm/s^2 . از آنجا که $1\text{ kg} = 10^3\text{ g}$ و $1\text{ m/s}^2 = 10^5\text{ cm/s}^2$ یعنی $1\text{ N} = 10^8\text{ dyne}$. دین یکایی بسیار کوچک است؛ تقریباً برابر با وزن یک میلی‌متر مکعب آب. (یک نیوتون در حدود وزن نیم فنجان آب است.)

در سیستم بریتانیایی، نیرو را برحسب پاوند، و شتاب را برحسب ft/s^2 می‌سنجند. در این سیستم، جرمی که دوائر نیروی 1 lb شتاب 1 ft/s^2 می‌گیرد، یک اسلاگ است.

سیستمهای پایه دیگری هم هستند که گاه به گاه به کار می‌روند، اما این سه سیستم فعلاً از همه رایج‌ترند. این یکاهای رایج در جدول ۲ فهرست شده‌اند؛ جدول مفصلتری در پیوست ز آمده است.

۸-۵ وزن و جرم

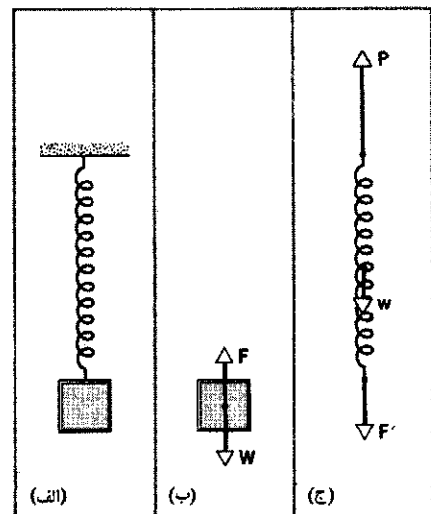
وزن هر جسم در روی زمین نیروی گرانشی‌ای است که زمین بر آن وارد می‌کند. وزن یک جسم در هر نقطه از زمین به جرم آن جسم و شتاب گرانشی آن نقطه بستگی دارد. وزن یک جسم در هر نقطه از زمین به جرم آن جسم و شتاب گرانشی آن نقطه بستگی دارد.

اگر مجموعه صندوقهای ۱ و ۲ را به صورت یک جسم واحد به جرم $m_1 + m_2$ در نظر می‌گرفتیم هم همین معادله به دست می‌آمد. نیروی خارجی خالص وارد بر این جسم مجموع $F_1 + F_2$ است. در این صورت، دو نیروی تماسی در مرز میان صندوق ۱ و صندوق ۲ نیروهای داخلی‌اند و در معادله توصیف‌کننده جسم یکپارچه وارد نمی‌شوند. نیروهای اتمی‌ای که ذرات جسم را کنار هم نگه می‌دارند هم همین‌طور؛ هر نیروی داخلی‌ای در واقع یکی از اعضای زوج عمل-عکس‌العملی است که بر اجزای مختلف (مثلاً دو اتم) اثر می‌کنند. این نیروها، وقتی که معادلات مربوط به اجزای مختلف را با هم جمع می‌کنیم، در مجموع صفر می‌شوند.

توجه کنید که در این مثال، کارگر عامل فعالی است که صندوقها را حرکت می‌دهد، اما آنچه این کار را ممکن می‌کند نیروی عکس‌العمل زمین است. اگر بین زمین و کفشهای کارگر اصطکاکی وجود نمی‌داشت، کارگر نمی‌توانست سیستم را به جلو براند.

۴. جسمی که از فنر آویزان است، شکل ۱۰ الف جسمی را نشان می‌دهد که، به حالت ساکن، از فنری آویزان است. سر دیگر فنر به سقف متصل است. نیروهای وارد بر جسم، یکی وزن آن W (به طرف پایین) و دیگری نیروی F' (به طرف بالا) است که از فنر وارد می‌شود. جسم تحت تأثیر این نیروها در حالت سکون است، اما این دو نیرو زوج عمل-عکس‌العمل نیستند، چون که در این مورد هم بر یک جسم وارد می‌شوند. عکس‌العمل به نیروی W نیروی گرانشی‌ای است که جسم بر زمین وارد می‌کند، و در شکل نیامده است.

عکس‌العمل به F' (نیرویی که از فنر بر جسم وارد می‌شود) نیرویی است که از جسم بر فنر وارد می‌شود. برای نشان دادن این نیرو، نیروهای وارد بر فنر را در شکل ۱۰ ج نمایش داده‌ایم. این نیروها عبارت‌اند از



شکل ۱۰. الف) جسمی که در حالت سکون از فنری آویزان است. ب) نیروهای وارد بر جسم. ج) نیروهای وارد بر فنر.

جدول ۲. یگاهای کمیت‌های دخیل در قانون دوم نیوتون.

سیستم	نیرو	جرم	شتاب
SI	نیوتون (N)	کیلوگرم (kg)	m/s^2
cgs	دین	گرم (g)	cm/s^2
بریتانیایی	پاوند	اسلاگ	ft/s^2

است. جهت این بردار جهت نیروی گرانشی است، یعنی به طرف مرکز زمین. اندازه نیرو برحسب یگاهای وزن، مثلاً پاوند یا نیوتون، بیان می‌شود.

بیباید فعلاً فرض کنیم که سطح زمین نماینده چارچوب مرجعی است که به قدر کافی لخت است. جسمی به جرم m را نزدیک سطح زمین رها می‌کنیم و می‌گذاریم که تحت اثر گرانش زمین آزادانه سقوط کند. تنها یک نیرو بر جسم اثر می‌کند، که وزن W جسم است. شتاب جسم همان شتاب سقوط آزاد (g) است. قانون دوم نیوتون، $F = ma$ ، را برای این جسم در حال سقوط آزاد به کار می‌بریم؛ W را به جای F و g را به جای a می‌گذاریم؛ نتیجه می‌شود که $W = mg$. وزن و شتاب سقوط، هر دو بردارهایی در جهت مرکز زمین‌اند. پس می‌شود نوشت

$$W = mg \quad (4)$$

که در آن W اندازه بردار وزن و g اندازه بردار شتاب است. البته برای تعیین وزن اجسام، لازم نیست که آنها در حال سقوط آزاد باشند. اگر جسمی در نزدیکی سطح زمین در حالت سکون باشد، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، برای اینکه جسم در حالت سکون بماند باید نیرویی به اندازه mg اما در جهت مخالف وزن جسم بر آن اثر کند. در شکل ۱۰، فنر این نیرو را تأمین می‌کند. نیرویی که فنر بر جسم وارد می‌کند، باید، از نظر عددی، برابر با mg باشد. در شکل ۸، میز نیروی رو به بالای F_{BT} بر کتاب وارد می‌کند و آن را در حالت تعادل نگه می‌دارد: اندازه این نیرو با وزن کتاب (mg) برابر است.

چون g در نقاط مختلف یکی نیست، وزن یک جسم (W) هم در نقاط مختلف زمین فرق می‌کند. مثلاً، وزن جسمی به جرم 1.0 kg در نقطه‌ای با $g = 9.80 \text{ m/s}^2$ برابر با 9.80 N است، اما همین جسم در جایی با $g = 9.78 \text{ m/s}^2$ وزن برابر با 9.78 N دارد. اگر این دو وزن را با سنجش مقدار کشیدگی فنر تعیین کنیم، خواهیم دید که کشیدگیهای لازم برای متعادل کردن جسم 1 کیلوگرمی در دو محل مختلف، کمی با هم تفاوت دارند. بنابراین، برخلاف جرم، که یک خاصیت ذاتی هر جسم است، وزن اجسام به موقعیت آنها نسبت به مرکز زمین بستگی دارد. چنانکه در بخش بعد می‌بینیم، ترازوهای فنری در نقاط مختلف روی زمین ممکن است مقادیر مختلفی نشان بدهند، اما ترازوهای وزنه‌ای (یا تعادلی) در تمام این نقاط یک مقدار نشان می‌دهند.

چون زمین به دور خودش می‌چرخد، سطح آن نمی‌تواند یک چارچوب مرجع لخت باشد. همه چارچوبهای مرجع واقع بر سطح زمین، در اثر چرخش، شتاب مرکزگرا دارند. شتاب سقوط آزادی که در این چارچوب نالخت می‌سنجیم، دست‌کم دو مؤلفه دارد: یکی ناشی از جاذبه گرانشی زمین و دیگری ناشی از چرخش آن. اثر کوچکی که این چرخش برجا می‌گذارد آن است که شتاب سقوط آزاد از استوا (جایی که شتاب مرکزگرا بیشینه است) تا قطبها (جایی که شتاب مرکزگرا صفر است) در حدود 0.3% تغییر کند. فعلاً از این اثر کوچک نالختی در وزن اجسام صرف‌نظر می‌کنیم، اما در فصل ۱۶ دوباره به آن برمی‌گردیم. در بخش ۶-۸ آثار دیگر نالختی چارچوبها بر اجسام را بررسی می‌کنیم.

در آن نواحی‌ای از فضا که آثار گرانشی وجود نداشته باشد وزن اجسام صفر می‌شود، اما خواصی که به جرم بستگی دارد، مثلاً مقاومت در برابر شتاب گرفتن تغییر نمی‌کند و مثل همان خواص در روی زمین است، در سفینه‌ای که فارغ از میدان گرانشی در فضا حرکت می‌کند، بلند کردن قطعه بزرگی از سرب کار ساده‌ای است. ($W = 0$)، اما اینجا هم اگر فضاوردی به این قطعه لگد بزند، شست پایش درد می‌گیرد ($m \neq 0$).

برای شتاب دادن به اجسام در فضای تهی از گرانش همانقدر نیرو لازم است که در سطح بدون اصطکاک روی زمین، چون که جرم اجسام در نقاط مختلف فرق نمی‌کند. اما نیروی لازم برای بالا کشیدن اجسام در مقابل جاذبه گرانشی، در سطح زمین بیشتر است تا در نقطه‌ای که در فاصله زیادی از زمین واقع شده است، چون وزن اجسام در نقاط مختلف متفاوت است.

در هر نقطه معین (که g مقدار مشخصی دارد)، جرم و وزن با هم متناسب‌اند. مثلاً گاهی می‌نویسند $2 \text{ lb} = 1 \text{ kg}$ ، که در آن، " = " یعنی "معادل است با". این تنها یک تناظر عددی است نه یک معادله واقعی. (زیرا در معادلات، دو کمیت با ابعاد متفاوت نمی‌توانند با هم برابر باشند!) مسئله تا حدی شبیه به آن است که بگوییم 1 پرتقال " = " سیب؛ اگر صحبت بر سر قیمت باشد، x یک مقدار دارد، و اگر بر سر حجم آبی باشد که در هر کدام هست، مقدار دیگری که کاملاً با اولی متفاوت است.

رابطه بین جرم و وزن، تنها به‌ازای یک مقدار معین g معتبر است، بنابراین باید این رابطه را با احتیاط به کار برد. در غیر این صورت ممکن است دچار سردرگمی یا حتی سردرد شوید. مثلاً، اگر روزگاری فضاییمای خودتان را در ماه متوقف کردید و در یکی از رستورانهای مشهور آن، طبق عادت، یک همبرگر ربع پاوندی سفارش دادید، ممکن است ساندویچی به قطر تقریباً 1 فوت نصیبتان شود (گرانش ماه در حدود یک ششم گرانش زمین است. در سطح ماه $1 \text{ lb} = 0.16 \text{ kg}$ است.) اگر همین سفارش را در سطح خورشید بدهید، همبرگری به دستتان می‌رسد که قطر آن به زحمت به 1 in می‌رسد، اما البته کاملاً مغز بخت شده است! (در خورشید، $1 \text{ lb} = 3.3 \times 10^7 \text{ kg}$ است.) واضح

از هر ستاره یا سیاره‌ای باشند، حاصل می‌شود. فضاوردان در این نواحی، در فضاییمایی که با موتور خاموش در حرکت باشد، آزادانه شناور می‌شوند. اگر فضاییما حول محوری بچرخد، فضاوردانی که عمود بر محور چرخش روی سطح چرخانی ایستاده باشند، احساس "وزن مصنوعی" می‌کنند، چون که این سطح باید فضاوردان را به بالا براند تا نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای آنها را تأمین کند. این نیروی رو به "بالا" (که از سطح به پای فضاوردان وارد می‌آید)، مثل وزن احساس می‌شود.

اگر از روی تخته پرش شیرجه برویم، یا از روی ترامپولین به هوا ببریم، در هوا در حالت سقوط آزاد خواهیم بود؛ سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند، و خودمان را "بی‌وزن" احساس می‌کنیم. همین‌طور اگر در اتاقکی در نزدیکی سطح زمین در حال سقوط آزاد باشیم، و خود اتاقک هم در حال سقوط آزاد باشد، باز هم سطحی وجود ندارد که به ما نیرو وارد کند و احساس "بی‌وزنی" خواهیم کرد. در چنین حالتی، آزادانه در اتاقک شناور خواهیم بود. سه نمونه از چنین وضعیتی عبارت‌اند از: ۱. فضاییمایی در مدار زمین که در بالا بررسی‌اش کردیم، ۲. اتاقک آسانسوری که کابل آن بریده است و دارد سقوط می‌کند، و ۳. هواپیمایی که روی مسیر سهموی معینی حرکت می‌کند. فرض کنید هواپیمایی دارد اوج می‌گیرد و در لحظه معینی در حال بالا رفتن با سرعت v در جهتی است که با سطح افقی زاویه ϕ می‌سازد. اگر شما یکی از مسافران هواپیما باشید، و اگر خود هواپیما در آن لحظه ناگهان ناپدید شود، مسیر شما به شکل مسیر سهمی سقوط آزاد (معادله ۲۳ در فصل ۴) خواهد بود. اگر به جای اینکه هواپیما ناپدید شود، خلبان آن‌را در همین مسیر هدایت کند، هواپیما عملاً در حال سقوط آزاد خواهد بود و اجسام داخل آن در حالت "بی‌وزنی" شناور خواهند شد. در واقع از چنین سیستمی برای آموزش فضاوردان استفاده شده است، تا به حالت "بی‌وزنی" در فضاییماهای مدارگرد عادت کنند. در هر یک از سه وضعیت بالا، وزن شما فقط به مقدار خیلی کمی نسبت به حالتی که روی زمین ایستاده‌اید تغییر می‌کند، اما در کار نبودن سطحی که به شما نیرو وارد کند موجب احساس "بی‌وزنی" می‌شود.

۹-۵ اندازه‌گیری نیرو

در بخش ۳-۵ نیرو را از طریق اندازه‌گیری شتابی که به یک جسم استاندارد در اثر کشیده شدن با فنر کسب می‌کند تعریف کردیم. این روش، که می‌توانیم آن‌را یک روش دینامیک برای سنجش نیرو بنامیم، اگرچه برای تعریف نیرو مناسب است، اما همیشه یک روش واقعاً عملی برای سنجش نیرو نیست. (سنجش مستقیم شتاب هم عموماً آسان نیست.) روش دیگر اندازه‌گیری نیرو مبتنی بر سنجش تغییر شکل یا تغییر اندازه جسمی (مثلاً فنر) است که در حالتی که شتاب ندارد نیرو بر آن وارد می‌شود. این را می‌توانیم روش استاتیک سنجش نیروها بنامیم. این روش، که می‌توانیم آن‌را یک روش استاتیک سنجش نیروها بنامیم،

است که ما در واقع برحسب مقدار ماده (جرم) سفارش می‌دهیم، نه برحسب وزن. یک همبرگر 100 گرمی (در حدود $1/4$ پاوند روی زمین) در همه جای عالم دقیقاً یک اندازه دارد.

بی‌وزنی

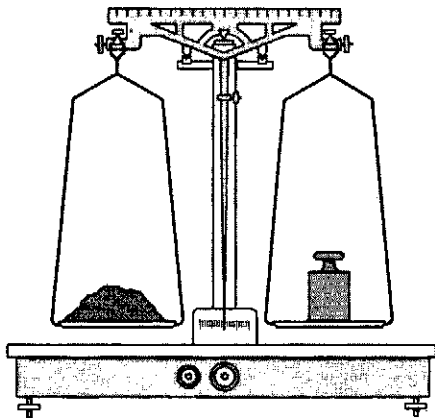
عکسهای فضاوردان در فضاییماهای مدارگرد (مثلاً در شکل ۱۱)، آنها را در حالتی نشان می‌دهد که آزادانه شناورند؛ این حالت را معمولاً "بی‌وزنی" می‌نامند. اما بنابه تعریف ما از وزن، این فضاوردان به هیچ‌وجه بی‌وزن نیستند؛ در واقع، شاید وزن آنها فقط کمتر از 10% نسبت به حالت عادی در سطح زمین کم شده باشد. این کاهش وزن هم به خاطر آن است که گرانش زمین با افزایش ارتفاع ضعیف‌تر می‌شود.

به دو دلیل است که گفته می‌شود این فضاوردها "بی‌وزن" اند: ۱. از دید ناظرهای خارجی، فضاوردان در حال سقوط آزاد به طرف مرکز زمین‌اند. اینکه ارتفاع آنها کم نمی‌شود تنها به این علت است که سرعت مماسی فضاییما چنان تنظیم شده است که گرانش شتاب مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین کند. ۲. چون خود سفینه هم عیناً مثل سرنشینانش سقوط می‌کند، "کف" ای در کار نیست که با فضاوردها در تماس باشد و آنها را متعادل نگه دارد. احساس یا ادراک روانی ما از وزن، مربوط است به نیرویی که کف زمین بر ما وارد می‌کند. اگر در آب شناور باشیم، احساس می‌کنیم سبک‌تریم یعنی احساسمان از وزن کمتر می‌شود (اما از جرم باز هم احساس کاملی داریم؛ مثلاً وقتی بخوایم با شنا کردن در آب شتاب بگیریم). اگر سوار بر آسانسوری باشیم، وقتی آسانسور به طرف بالا شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان زیاد می‌شود، و وقتی به طرف پایین شتاب می‌گیرد حس می‌کنیم وزنمان کم می‌شود. این اثر، که آن‌را در مثال ۷ بررسی خواهیم کرد، نتیجه افزایش یا کاهش نیروی رو به بالایی است که کف آسانسور اعمال می‌کند.

بی‌وزنی واقعی تنها در اعماق فضا، در نقاطی که خیلی دور



شکل ۱۱. فضاوردان در فضا شتابی در یک حالت سقوط آزادند، و این شناوری آنها طوری به نظر می‌رسد که انگار بی‌وزن‌اند.



شکل ۱۳. ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم طول، که جهت‌های مختلف را از طریق توزین آنها با هم مقایسه می‌کند.

برای سنجش هر نیروی مجهولی (نه الزاماً کشش زمین بر اجسام) به کار برد.

استفاده از ترازوهای دوکفه‌ای با بازوهای هم طول (شکل ۱۳)، روش استاتیک دیگری برای سنجش نیروهاست. رایج‌ترین کاربرد عملی این روش، مقایسهٔ وزنه‌های معلوم و مجهول است؛ وقتی بازوها متعادل می‌شوند یعنی وزن اجسام دو طرف یکی است. به علاوه، چون g برای هر دو بازوی ترازوی یکی است، برابری وزنها به معنی برابری جرمهاست. بنابراین، ترازوی دوکفه‌ای با سنجش وزن اجسام در واقع برابری نسبی جرمهای آنها را تعیین می‌کند. (وزنه‌های معلوم این ترازوها معمولاً با جرمشان برحسب گرم مشخص می‌کنند.) این سیستم در هر مقدار g ، جز صفر، کار می‌کند؛ ترازوی دوکفه‌ای با بازوهای هم طول را می‌شود، به همان خوبی زمین، برای مقایسهٔ جرم اجسام در کرهٔ ماه هم به کار برد. اما در فضای بدون گرانش، یا در بی‌وزنی نسبی در مدارهای زمین، چنین ترازویی به درد نمی‌خورد.

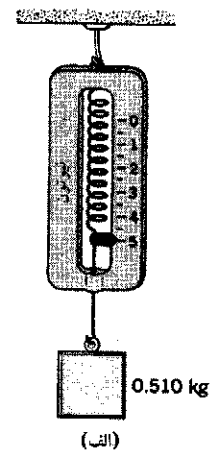
۵-۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون

هر مسئله‌ای که قرار است با استفاده از قوانین نیوتون حل شود رهیافت خاص خود را می‌طلبد، اما چند قاعدهٔ عمومی وجود دارد که برای راه‌اندازی حل همهٔ انواع این مسائل به کار می‌رود. در این بخش، این قواعد را معرفی می‌کنیم و کاربردهای آنها را با چندین مثال نشان می‌دهیم. بهترین راه یادگیری این قواعد، مطالعهٔ مثالهاست.

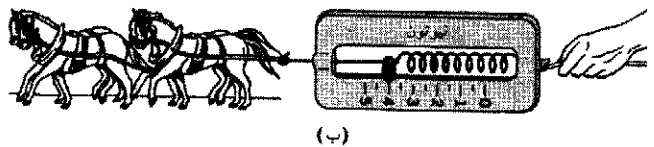
مراحل اساسی در کاربرد قوانین نیوتون اینها هستند: ۱. جسمی را که می‌خواهید وضعیتش را تحلیل کنید خوب مشخص کنید. گاهی ممکن است دو یا چند جسم مورد نظر باشند؛ در این صورت معمولاً هر یک را باید جداگانه بررسی کرد. ۲. محیطی را که نیروها از آن به جسم وارد می‌شوند — سطوح، اشیای دیگر، زمین، فنر-ریسمان، و مانند آن — شناسایی کنید. ۳. یک چارچوب مرجع لخت (بدون

قرار بگیرد و شتاب آن صفر باشد، جمع برداری نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. و این البته همان قانون دوم نیوتون است. اگر فقط یک نیرو بر جسمی اثر کند به آن شتاب می‌دهد؛ برای اینکه این شتاب را صفر کنیم، می‌توانیم نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت نیروی اول به جسم وارد کنیم. در عمل کاری می‌کنیم که جسم در حالت سکون قرار بگیرد. اگر نیروی معینی را به عنوان نیروی یکه انتخاب کنیم، می‌توانیم نیرو را بسنجیم. مثلاً کشش زمین بر یک جسم استاندارد در یک نقطهٔ معین را می‌شود نیروی یکه اختیار کرد.

یکی از ابزارهای رایج سنجش نیرو ترازوی فنری است (شکل ۱۲). ترازوی فنری شامل یک فنر مارپیچی است که در یک سر آن شاخصی وجود دارد که روی مقیاس حرکت می‌کند. نیرویی که بر این ترازو وارد شود طول فنر را تغییر می‌دهد. اگر جسمی به وزن 1.0 N (102 kg) در جایی که $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ است) را از این ترازو بیاوریم، فنر کشیده می‌شود تا نیرویی به اندازهٔ وزن جسم و در جهت مخالف وزن به آن وارد کند. در این نقطه نشانه‌های می‌گذاریم و آن را با "نیروی 1.0 N " برحسب می‌زنیم. حالا می‌توانیم همین کار را با وزنه‌های 2.0 N ، 3.0 N و غیره را تکرار کنیم و نشانه‌های متناظر با این نیروها را روی ترازو مشخص کنیم. به این ترتیب، فنر مدرج می‌شود. فرض بر این است که نیروهایی که فنر را تا نقطهٔ یکسانی بکشند، یکسان‌اند. حالا می‌شود این ترازوی مدرج را، به روش شکل ۱۲ ب



(الف)



(ب)

شکل ۱۲. (الف) برای مدرج کردن ترازوی فنری، در نقطه‌ای با g معین، جرم معلومی به آن می‌آوریم و نیروی متناظر با آن جرم را علامتگذاری می‌کنیم. در شکل، جرم 0.510 kg ، به‌ازای $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ ، متناظر با نیروی 5.10 N است. (ب) ترازوی مدرج را می‌توانیم برای سنجش نیروهای مجهول به کار ببریم. اساس کار همهٔ ترازوهای فنری — مثلاً ترازوهای ادارهٔ پست، ترازوهای یک کفهای فروشگاهی، و ترازوهای حمام — همین است.

مثال ۴. شکل ۱۴ الف قطعه‌ای به جرم $m = ۱۵۰ \text{ kg}$ را نشان می‌دهد که با سه ریسمان نگه داشته شده است. کشش هر سه ریسمان را پیدا کنید.

حل: گره محل تلاقی سه ریسمان را به عنوان "جسم" در نظر می‌گیریم. شکل ۱۴ ب نمودار جسم-آزاد گره را نشان می‌دهد، که تحت اثر سه نیروی T_A ، T_B ، و T_C (کشش ریسمانها) در حالت سکون است. (فرض کرده‌ایم که گره هم، مثل خود ریسمانها، بی‌جرم است؛ بنابراین وزن آن وارد نمودار نمی‌شود.) محورهای x و y را مثل شکل ۱۴ ب انتخاب می‌کنیم؛ به این ترتیب، می‌توانیم نیروها را به مؤلفه‌های x و y تجزیه کنیم. مؤلفه‌های شتاب صفرند، بنابراین،

$$\sum F_x = T_{Ax} + T_{Bx} = ma_x = 0 \quad \text{مؤلفه } x:$$

$$\sum F_y = T_{Ay} + T_{By} + T_{Cy} = ma_y = 0 \quad \text{مؤلفه } y:$$

از شکل ۱۴ ب دیده می‌شود که

$$T_{Ax} = -T_A \cos 30^\circ = -0.866T_A$$

$$T_{Ay} = T_A \sin 30^\circ = 0.5T_A$$

$$T_{Bx} = T_B \cos 45^\circ = 0.707T_B$$

$$T_{By} = T_B \sin 45^\circ = 0.707T_B$$

و

$$T_{Cx} = 0$$

$$T_{Cy} = -T_C$$

در ادامه، نمودار جسم-آزاد خود جرم m را بررسی می‌کنیم؛ شکل ۱۴ ج. فقط مؤلفه y وارد می‌شود، و باز هم شتاب صفر است:

$$T_{Cy} - mg = ma_y = 0$$

چون T_C فقط مؤلفه y دارد، می‌شود نوشت

$$T_C = mg = (۱۵۰ \text{ kg})(۹.۸۰ \text{ m/s}^2) = ۱۴۷ \text{ N}$$

حالا می‌توانیم معادلات مربوط به مؤلفه‌های x و y نیروهای وارد بر گره را چنین بازنویسی کنیم:

$$-0.866T_A + 0.707T_B = 0 \quad \text{مؤلفه } x:$$

$$0.5T_A + 0.707T_B - T_C = 0 \quad \text{مؤلفه } y:$$

مقدار به‌دست آمده برای T_C را در جای T_C قرار می‌دهیم و دو معادله را حل می‌کنیم. نتیجه می‌شود که

$$T_A = ۱۰۸ \text{ N}$$

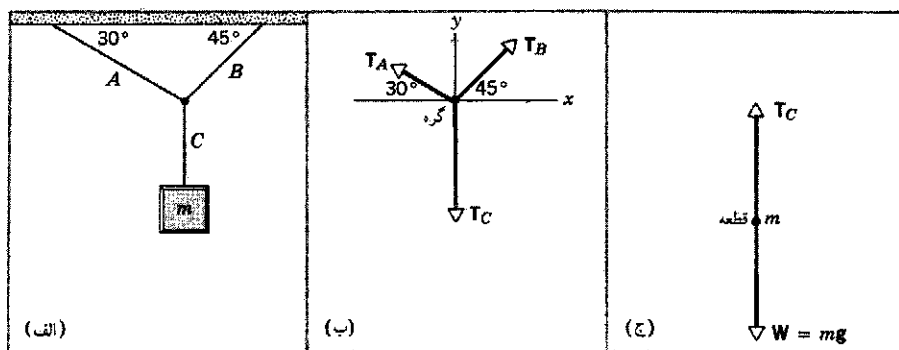
$$T_B = ۱۳۲ \text{ N}$$

چارچوب مرجعی که انتخاب کرده‌اید) مشخص کنید؛ مبدأ و جهت محورها را چنان انتخاب کنید که مسئله را تا حد ممکن ساده کند. اگر دقت کافی داشته باشید، می‌توانید برای هر جزئی از یک مسئله پیچیده دستگاه مختصات جداگانه‌ای به‌کار ببرید. ۵. نمودار جسم-آزادی رسم کنید و در آن هر جسم را به شکل یک ذره، همراه با همه نیروهای وارد بر آن، نمایش بدهید. ۶. حالا می‌توانید قانون دوم نیوتون را برای همه مؤلفه‌های نیرو و شتاب به‌کار بگیرید.

در مثالهای زیر، فرضهایی می‌کنیم که مسئله را ساده می‌کنند، اما در مقابل بخشی از واقعیت فیزیکی را از دست می‌دهیم. اجسام را مثل ذره در نظر می‌گیریم، به این ترتیب همه نیروهای وارد بر جسم مورد نظر در یک نقطه اثر می‌کنند. همه حرکات را بدون اصطکاک فرض می‌کنیم. فرض می‌کنیم که همه ریسمانها بدون جرم‌اند (برای شتاب دادن به آنها نیرویی لازم نیست) و تغییر طول نمی‌دهند (یعنی کشیده نمی‌شوند؛ بنابراین، اجسامی که حرکت خطی دارند و با ریسمان کشیده به هم متصل‌اند، سرعت و شتاب یکسان دارند). قرقه‌ها بدون جرم‌اند (نیرویی برای چرخاندنشان لازم نیست) و محورشان هم بدون اصطکاک است. همه اجسام صلب‌اند (زیر بار تغییر شکل نمی‌دهند و نیرو آن‌ها منتقل می‌شود). مثالهای زیر، با وجود این ساده‌سازیها، دید خوبی از روشهای اساسی تحلیل دینامیکی به‌دست می‌دهند. بعداً در همین کتاب عوامل روشهای جدیدی را مطرح می‌کنیم که به کمک آنها می‌توانیم وضعیتهای فیزیکی را به شکل واقعی‌تری تحلیل کنیم. مثلاً، در فصل ۶ نیروی اصطکاک را در تحلیل مسئله می‌گنجانیم، و در فصل ۱۲ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان جرم قرقه و اصطکاک محور آن‌را وارد مسئله کرد. فعلاً از این آثار، که می‌دانیم مهم‌اند، چشم می‌پوشیم تا بهتر بتوانیم روی روشهای اساسی‌تر مورد استفاده در حل مسائل تأکید کنیم.

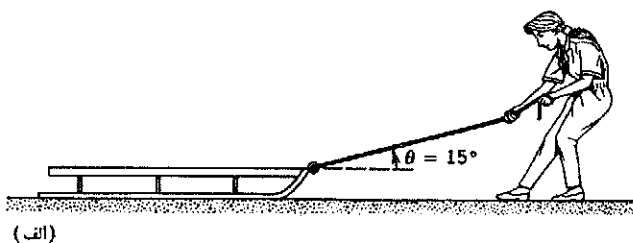
در مثال زیر، کشش T را معرفی می‌کنیم، نیرویی که ریسمان با آن اجسام متصل به خود را می‌کشد. در ریسمانهایی که ضخامتشان ناچیز است، جهت کشش همواره باید با خود ریسمان موازی باشد. (این گفته، چنانکه در فصل ۱۴ خواهیم دید، در مورد تیرهای کلفت و سخت درست نیست.) در ریسمانهایی که جرمشان ناچیز است، کشش به‌طور یکنواخت در طول ریسمان منتقل می‌شود، یعنی در دو سر ریسمان یکسان است.

از دید میکروسکوپیکی، هر جزء از ریسمان جزء مجاور خود را می‌کشد (و خودش هم، طبق قانون سوم نیوتون، توسط آن کشیده می‌شود). به این ترتیب است که نیروی کشش از یک سر ریسمان به جسمی که به سر دیگر آن متصل است منتقل می‌شود. بر جزء i ریسمان، یک کشش T در یک جهت وارد می‌شود که ناشی از جزء $i-1$ است، و یک کشش T برابر با قبلی و در خلاف جهت آن که ناشی از جزء $i+1$ است. اگر ریسمان را در نقطه‌ای دلبخواه ببریم و به محل برش یک نیروسنج فنی ببندیم (که به روش بخش ۵-۹ مدرج شده است)، نیروسنج مستقیماً کشش T را نشان خواهد داد.

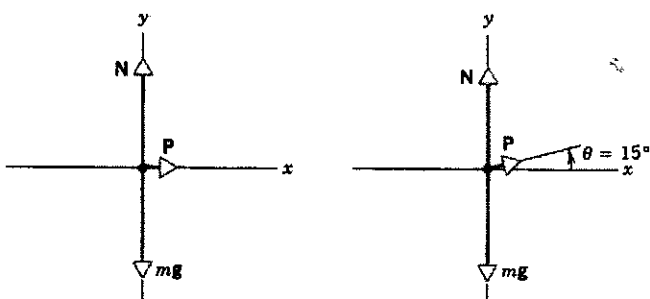


شکل ۱۴. مثال ۴. (الف) قطعه‌ای از سه ریسمان A، B، و C آویزان است. (ب) نمودار جسم-آزاد گره‌ای که سه ریسمان را به هم متصل می‌کند. (ج) نمودار جسم-آزاد قطعه.

این نتایج را امتحان کنید (در همه مسائل این کار را بکنید) تا ببینید که جمع برداری این سه نیرو واقعاً صفر است.



(الف)



(ب)

(ج)

شکل ۱۵. مثال ۵. (الف) سورت‌های روی سطح افقی بدون اصطکاک کشیده می‌شود. (ب) نمودار جسم-آزاد سورت‌ها در حالت $\theta = 0^\circ$. (ج) نمودار جسم-آزاد سورت‌ها در حالت $\theta = 15^\circ$.

آمده است. سطح یک نیروی عمودی N بر سورت‌ها وارد می‌کند. نیروها را به مؤلفه‌هایشان تجزیه می‌کنیم و قانون دوم نیوتون را به‌کار می‌بریم:

$$\sum F_x = P = ma_x \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\sum F_y = N - mg = ma_y \quad \text{مؤلفه } y$$

اگر قرار باشد حرکت عمودی‌ای نداشته باشیم، سورت‌ها روی سطح می‌ماند و $a_y = 0$ است، بنابراین

$$N = mg = (7.5 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 74 \text{ N}$$

شتاب افقی برابر است با

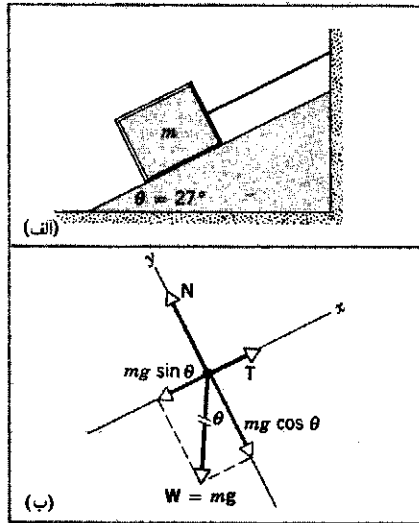
$$a_x = \frac{P}{m} = \frac{21.0 \text{ N}}{7.5 \text{ kg}} = 2.8 \text{ m/s}^2$$

در مثال بعد، یک نیروی دیگر را معرفی می‌کنیم: نیروی عمود بر سطح N که سطوح بر اجسام وارد می‌کنند. کتاب روی میز شکل ۸ را در نظر بگیرید. زمین نیرویی رو به پایین به کتاب وارد می‌کند (وزن کتاب)، اما کتاب در حالت تعادل است، پس برای نیروهای وارد بر آن باید صفر باشد. نیروی دیگری که بر کتاب وارد می‌شود نیروی رو به بالایی است که میز وارد می‌کند (F_{BT} در شکل ۸). در عمل، این نیرو است که کتاب را روی سطح میز نگه می‌دارد. اگر اصطکاک نباشد، سطوح فقط می‌توانند نیروی عمودی اعمال کنند، یعنی فقط نیروهایی که بر سطح عمود باشند. (توجه کنید که کتاب هم نیرویی رو به پایین بر میز وارد می‌کند.)

اگر دستمان را روی کتاب بگذاریم و آن را، با نیروی P ، به پایین فشار بدهیم نیروی عمودی سطح میز بر کتاب هم باید افزایش پیدا کند تا در این حالت برابر با مجموع وزن کتاب و نیروی P شود. اگر P به اندازه کافی بزرگ باشد، به حالتی می‌رسیم که میز دیگر نمی‌تواند نیروی عمودی کافی به طرف بالا تأمین کند، و کتاب میز را می‌شکند. کشش و نیروی عمود بر سطح نمونه‌هایی از نیروهای تماسی‌اند؛ نیرویی که جسمی که با جسم دیگر در تماس است، از طریق همین تماس، بر آن وارد می‌کند. منشأ این نیروها اتمهای اجسام‌اند، که هر یک نیرویی بر اتم مجاور وارد می‌کند. نیروهای تماسی تا وقتی تأمین می‌شوند که از نیروهای بین اتمی بزرگتر نشوند؛ در غیر این صورت پیوند بین اتمها می‌شکند، و ریسمان پاره می‌شود یا سطح چند تکه می‌شود.

مثال ۵. سورت‌های به جرم $m = 7.5 \text{ kg}$ روی سطحی بدون اصطکاک به وسیله ریسمانی کشیده می‌شود (شکل ۱۵). نیروی ثابت $P = 21.0 \text{ N}$ به ریسمان اعمال می‌شود. حرکت را در حالتی که (الف) ریسمان افقی است و (ب) ریسمان با سطح افقی زاویه $\theta = 15^\circ$ می‌سازد، تحلیل کنید.

حل: (الف) نمودار جسم-آزاد با ریسمان افقی در شکل ۱۵



شکل ۱۶. مثال ۶. (الف) جرم m به کمک ریسمانی روی سطح شیب‌داری، در حالت سکون نگه داشته شده است. (ب) نمودار جسم-آزاد m ، دقت کنید که دستگاه مختصات xy را مایل گرفته‌ایم تا محور x با سطح موازی باشد. وزن mg را به مؤلفه‌ها تجزیه کرده‌ایم.

این معادلات را امتحان کنید. آیا معقول‌اند؟ در حد $\theta = 0^\circ$ چه می‌شود؟ به نظر می‌رسد که کشش صفر می‌شود. آیا انتظار دارید که کشش برای قطعه‌ای که روی یک سطح افقی ساکن است صفر باشد؟ در حالت $\theta = 0^\circ$ ، نیروی عمود بر سطح چه می‌شود؟ آیا معقول است؟ T و N ، در حد $\theta = 90^\circ$ چه می‌شوند؟ باید عادت کنید که، پیش از آغاز عملیات جبری برای حل مسئله، چنین پرسشهایی از خودتان بکنید. اگر اشتباهی شده باشد، حالا بهترین زمان یافتن و تصحیح آن است.

معادلات را حل می‌کنیم:

$$T = mg \sin \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) = 8.0 \text{ N}$$

$$N = mg \cos \theta = (18.0 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(\cos 27^\circ) = 15.7 \text{ N}$$

(ب) اگر ریسمان پاره شود، کشش از معادلات حذف می‌شود و قطعه دیگر در حالت تعادل نخواهد بود. در این حالت قانون دوم نیوتون می‌گوید که:

$$\sum F_x = -mg \sin \theta = ma_x \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = ma_y \quad \text{مؤلفه } y$$

بریدن ریسمان حرکت در راستای y را تغییر نمی‌دهد (قطعه از سطح به بالا نمی‌رود!). اینجا هم $a_y = 0$ است، و نیروی عمود بر سطح

توجه کنید که اگر سطح واقعاً بدون اصطکاک باشد (چنانکه ما فرض کرده‌ایم)، شخص نمی‌تواند به مدت زیادی این نیرو را به سورتمه اعمال کند. سورتمه، بعد از 3.0 s حرکت با این شتاب، سرعتی برابر با 84 m/s یا 188 mi/h پیدا می‌کند.

(ب) اگر نیروی کشش افقی نباشد، نمودار جسم-آزاد به صورت شکل ۱۵ است، و معادلات مربوط به این حالت، به شکل زیرند:

$$\sum F_x = P \cos \theta = ma_x \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\sum F_y = N + P \sin \theta - mg = ma_y \quad \text{مؤلفه } y$$

فعلاً فرض می‌کنیم که سورتمه روی سطح می‌ماند؛ یعنی $a_y = 0$ است.

$$N = mg - P \sin \theta = 74 \text{ N} - (21.0 \text{ N})(\sin 15^\circ) = 69 \text{ N}$$

$$a_x = \frac{P \cos \theta}{m} = \frac{(21.0 \text{ N})(\cos 15^\circ)}{7.0 \text{ kg}} = 2.7 \text{ m/s}^2$$

نیروی عمود بر سطح، همواره بر سطح تماس عمود است؛ با مختصات که در شکل ۱۵ ب انتخاب کرده‌ایم، N باید مثبت باشد، اگر $P \sin \theta$ را زیاد کنیم N کم می‌شود و سرانجام، در نقطه‌ای، صفر می‌شود. در این نقطه سورتمه، تحت تأثیر مؤلفه رو به بالای P ، از سطح جدا می‌شود و باید حرکت عمودی آن را هم تحلیل کنیم. برای این مقادیر P و θ که ما به کار بردیم، سورتمه روی سطح باقی می‌ماند و $a_y = 0$ است.

مثال ۶. قطعه‌ای به جرم $m = 18.0 \text{ kg}$ به کمک ریسمانی روی سطح بدون اصطکاک که شیب 27° دارد نگه داشته شده است (شکل ۱۶ الف). (الف) کشش ریسمان و نیروی عمود بر سطحی را که سطح بر قطعه وارد می‌کند پیدا کنید. (ب) فرض کنید ریسمان پاره می‌شود و حرکت بعدی را توصیف کنید.

حل: (الف) نمودار جسم-آزاد قطعه در شکل ۱۶ ب آمده است. نیروهای مؤثر بر قطعه عبارت‌اند از نیروی عمودی N ، وزن $W = mg$ ، و کشش T ریسمان، دستگاه مختصاتی انتخاب می‌کنیم که محور x آن موازی با سطح، و محور y آن عمود بر سطح باشد. با این انتخاب، دو تا از نیروها (N و T) خودبه‌خود به مؤلفه‌هایشان تجزیه شده‌اند، و حرکتی که روی سطح انجام می‌شود هم یک‌بعدی است. در حالت استاتیک شتابی وجود ندارد و مجموع نیروها باید صفر باشد. وزن به مؤلفه‌های x ($-mg \sin \theta$) و y ($-mg \cos \theta$) تجزیه می‌شود و معادلات نیرو چنین‌اند:

$$\sum F_x = T - mg \sin \theta = ma_x = 0 \quad \text{مؤلفه } x$$

$$\sum F_y = N - mg \cos \theta = ma_y = 0 \quad \text{مؤلفه } y$$

یا

$$N = m(g + a)$$

اگر $a = 0$ باشد، یعنی آسانسور ساکن باشد یا، مثل قسمت (الف)، با سرعت ثابت حرکت کند، نتیجه می‌شود که

$$N = mg = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = 708 \text{ N} (= 159 \text{ lb})$$

اگر $a = 3.20 \text{ m/s}^2$ باشد، قسمت (ب)، نتیجه می‌شود که

$$N = m(g + a) = (72.2 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2 + 3.20 \text{ m/s}^2) = 939 \text{ N} (= 211 \text{ lb})$$

مقداری که ترازو نشان می‌دهد، یعنی نیروی عمودی کف بر شخص، هنگامی که آسانسور شتاب رو به بالا دارد (a در دستگاه مختصاتی که تعریف کردیم مثبت است) بیشتر می‌شود، و هنگامی که آسانسور شتاب رو به پایین دارد کمتر می‌شود. در سقوط آزاد ($a = -g$) ترازو صفر را نشان می‌دهد (نیروی عمود بر سطح صفر است).

۱۱-۵ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

در اینجا چند کاربرد دیگر قوانین نیوتون را بررسی می‌کنیم. در این مثالها چند جسم وجود دارند که باید آنها را تک‌تک تحلیل کرد، اما این اجسام کاملاً مستقل از هم نیستند زیرا حرکت یک جسم مقید به حرکت جسمی دیگر است، مثل حالتی که دو جسم با ریسمانی به طول ثابت به هم بسته شده‌اند. این مثالها را مطالعه کنید، و توجه کنید که برای هر جسم دستگاه مختصات جداگانه‌ای انتخاب شده است.

مثال ۸. شکل ۱۸ الف قطعه‌ای به جرم m_1 را نشان می‌دهد که روی سطح افقی بدون اصطکاک واقع شده است. این قطعه توسط ریسمانی به جرم ناچیز که به قطعه‌ی آویزانی به جرم m_2 متصل است کشیده می‌شود. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد که جرم آن قابل چشمپوشی است و محور آن هم با اصطکاک ناچیز می‌چرخد. کشش ریسمان و شتاب قطعات را پیدا کنید.

حل: در این مسئله دو جسم دخیل است؛ برخلاف مسائل قبلی‌ای که در آنها و تنها یک جسم مورد نظر بود. شکل‌های ۱۸ ب و ۱۸ ج نمودار جسم-آزاد این دو جسم مجزا را نشان می‌دهند. لزومی ندارد که برای هر دو جسم دستگاه مختصات یکسانی به‌کار ببریم، تا جایی که در هر زیرسیستم به‌طور سازگار عمل کنیم، مهم نیست که محورهای مختصات هر بخش را چگونه تعریف می‌کنیم.

نیروهای وارد بر قطعه ۱ عبارت‌اند از نیروی عمودی N ، وزن، و کشش ریسمان. چون انتظار داریم که قطعه ۱ به طرف راست شتاب بگیرد، این جهت را جهت مثبت x می‌گیریم. همچنین انتظار داریم

هم برابر است با $mg \cos \theta$ یا 157 N . در جهت x خواهیم داشت

$$a_x = -g \sin \theta = -(9.80 \text{ m/s}^2)(\sin 27^\circ) = -4.45 \text{ m/s}^2$$

علامت منفی نشان می‌دهد که قطعه در جهت منفی x ، یعنی به طرف پایین سطح، حرکت می‌کند. حالت‌های حدی $\theta = 0^\circ$ و $\theta = 90^\circ$ را بررسی کنید. آیا اینها با انتظارات شما سازگارند؟

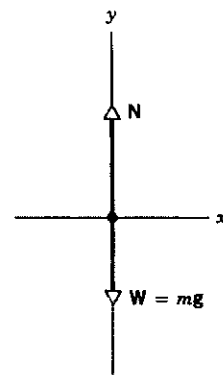
مثال ۷. شخصی به جرم 72.2 kg در آسانسوری روی یک ترازوی یک‌کفه‌ای ایستاده است شکل (الف) در حالتی که اتاقک آسانسور (الف) با سرعت ثابت پایین می‌آید و (ب) با شتاب 3.20 m/s^2 بالا می‌رود، ترازو چه مقداری را نشان می‌دهد؟

حل: ابتدا نتیجه‌ای عام برای مقادیر دلخواه شتاب عمودی a به‌دست می‌آوریم. چارچوب مرجع لخت خود را خارج از آسانسور می‌گیریم (مثلاً چاه آسانسور ساختمان)، زیرا آسانسور شتابدار چارچوب مرجع لختی نیست. هم g و هم a را ناظر می‌سنجند که در این چارچوب خارجی است. شکل ۱۷ ب نمودار جسم-آزاد شخص را نشان می‌دهد. نیروهای دخیل در مسئله عبارت‌اند از نیروی رو به پایین وزن و نیروی رو به بالای عمود بر سطح که ترازو اعمال می‌کند. نیروی عمود بر سطح از طرف ترازو بر شخص وارد می‌شود؛ ترازو نیروی رو به پایینی را نشان می‌دهد که از طرف شخص بر ترازو وارد می‌شود. طبق قانون سوم نیوتون، اندازه این دو نیرو یکی است. بنابراین، اگر نیروی عمود بر سطح را تعیین کنیم، مقداری که ترازو نشان می‌دهد به‌دست می‌آید. از نمودار جسم-آزاد داریم

$$\sum F_y = N - mg = ma$$

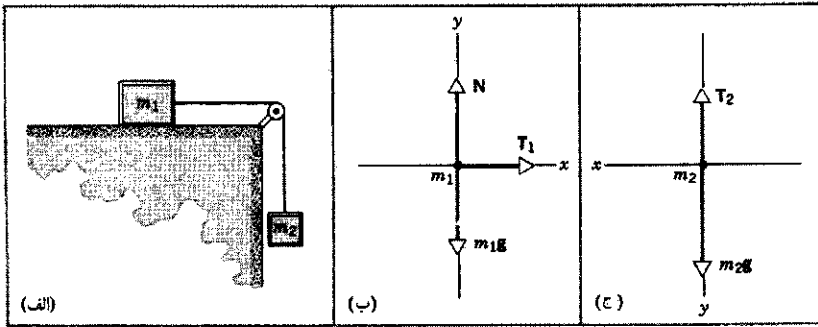


(الف)



(ب)

شکل ۱۷. مثال ۱۷. (الف) شخصی در آسانسور روی ترازو ایستاده است. (ب) نمودار جسم-آزاد شخص. اندازه نیروی عمود بر سطح N ، که ترازو آن را وارد می‌کند، همان مقداری است که ترازو نشان می‌دهد. (ترازوهای تجارتي از این نوع را برحسب کیلوگرم مدرج می‌کنند نه نیوتون.)



شکل ۱۸. مثال ۸. (الف) ریسمانی قطعه m_1 را روی سطح افقی صافی می‌کشد. ریسمان از روی قرقره‌ای می‌گذرد و به قطعه m_2 متصل است. (ب) نمودار جسم-آزاد قطعه m_1 . (ج) نمودار جسم-آزاد قطعه m_2 .

از حل معادلات اول و سوم نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} g \quad (5)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (6)$$

بررسی حالات حدی این نتایج مفید است. اگر m_1 صفر شود چه می‌شود؟ انتظار داریم که ریسمان شل شود ($T = 0$) و m_2 سقوط آزاد می‌کند ($a = g$). معادلات هم، به درستی، همین را پیش‌بینی می‌کنند. اگر m_2 صفر باشد، نیروی افقی‌ای بر قطعه ۱ وارد نمی‌شود و این قطعه شتاب نمی‌گیرد؛ اینجا هم، معادلات ما نتیجه درست می‌دهند.

توجه کنید که، همان‌طور که انتظار می‌رود، $a < g$ است. همچنین دقت کنید که T با $m_2 g$ برابر نیست. تنها اگر قطعه ۲ در حالت تعادل آویزان باشد ($a = 0$) است که $T = m_2 g$ می‌شود. اگر قطعه ۲ به طرف پایین شتاب داشته باشد، $T < m_2 g$ می‌شود؛ اگر قطعه به طرف بالا شتاب داشته باشد، $T > m_2 g$ می‌شود. آیا معادلات ۵ و ۶ در حد $g = 0$ هم نتیجه درست می‌دهند؟

مثال ۹. دو جرم نامساوی را در نظر بگیرید که با ریسمانی که از روی قرقره‌ای می‌گذرد به هم متصل‌اند (شکل ۱۹). قرقره ایده‌آل است (جرم آن ناچیز است و با اصطکاک ناچیزی حول محورش می‌چرخد). این دستگاه را ماشین آتوود^۱ هم می‌نامند. فرض کنید که m_2 بزرگتر از m_1 باشد. کشش ریسمان و شتاب جرمها را پیدا کنید.

حل: چون پیش‌بینی می‌کنیم که جرمها فقط شتاب عمودی داشته باشند، جهت مثبت y را، برای هر جرم، جهت حرکت آن

۱. جرج آتوود (۱۷۴۵ تا ۱۸۰۷) یک ریاضیدان انگلیسی بود که در سال ۱۷۸۴ این ابزار را برای نمایش قوانین حرکت شتابدار و سنسج g اختراع کرد. از با کوچک کردن اختلاف میان m_1 و m_2 می‌توانست آثار سقوط آزاد را "کند کند" و زمان حرکت وزنه افتان را با یک ساعت آونگ‌دار اندازه بگیرد؛ ساعت آونگ‌دار دقیقترین ابزاری بود که آن‌ده‌ده‌ها، زمان برای سنسج بازه‌های زمانی در اختیار داشت.

که قطعه ۱ روی سطح افقی باقی بماند؛ بنابراین، مؤلفه y شتاب آن صفر است. به این ترتیب، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون به این شکل در می‌آیند:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T_1 = m_1 a_{1x} && \text{مؤلفه } x: \\ \sum F_y &= N - m_1 g = m_1 a_{1y} = 0 && \text{مؤلفه } y: \end{aligned}$$

برای قطعه ۲، محور y را عمودی و رو به پایین می‌گیریم، یعنی در همان جهتی که انتظار داریم جهت شتاب قطعه ۲ باشد. برای این قطعه لازم نیست که مؤلفه x را بررسی کنیم، و مؤلفه y قانون دوم نیوتون نتیجه می‌دهد که

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_{2y}$$

ریسمان را بی‌جرم فرض کردیم، پس نیروی خالص وارد بر آن باید صفر باشد. کششهای T_1 و T_2 که از ریسمان بر قطعات وارد می‌شوند عکس‌العملهای T_1 و T_2 را دارند، که اندازه‌شان با دو نیروی اول برابر است، و نیروهایی هستند که قطعات بر ریسمان وارد می‌کنند. اگر ریسمان راست می‌بود، صفر شدن نیروی خالص وارد بر آن نتیجه می‌داد که $T_1 = T_2$. وجود قرقره ایده‌آل (بدون جرم و بدون اصطکاک) که جهت کشش ریسمان را عوض می‌کند هم تغییری در این نتیجه نمی‌دهد: اندازه کشش در تمام طول ریسمان ثابت است. این کشش مشترک را با متغیر T نشان می‌دهیم.

اگر ریسمان تغییر طول هم نتواند بدهد (یعنی کشیده نشود)، هر حرکت قطعه ۱ در جهت x دقیقاً متناظر با همان حرکت قطعه ۲ در جهت y است. در نتیجه، شتاب دو قطعه یکی است. این شتاب مشترک را a می‌نامیم. حالا سه معادله داریم:

$$T = m_1 a$$

$$N = m_1 g$$

$$m_2 g - T = m_2 a$$

جسم پیش‌بینی می‌کنیم. در اینجا هم، مثل مثالهای قبلی، انتظار داریم که مقدار کشش در همه جا یکسان باشد، و اندازه شتاب حرکت عمودی m_2 با حرکت m_1 روی صفحه یکی باشد. فرض می‌کنیم که m_1 در جهت مثبت x حرکت می‌کند (اگر فرضمان غلط باشد، a منفی در می‌آید). معادلات مؤلفه‌های قانون دوم نیوتون برای m_1 عبارت است از

$$\sum F_x = T - m_1 g \sin \theta = m_1 a \quad \text{مؤلفه } x:$$

$$\sum F_y = N - m_1 g \cos \theta = 0 \quad \text{مؤلفه } y:$$

و برای m_2 به صورت زیر است

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a$$

از حل همزمان این معادلات نتیجه می‌شود که

$$a = \frac{m_2 - m_1 \sin \theta}{m_1 + m_2} g \quad (9)$$

و

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \theta) \quad (10)$$

توجه کنید که این نتایج، به ازای $\theta = 0$ (یعنی حرکت قطعه ۱ افقی است) به همان نتایج مثال ۸ تبدیل می‌شوند و به ازای $\theta = 90^\circ$ (یعنی حرکت قطعه ۲ عمودی است) به نتایج مثال ۹. با جانشانی مقادیر عددی معلوم می‌شود که

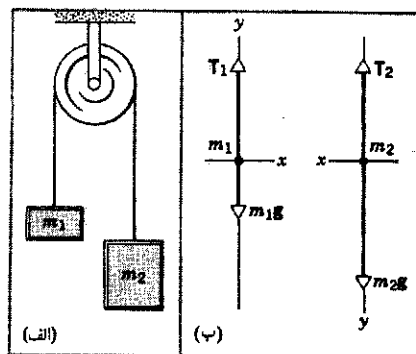
$$a = \frac{2.6 \text{ kg} - (9.5 \text{ kg})(\sin 34^\circ)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2) \\ = -2.2 \text{ m/s}^2$$

شتاب منفی درآمده است، که نشان می‌دهد حدس اولیه ما درباره جهت حرکت غلط بوده است. قطعه ۱ به طرف پایین سطح شیبدار می‌لغزد، و قطعه ۲ به بالا می‌رود. چون معادلات دینامیکی شامل نیروهایی نبودند که به جهت حرکت بستگی داشته باشند، این حدس اولیه غلط اثری بر معادلات ندارد و می‌شود پذیرفت که مقدار حاصل برای a درست است. در حالت کلی، اگر نیروهای اصطکاکی را هم، که در خلاف جهت حرکت‌اند، در نظر بگیریم، دیگر چنین نخواهد بود.

کشش ریسمان برابر است با

$$T = \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} (9.8 \text{ m/s}^2)(1 + \sin 34^\circ) = 31 \text{ N}$$

این مقدار بیشتر از وزن m_2 ($m_2 g = 26 \text{ N}$) است، و این با روبه بالا بودن شتاب m_2 سازگار است.



شکل ۱۹. مثال ۹. (الف) نمودار ماشین آتود، شامل دو جرم آویزان که با ریسمانی به هم متصل‌اند که از روی قرقره‌ای می‌گذرد. (ب) نمایش جسم-آزاد m_1 و m_2 .

می‌گیریم. کافی است که مؤلفه‌های y را بررسی کنیم. شکل ۱۹ ب نمودارهای جسم-آزاد را نشان می‌دهد. معادلات حرکت عبارت‌اند از

$$\sum F_y = T_1 - m_1 g = m_1 a_1 \quad \text{قطعه ۱:}$$

$$\sum F_y = m_2 g - T_2 = m_2 a_2 \quad \text{قطعه ۲:}$$

که در آن، a_1 و a_2 ، به ترتیب، شتاب m_1 و شتاب m_2 ‌اند. در اینجا هم، مثل مثال قبلی، اگر ریسمان بی‌جرم باشد و کشیده نشود، و قرقره هم بی‌جرم و بدون اصطکاک باشد، $T_1 = T_2 = T$ و $a_1 = a_2 = a$ (فرض می‌کنیم که این قرقره ایده‌آل اندازه کشش یا شتاب را در طول ریسمان تغییر نمی‌دهد؛ کارش فقط این است که جهت کشش و شتاب را عوض کند). حالا اگر دو معادله بالا را، پس از جایگذاری مقادیر مشترک حل کنیم، نتیجه می‌شود که

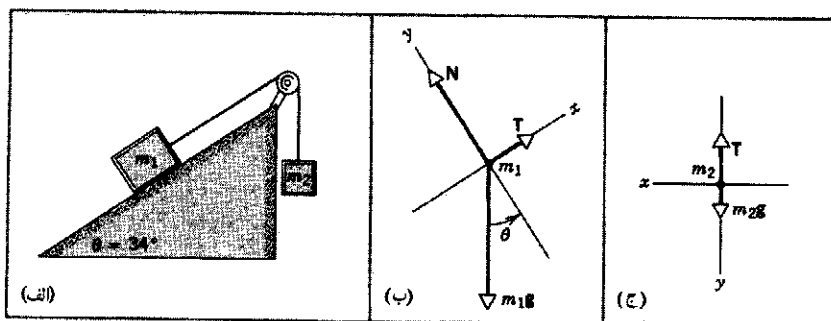
$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g \quad (7)$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \quad (8)$$

خالت‌های حدی $m_1 = 0$ ، $m_2 = 0$ ، $g = 0$ ، و $m_1 = m_2$ را بررسی کنید. توجه کنید که $m_1 g < T < m_2 g$ و مطمئن شوید که علت آن را درک کرده‌اید.

مثال ۱۰. دستگاه مکانیکی شکل ۲۰ الف را در نظر بگیرید؛ $m_1 = 9.5 \text{ kg}$ ، $m_2 = 2.6 \text{ kg}$ ، و $\theta = 34^\circ$ است. سیستم را از حالت سکون رها می‌کنیم، حرکت را توصیف کنید.

حل: شکل‌های ۲۰ ب و ۲۰ ج نمودار جسم-آزاد قطعات ۱ و ۲ را نشان می‌دهند. دستگاه‌های مختصات را طبق شکل گرفته‌ایم تا برای هر جسم، یک محور مختصات موازی، با شتاب، باشد که به سمت راست...

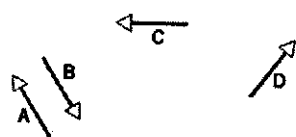


شکل ۲۰. مثال ۱۰. (الف) قطعه m_1 روی سطح شیبدار بدون اصطکاکی می لغزد. قطعه m_2 از ریسمانی، که به m_1 متصل است، آویزان است. (ب) نمودار جسم-آزاد m_1 . (ج) نمودار جسم-آزاد m_2 .

پرسشها

۷. فرض کنید جسمی تحت تأثیر دو نیرو شتاب گرفته است. آیا می شود نتیجه گرفت که (الف) اندازه سرعت جسم نمی تواند ثابت باشد؛ (ب) سرعت هیچگاه نمی تواند صفر شود؛ (ج) مجموع دو نیرو نمی تواند صفر باشد؛ (د) دو نیرو باید همراستا باشند؟

۸. شکل ۲۲ چهار نیرو با اندازه یکسان را نشان می دهد. چه ترکیبی از سه تا از این نیروها، اگر بر جسمی اثر کند، آن را در حالت تعادل نگه می دارد؟



شکل ۲۲. پرسش ۸

۹. اسبی را وادار می کنند که اریبه ای را بکشد. اسب از این کار امتناع می کند و در دفاع از خودش قانون سوم نیوتون را دلیل می آورد؛ کشش اسب بر اریبه هم اندازه و در خلاف جهت کشش اریبه بر اسب است. "حالا اگر من هیچگاه نتوانم نیرویی بیش از آنچه اریبه بر من وارد می کند بر آن وارد کنم، چطور می توانم اریبه را به حرکت در بیاورم؟" لطفاً پاسخ این اسب را بدهید.

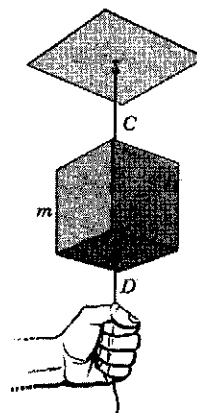
۱۰. کدام یک از این زوجها عمل-عکس العمل اند؟ (الف) زمین آجری را جذب می کند؛ آجر زمین را جذب می کند. (ب) یک هواپیمای ملخی هوا را به طرف دم خود می راند؛ هوا هواپیما را به جلو می راند. (ج) اسبی گاری ای را به جلو می کشد و آن را به حرکت در می آورد؛ گاری اسب را به عقب می کشد. (د) اسبی گاری ای را به جلو می کشد، اما آن را حرکت نمی دهد؛ گاری اسب را به عقب می کشد. (ه) اسبی گاری ای را به جلو می کشد، اما آن را حرکت نمی دهد؛ زمین نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت بر گاری وارد می کند. (و) زمین گاری را به پایین می کشد؛ سطح زمین گاری را، با نیرویی به همان اندازه و در خلاف جهت، به بالا می راند.

۱۱. عبارت زیر درست است؛ آن را توضیح بدهید. در مسابقه طنابکشی، تیمی برنده می شود که زمین را (در راستای افقی) بیشتر هل بدهد.

۱۲. دو نفر می خواهند طنابی را پاره کنند، ابتدا هر کدام یک سر طناب را می گیرند و به طرف خودشان می کشند، اما موفق نمی شوند. بعد یک

۱. چرا زمانی که اتوبوس ترمز کند تا بایستد به جلو می افتید، و زمانی که از حالت سکون شتاب می گیرد به عقب؟ مسافران سرپایی قطار زیرزمینی اغلب به این نتیجه می رسند که بهتر است موقع شروع حرکت یا شروع توقف، به طرف پنجره های جانبی بایستند، و موقع حرکت با سرعت ثابت، به طرف جلو یا عقب. چرا؟

۲. قطعه ای به جرم m با ریسمان C از سقف آویزان است، و ریسمان مشابه D هم به ته آن متصل است (شکل ۲۱). اگر D را به سرعت بکشید، خود آن پاره می شود، اما اگر D را به آهستگی بکشید، C پاره می شود. چرا؟



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. اغلب می گویند، جرم هر جسم "مقدار ماده" موجود در آن است. این عبارت را نقد کنید.

۴. اگر نیرو، طول، و زمان را کمیت های بنیادی بگیریم، بعد جرم چه خواهد بود؟

۵. آیا می شود قانون اول نیوتون را فقط حالت خاص $g = 0$ قانون دوم دانست؟ اگر چنین باشد، آیا واقعاً نیازی به قانون اول هست؛ توضیح بدهید.

۶. آیا رابطه ای بین نیروی وارد بر یک جسم و جهت حرکت آن جسم وجود دارد؟ اگر دارد چه رابطه ای؟

چنان تنظیم کرد که "کیپ بسته شود"، و نکیه‌گاه سر در صندلیهای جلو نباید درست پشت گردن قرار بگیرد بلکه باید آنها را چنان تنظیم کرد که سطح بالایشان با بالای گوشها هم‌تراز شود. قوانین نیوتون چگونه این توصیه‌های ایمنی را توجیه می‌کنند؟

۲۲. بیکانی را از کمان رها می‌کنید و مسیر سهموی آن را در هوا، تا نقطه برخورد به زمین تعقیب می‌کنید. می‌بینید که پیکان در حین پرواز طوری می‌پیچد که همواره بر مسیر پروازش مماس باشد. چه چیزی باعث این می‌شود؟

۲۳. در یک مسابقه طناب‌کشی، سه مرد در نقطه A طناب را به طرف چپ و سه مرد در نقطه B طناب را به طرف راست می‌کشند. اندازه دو نیرو با هم برابر است. یک وزنه 51b از وسط طناب به‌طور عمودی آویزان است. (الف) آیا اینها می‌توانند طناب AB را افقی نگه دارند؟ (ب) اگر نمی‌توانند توضیح بدهید چرا. اگر می‌توانند اندازه نیروهای لازم در نقاط A و B را تعیین کنید.

۲۴. پرنده‌ای از روی یک سیم تلگراف کشیده شده بلند می‌شود. آیا این کار کشش سیم را تغییر می‌دهد؟ اگر تغییر می‌دهد، آیا مقدار این تغییر کمتر از وزن پرنده است، با آن برابر است، یا از آن بیشتر است؟

۲۵. ریسمان بی‌جرمی از روی قرقره بدون اصطکاک گذشته است. میمونی یک سر طناب را گرفته است، و آینه‌ای هم‌وزن میمون، به سر دیگر طناب، در همان ارتفاع میمون، بسته شده است. آیا میمون می‌تواند (الف) با بالا رفتن از طناب، (ب) با پایین آمدن از طناب، یا (ج) با رها کردن طناب، از تماشای تصویر خودش معاف شود؟

۲۶. در نوامبر ۱۹۸۴ جوآلن و دیل گاردنر (فضانوردان امریکایی) یک ماهوارهٔ مخابراتی وستار-۶ را، که در مدار نادرستی افتاده بود، گرفتند و در محفظهٔ بار فضایی (دیسکوری) (شکل ۲۳) قرار دادند. جوآلن در توصیف این تجربه دربارهٔ ماهواره گفته بود "سنگین نیست؛ جرم زیادی دارد." منظورش چه بوده است؟

۲۷. فرض کنید مسافر سفینه‌ای هستید که در مدار قرار گرفته است. در پوش یک ظرف دراز و باریک را که تنها یک زیتون دارد برمی‌دارید. چند راه برای درآوردن زیتون از ظرف، چه راههایی، که در همهٔ آنها از اینرسی زیتون یا اینرسی ظرف استفاده شده باشد، پیشنهاد می‌کنید؟

۲۸. دسته جارویی را در نظر بگیرید که به هر سر آن یک میخ فرو کرده‌اند. این چوب را از میخهایش روی دو گیلان پر گذاشته‌اند (شکل ۲۴). آزمایشگر با میلهٔ سفتی، ضربهٔ سریع و محکمی به دسته جارو می‌زند. دسته جارو می‌شکند و به زمین می‌افتد، اما گیلانها سالم می‌مانند و مایع درون آنها هم نمی‌ریزد. این شیرین‌کاری جالب، در اواخر قرن گذشته خیلی رواج داشت. فیزیک این قضیه چیست؟ (اگر خواستید امتحان کنید، اول با قوطیهای خالی نوشابه تمرین کنید. می‌توانید از مدرستان خواهش کنید که با این شیرین‌کاری، یک نمایش درسی در کلاس ترتیب بدهند!)

سر طناب را به دیوار می‌بندند و سر دیگر را با هم می‌کشند. آیا این روش بهتر از روش اول است؟ توضیح بدهید.

۱۳. جرم شما برحسب اسلاگ چقدر است؟ وزن شما برحسب نیوتون چقدر است؟

۱۴. شخصی موقع پرکردن فرم مشخصات خود، در جلوی کلمهٔ وزن می‌نویسد ۷۸kg، اما وزن نیرواست و کیلوگرم یکای جرم. وقتی یکاهای جرم را برای بیان وزن به‌کار می‌بریم، منظورمان چیست؟ چرا وزن را برحسب نیوتون بیان نمی‌کنیم؟ وزن این شخص چند نیوتون است؟ چند پوند است؟

۱۵. عبارتهای زیر دربارهٔ جرم و وزن از ورقه‌های امتحانی گرفته شده‌اند. نظرتان دربارهٔ آنها چیست؟ (الف) جرم و وزن کمیت فیزیکی واحدی هستند که برحسب یکاهای متفاوتی بیان شده‌اند. (ب) جرم خاصیت یک جسم به تنهایی است، اما وزن ناشی از برهم‌کنش دو جسم است. (ج) وزن اجسام متناسب با جرمشان است. (د) با تغییر وزن اجسام در نقاط مختلف، جرم آنها هم تغییر می‌کند.

۱۶. یک نیروی افقی بر جسمی اثر می‌کند که می‌تواند آزادانه حرکت کند. آیا این نیرو، اگر کمتر از وزن جسم باشد، می‌تواند به جسم شتاب بدهد؟

۱۷. چرا شتاب اجسامی که سقوط آزاد می‌کنند مستقل از وزنشان است؟

۱۸. برای تجربه کردن بی‌وزنی، حتی اگر به مدت خیلی کوتاهی باشد، چه راههایی به نظرتان می‌رسد؟

۱۹. در چه اوضاع و احوالی وزن شما صفر می‌شود؟ آیا پاسخ به چارچوب مرجع بستگی دارد؟

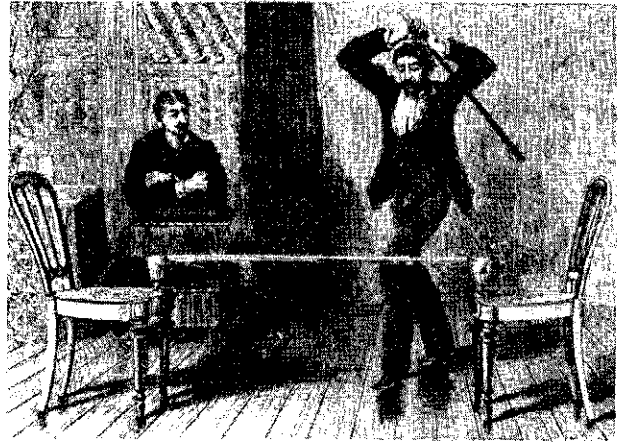
۲۰. "بازوی مکانیکی" فضایی شاتل، در حالتی که ۱۲m دراز شده باشد، می‌تواند ماهواره‌ای به جرم ۲۲۰۰kg را جابه‌جا کند (شکل ۲۳). اما روی زمین، همین سیستم "دستکاری از دور" وزن خودش را هم نمی‌تواند تحمل کند. در شرایط "بی‌وزنی" شاتل در مدار، اصولاً چرا لازم است که RMS بتواند نیرو وارد کند؟



شکل ۲۳. برشهای ۲۰ و ۲۶

۲۱. در کتابچهٔ راهنمای اتومبیلی آمده است که کمر بند ایمنی را باید

در آسانسوری در حالت تعادل اند؛ یعنی، قرقره تمایلی به چرخیدن ندارد. کسی که فیزیک بلد باشد چه نتیجه‌ای از این مشاهده می‌گیرد؟ شکل ۲۵ دنباله‌دار کوهوتک را نشان می‌دهد که در سال ۱۹۷۳ ظاهر شد. این دنباله‌دار هم، مثل همه دنباله‌دارهای دیگر، در اثر جاذبه گرانشی خورشید به دور خورشید می‌گردد. هسته دنباله‌دار، توده نسبتاً بزرگی است که در نقطه P شکل قرار دارد. دم دنباله‌دار در اثر بادهای خورشیدی تشکیل می‌شود. باد خورشیدی انبوهی از ذرات بارداری است که از خورشید به بیرون فوران می‌کنند. آیا می‌توانید چیزی درباره جهت نیرویی که بر هسته دنباله‌دار وارد می‌شود بگویید؟ اگر می‌توانید چه چیز؛ درباره جهت شتاب هسته چطور؟ درباره جهت حرکت آن چطور؟



شکل ۲۴. برش ۲۸



شکل ۲۵. برشهای ۳۶ و ۳۷

۳۷. دنباله‌دارها عموماً یک دم غبار دارند (شکل ۲۵) که متشکل است از ذرات غباری که در اثر فشار نور خورشید، به طرف مخالف خورشید رانده می‌شوند. چرا این دم اغلب خمیده است. ۳۸. آیا می‌توانید یک پدیده فیزیکی مثال بزنید که زمین در آن دخیل باشد ولی بتوانیم در تحلیل این پدیده زمین را "ذره" در نظر بگیریم؟

مسئله‌ها

بخش ۵.۵ قانون دوم نیوتون

۱. فرض کنید نیروی گرانشی خورشید ناگهان قطع شود، چنانکه زمین دیگر در قید خورشید نباشد و از مدار آن رها شود. در این صورت چقدر طول می‌کشد تا زمین به فاصله مدار فعلی پلوتون از خورشید برسد؟ (راهنمایی: بعضی از داده‌های مورد نیازتان را می‌توانید از پیوست ج به دست بیاورید.)

۲. قطعه‌ای به جرم 5kg را که روی سطح افقی بدون اصطکاک در حالت سکون است با نیروی افقی ثابت 38N می‌کشیم. (الف) شتاب آن چقدر می‌شود؟ (ب) چه مدتی باید آن را کشید تا سرعت آن 2m/s شود؟ (ج) در این مدت، قطعه چه مسافتی را می‌پیماید؟

۳. الکترونی در خط مستقیم از کاتد یک لامپ خلا به آند آن می‌رود.

۲۹. آسانسوری متکی به یک تک کابل است و وزنه مقابل هم ندارد. مسافران در طبقه هم‌کف سوار می‌شوند، به طبقه آخر می‌روند، و پیاده می‌شوند و آنجا مسافران جدیدی سوار می‌شوند و به طبقه همکف می‌آیند. طی این رفت و برگشت، چه موقع کشش کابل برابر با وزن آسانسور به علاوه وزن مسافران است؟ چه موقع از آن بیشتر است؟ چه موقع از آن کمتر است؟

۳۰. در عرشه فضایی دیسکاواری در مدار هستید و شخصی دو توپ چوبی به ظاهر کاملاً یکسان به شما می‌دهد. یکی از این توپها یک هسته سربی دارد و دیگری ندارد چند راه برای تشخیص توپها از هم پیشنهاد می‌کنید.

۳۱. روی سکوی یک ترازوی فنری بایستید و وزن خودتان را بخوانید. بعد روی آن یک قدم بردارید. خواهید دید که در ابتدای گام، ترازو وزن کمتری نشان می‌دهد و در پایان گام وزن بیشتری، چرا؟

۳۲. آیا می‌توانید خودتان را با ترازویی وزن کنید که حداکثر وزنی که می‌تواند نشان بدهد کمتر از وزن شماست؟ اگر می‌توانید، چگونه؟

۳۳. وزنه‌ای با ریسمانی از سقف آسانسوری آویزان است. در کدام یک از حالات زیر، ریسمان بیشترین کشش را دارد؟ در کدام یک کمترین کشش را؟ (الف) آسانسور در حال سکون است؛ (ب) آسانسور با سرعت ثابت بالا می‌رود؛ (ج) آسانسوری با سرعت کم شونده پایین می‌آید؛ (د) آسانسور با سرعت زیاد شونده پایین می‌آید.

۳۴. شخصی در آسانسوری روی یک ترازوی فنری ایستاده است. در کدام یک از حالات زیر، ترازو کمترین وزن را نشان می‌دهد؟ در کدام یک بیشترین وزن را؟ (الف) آسانسور ساکن است؛ (ب) آسانسور کابزش بریده است و دارد سقوط آزاد می‌کند؛ (ج) آسانسور به طرف بالا شتاب دارد؛ (د) آسانسور به طرف پایین شتاب دارد؛ (ه) آسانسور با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

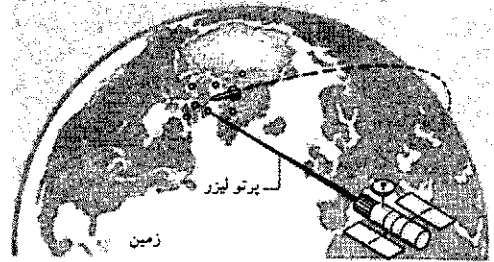
۳۵. دو جرم نامساوی که توسط نخ‌ی از دو طرف قرقره‌ای آویزان‌اند،

فاصله آند از کاتد 1.5 cm است. الکترون با سرعت صفر شروع به حرکت می‌کند و با سرعت 10^6 m/s به آند می‌رسد. (الف) با این فرض که شتاب ثابت است، نیروی وارد بر الکترون را محاسبه کنید. جرم الکترون $9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$ است. این نیرو منشأ الکتریکی دارد. (ب) نیروی گرانشی وارد بر الکترون را حساب کنید.

۴. نوترونی با سرعت 10^7 m/s حرکت می‌کند. برد نیروهای هسته‌ای بسیار کوتاه است؛ نیروی هسته‌ای در خارج هسته عملاً صفر است، اما در داخل هسته بسیار قوی است. اگر نوترون را هسته‌ای به قطر 10^{-14} m به دام بیندازد و به حالت سکون در بیاورد، کمترین مقدار نیروی لازم برای این کار، چقدر است؟ این نیرو را ثابت فرض کنید. جرم نوترون $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است.

۵. در نوع تغییر شکل یافته‌ای از بازی "طناب‌کشی" دو نفر، به جای طناب، سورتمه‌ای به جرم 25 kg را در دو جهت مخالف هم می‌کشند. اگر این دو، سورتمه را با نیروی 90 N و 92 N به طرف خود بکشند، شتاب سورتمه چقدر می‌شود؟

۶. باریکه نوره که از چشمه لیزری ماهواره‌ای گسیل شده، به جسمی که از موشکی رها شده است برخورد می‌کند (شکل ۲۶). این باریکه نیروی 10^{-5} N به هدف وارد می‌کند. اگر مدت تابش باریکه 2.4 s باشد، جسم در این مدت چقدر جابه‌جا می‌شود؟ (الف) فرض کنید جسم سلاخی به جرم 280 kg است. (ب) فرض کنید جسم یک هدف کاذب به جرم 2.1 kg است؟ (این جابه‌جاییها را با مشاهده باریکه بازتابیده هم می‌شود سنجید.)



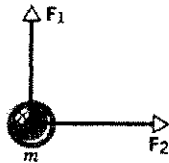
شکل ۲۶. مسئله ۶

۷. اتومبیلی با سرعت 53 km/h به پایه پلی برخورد می‌کند. یکی از مسافران که بلافاصله پشت یک بالشک هوا نشسته است، 65 cm (نسبت به جاده) حرکت می‌کند تا نهایتاً توسط بالشک متوقف شود. ضمن این توقف چه نیرویی بر بالاتنه این شخص، که جرم آن 39 kg است، وارد می‌شود؟ نیرو را ثابت فرض کنید.

۸. الکترونی به طور افقی با سرعت 10^7 m/s وارد میدان الکتریکی‌ای می‌شود که به آن نیروی عمودی ثابتی به اندازه 10^{-16} N وارد می‌کند. طی مدتی که الکترون مسافت افقی 33 mm را می‌پیماید، در راستای عمودی چقدر منحرف می‌شود؟

۹. "قایق" خورشیدی دیانا برای سفر در منظومه شمسی با استفاده از فشار نور خورشید طراحی شده است. مسافت "بادبان" این قایق

۱۰. دو نیروی F_1 و F_2 بر جرم m اثر می‌کنند (شکل ۲۷). اگر $F_1 = 3.7 \text{ N}$ ، $F_2 = 4.3 \text{ N}$ باشد، شتاب برداری جسم را به دست بیاورید.



شکل ۲۷. مسئله ۱۰

۱۱. جسمی به جرم 875 kg با سرعت 42 m/s در جهت محور x از مبدأ می‌گذرد. به این جسم نیروی 19 N در جهت مثبت محور y وارد می‌شود. حساب کنید که پس از گذشت 15 s (الف) سرعت جسم چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

۱۲. نیروی معینی به جسم m_1 شتاب 12 m/s^2 می‌دهد. همین نیرو به جسم m_2 شتاب 3.3 m/s^2 می‌دهد. این نیرو به جسمی که جرمش برابر با تفاضل m_2 و m_1 و (ب) مجموع m_2 و m_1 باشد، چه شتابی می‌دهد؟

۱۳. (الف) با چشمپوشی از نیروهای گرانشی، حساب کنید چه نیرویی لازم است تا فضاپیمایی به جرم 1200 t متریک را طی 3 روز از حالت سکون به یک دهم سرعت نور برساند. چه نیرویی لازم است تا طی 2 ماه چنین شود؟ (یک تن متریک برابر با 1000 kg است.) (ب) فرض کنید که در این لحظه موتورهای خاموش شوند. در هر یک از این دو مورد، چقدر زمان دیگر لازم است تا فضاپیما کلاً مسافت 5 ماه نوری را بپیماید؟ (۱ ماه را مساوی 30 روز بگیرید.)

بخش ۶-۵ قانون سوم نیوتون

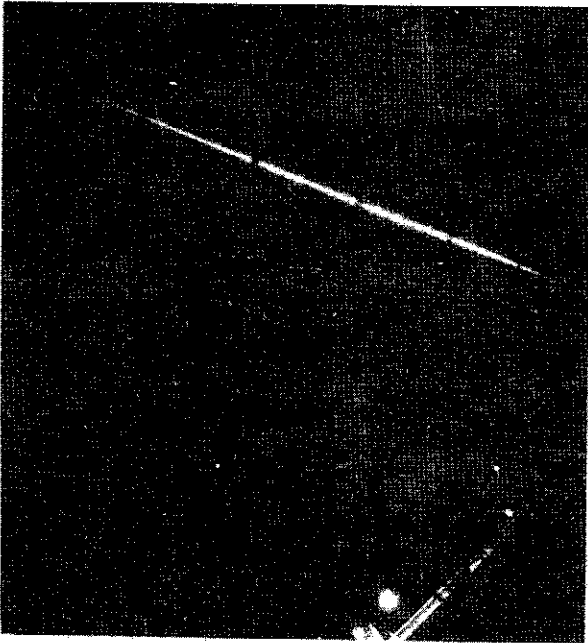
۱۴. دو قطعه به جرمهای $m_1 = 46 \text{ kg}$ و $m_2 = 38 \text{ kg}$ توسط ریسمان سیکی، روی میز افقی بدون اصطکاک، به هم متصل‌اند. در لحظه خاصی که شتاب جرم m_2 برابر با 2.6 m/s^2 است، (الف) نیروی وارد بر m_2 و (ب) شتاب m_1 چقدر است؟

۱۵. کودکی به جرم 40 kg و سورتمه‌ای به جرم 8.4 kg روی سطح دریاچه یخزده‌ای به فاصله 15 m از هم قرار دارند. کودک با استفاده از طنابی، نیروی 52 N بر سورتمه وارد می‌کند و آن را به طرف خودش می‌کشد. (الف) شتاب سورتمه چقدر است؟ (ب) شتاب کودک چقدر

۱. نگاه کنید به "The Wind from the Sun"، که یک داستان علمی تخیلی جالب از اتور پسی کلارک است.

متصل است، که سر دیگرش به دیوار وصل شده است؛ شکل ۲۸ ب.
نیروسنج چه مقداری را نشان می‌دهد؟ (وزن نیروسنج ناچیز است).
۲۵. کرهٔ بارداری به جرم $10^{-4} \text{kg} \times 2.8$ از ریسمانی آویزان است.
یک نیروی الکتریکی در راستای افقی بر این کره وارد می‌شود،
چنانکه ریسمان، در حالت سکون، با راستای قائم زاویهٔ 33° می‌سازد.
(الف) اندازهٔ نیروی الکتریکی و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.
۲۶. اتومبیلی به وزن $3000 \text{ lb} (\approx 13000 \text{ N})$ که با سرعت
 $50 \text{ mi/h} (\approx 8 \text{ km/h})$ در حرکت است، پس از طی مسافت
 $200 \text{ ft} (\approx 61 \text{ m})$ متوقف می‌شود. (الف) نیروی ترمز و (ب) زمان
لازم برای توقف را به دست بیاورید. با همان نیروی ترمز (ج) مسافت و
(د) زمان لازم برای توقف از سرعت اولیه $25 \text{ mi/h} (\approx 40 \text{ km/h})$
را حساب کنید.

۲۷. شهابی به جرم 25 kg به طور عمودی با شتاب 9.2 m/s^2 به
درون جو زمین سقوط می‌کند. علاوه بر گرانش، نیروی بازدارنده‌ای
(ناشی از کشش اصطکاکی جو) هم بر شهاب وارد می‌شود. اندازهٔ
این نیروی بازدارنده چقدر است؟ (شکل ۲۹).



شکل ۲۹. مسئله ۲۷

۲۸. آسانسوری به وزن 6200 lb با کابلی بالا کشیده می‌شود. شتاب
آسانسور 3.8 ft/s^2 است. (الف) کشش کابل چقدر است؟ (ب) اگر
شتاب آسانسور 3.8 ft/s^2 به طرف پایین بود، اما همچنان به طرف بالا
حرکت می‌کرد، کشش کابل چقدر می‌شد؟

۲۹. مردی به جرم 83 kg (وزن 180 lb) از لبهٔ پنجره‌ای
به روی یک سیکوی بتونی می‌پرد، لبهٔ پنجره 4.8 m (یعنی 16 ft)

است؟ (ج) این دو در چه فاصله‌ای از مکان اولیهٔ کودک به هم می‌رسند؟
فرض کنید نیرو ثابت می‌ماند و هیچ اصطکاکی هم وجود ندارد.

بخش ۸۵ وزن و جرم

۱۶. وزن هر یک از اجسام (الف) تا (ج) برحسب نیوتون و جرم آنها
برحسب کیلوگرم چقدر است؟ (الف) یک بستهٔ 500 lb شکر، (ب) یک
ورزشکار 240 lb ، و (ج) یک اتومبیل 1.8 ton . ($1 \text{ ton} = 2000 \text{ lb}$).
۱۷. (الف) جرم یک اتومبیل سورت‌های 1420 lb و (ب) وزن یک
پمپ گرمایی 412 kg چقدر است؟

۱۸. فضاوردی به جرم 750 kg زمین را ترک می‌کند. حساب کنید
که وزن او (الف) در روی زمین، (ب) در مریخ ($g = 3.72 \text{ m/s}^2$)،
و (ج) در فضای بین سیارات چقدر است. (د) در هر مورد جرم او
چقدر است؟

۱۹. ذره‌ای در نقطه‌ای که شتاب گرانی 9.8 m/s^2 است وزنی برابر با
 260 N دارد. (الف) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای که شتاب گرانی
 4.6 m/s^2 باشد چقدر است؟ (ب) وزن و جرم این ذره در نقطه‌ای
که نیروی گرانشی صفر باشد چقدر است؟

۲۰. هواپیمایی به جرم 12000 kg با سرعت 870 km/h در امتداد
افق پرواز می‌کند. نیروی بالا برنده‌ای که از هوا بر هواپیما وارد می‌شود
چقدر است؟

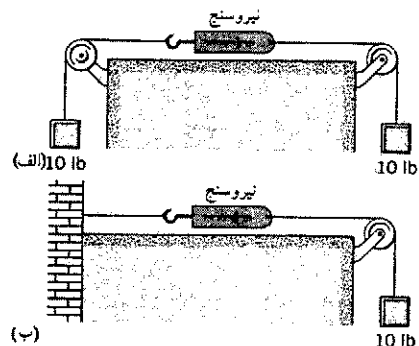
۲۱. نیروی خالص وارد بر اتومبیلی به وزن 3900 lb که با شتاب
 13 ft/s^2 حرکت می‌کند، چقدر است؟

۲۲. یک سورت‌موشکی آزمایشی به جرم 523 kg می‌تواند طی
 182 s از سکون به سرعت 1620 km/h برسد، نیروی خالص لازم
برای این کار چقدر است؟

۲۳. هواپیمایی قبل از برخاستن از زمین با شتاب
 2.3 m/s^2 (یعنی 7.55 ft/s^2) روی بانند فرودگاه حرکت
می‌کند. این هواپیما دو موتور جت دارد، که هر کدام
نیروی $1.4 \times 10^5 \text{ N}$ (یعنی 157 ton) تولید می‌کند. وزن هواپیما
چقدر است؟

بخش ۸۵ ۱۰ کاربردهای قوانین نیوتون

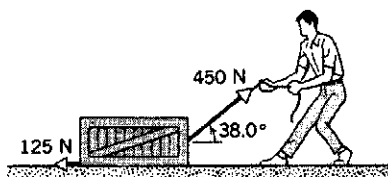
۲۴. (الف) دو وزنهٔ 10 lb ، طبق شکل ۲۸ الف، به یک نیروسنج متصل‌اند.
نیروسنج چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) یک وزنهٔ 10 lb به نیروسنجی



شکل ۲۸. مسئله ۲۴

اولیه قطعه دوم چقدر بوده است؟ (ج) این قطعه چقدر از سطح شیبدار بالا می‌رود؟ (د) زاویه سطح شیبدار با سطح افقی چقدر است؟

۳۶. کارگری صندوقی را با طنابی روی کف کارگاه می‌کشد. کارگر نیروی 450 N به طناب وارد می‌کند، و سر طناب 38° بالاتر از سطح افقی است. کف نیروی بازدارنده افقی‌ای به اندازه 125 N بر صندوق وارد می‌کند (شکل ۳۱). اگر (الف) جرم صندوق 96 kg باشد و (ب) وزن آن 960 N باشد، شتاب صندوق چقدر است؟



شکل ۳۱. مسئله ۳۶

۳۷. جرم آسانسوری با بارش 1600 kg است. این آسانسور، که با سرعت 120 m/s به طرف پایین در حرکت است، طی مسافت 420 m متوقف می‌شود. کشش کابل نگهدارنده، طی مدتی که آسانسور متوقف می‌شود چقدر است؟

۳۸. جسمی از یک ترازوی فنری که به سقف آسانسوری متصل شده، آویزان است. وقتی آسانسور ساکن است، ترازو 65 N را نشان می‌دهد. (الف) اگر آسانسور با سرعت ثابت 7.6 m/s به طرف بالا حرکت کند، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟ (ب) وقتی آسانسور با سرعت 7.6 m/s با شتاب 2.4 m/s^2 به طرف بالا در حرکت باشد، ترازو چه مقداری نشان می‌دهد؟

۳۹. وزنه کوچکی توسط قطعه نخ‌ی به جرم ناچیز از سقف واگن قطاری آویزان است. چنین شاغولی می‌تواند مانند شتاب‌سنج عمل کند. (الف) نشان بدهید که رابطه شتاب افقی واگن با زاویه θ ، که ریسمان با راستای قائم می‌سازد، $a = g \tan \theta$ است. (ب) a را به ازای $\theta = 20^\circ$ حساب کنید. (ج) θ را به ازای $a = 5\text{ ft/s}^2$ حساب کنید.

۴۰. یک موتور جت به جرم 1400 kg با سه بست به بدنه یک هواپیمای مسافری متصل است (در عمل هم همین‌طور است، شکل ۳۲). فرض کنید که هر بست یک سوم بار را تحمل می‌کند. (الف) نیروی وارد بر هر بست را، در حالتی که هواپیما منتظر خالی شدن باند است تا شروع به حرکت کند، حساب کنید. (ب) طی پرواز، هواپیما ناگهان به جریان متلاطمی برمی‌خورد که به آن شتاب 2.6 m/s^2 به طرف بالا می‌دهد. نیروی وارد بر هر بست، در این شرایط چقدر است؟ چرا فقط از سه بست استفاده می‌شود؟

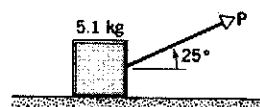
بالاتر از سکو است، مرد فراموش می‌کند زانوهاش را خم کند و پس از برخورد به سکو طی مسافت 22 cm (یعنی 8.7 in) متوقف می‌شود. (الف) شتاب متوسط مرد از زمانی که پاهایش به سکو می‌رسد تا زمان توقف کامل چقدر است؟ (ب) در این پرش چه نیروی متوسطی بر استخوانبندی او وارد می‌شود؟

۳۰. قطعه‌ای با سرعت اولیه v روی سطح شیبدار بدون اصطکاک با طرف بالای شیب پرتاب می‌شود. زاویه سطح شیب θ است. (الف) این قطعه تا چه مسافتی روی این سطح بالا می‌رود؟ (ب) چقدر طول می‌کشد تا به آنجا برسد؟ (ج) سرعت قطعه هنگامی که در برگشت به نقطه اولیه می‌رسد چقدر است؟ مقدار عددی جوابها را به ازای $\theta = 35^\circ$ و $v = 8.2\text{ ft/s}$ به دست بیاورید.

۳۱. لامپی در راستای قائم از ریسمانی آویزان است. ریسمان و لامپ در آسانسوری هستند که به پایین می‌آید. آسانسور، پیش از توقف شتاب 24 m/s^2 (یعنی 79 ft/s^2) دارد. (الف) اگر کشش ریسمان 89 N (یعنی 20 lb) باشد، جرم لامپ چقدر است؟ (ب) اگر آسانسور با شتاب رو به بالای 24 m/s^2 (یعنی 79 ft/s^2) به طرف بالا حرکت کند، کشش ریسمان چقدر می‌شود؟

۳۲. نخ قلاب ماهیگیری باید چه کششی را تحمل کند تا بتواند یک ماهی 19 lb را که با سرعت 92 ft/s شنا می‌کند، طی مسافت 45 in متوقف کند؟

۳۳. جسمی به جرم 51 kg را با ریسمانی روی سطح بدون اصطکاک می‌کشند. ریسمان نیروی $P = 12\text{ N}$ در زاویه $\theta = 25^\circ$ بالاتر از سطح افقی وارد می‌کند؛ (شکل ۳۰). (الف) شتاب جسم چقدر است؟ (ب) نیروی P را به آهستگی زیاد می‌کنیم. مقدار P درست پیش از بلند شدن جسم از سطح چقدر است؟ (ج) شتاب جسم درست پیش از بلند شدن آن از سطح، چقدر است؟

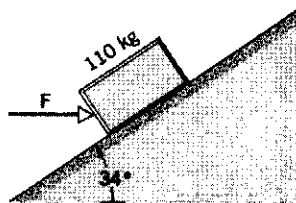


شکل ۳۰. مسئله ۳۳

۳۴. چگونه می‌توانیم جسمی به وزن 100 lb را با استفاده از طنابی که فقط تحمل 87 lb کشش را دارد از بالای بامی به پایین بفرستیم بی‌آنکه طناب پاره بشود؟

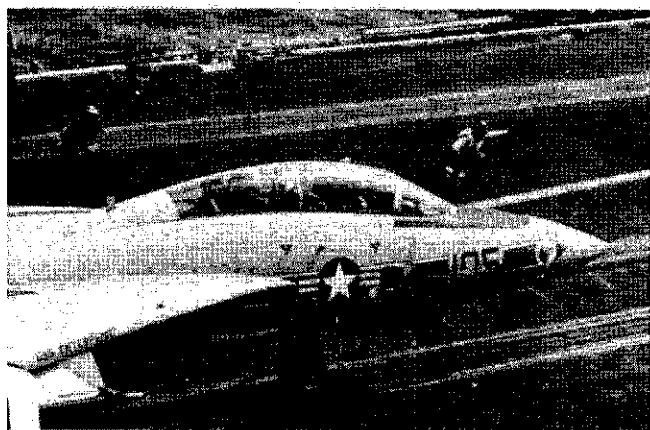
۳۵. قطعه‌ای از حالت سکون از بالای سطح شیب‌داری به طول 16 m رها می‌شود، و 42 s بعد به پایین می‌رسد. در همان لحظه‌ای که قطعه اول رها می‌شود، قطعه دیگری از پایین سطح شیب‌داری به طرف بالای شیب پرتاب می‌شود که همزمان با قطعه اول به پایین سطح برگردد. (الف) شتاب هر یک از این قطعات را پیدا کنید. (ب) سرعت

(الف) نیروی افقی لازم برای این کار (F) چقدر است؟
 (ب) نیرویی که سطح شیبدار بر صندوق وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۳۴. مسئله ۴۳

۴۴. یک جت نظامی (شکل ۳۵) به جرم ۲۶ ton، باید به سرعت 280 ft/s نسبت به هوا برسد تا بتواند شروع به پرواز کند. موتور خود جت نیروی 24000 lb تولید می‌کند. این جت باید از ناو هواپیمابری که طول عرشه پرواز آن 300 ft است به هوا بلند شود. پرتاب‌کننده ناو چه نیرویی باید بر هواپیما اعمال کند؟ فرض کنید که هم پرتاب‌کننده و هم موتور، در تمام مسافت 300 ft ، نیروی ثابتی اعمال می‌کنند.



شکل ۳۵. مسئله ۴۴

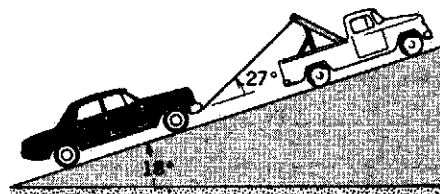
۴۵. موشک سیاره‌نشین به سطح کالیستو، یکی از اقمار سیاره مشتری، نزدیک می‌شود (شکل ۳۶). اگر موتور موشک نیروی رو به بالای 3260 N تولید کند، سیاره‌نشین با سرعت ثابت فرود می‌آید. کالیستو جرم ندارد. اگر نیروی رو به بالا 2200 N باشد، سیاره‌نشین با شتاب 390 m/s^2 به طرف پایین می‌آید. (الف) وزن سیاره‌نشین در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟ (ب) جرم سیاره‌نشین چقدر است؟ (ج) شتاب گرانشی در نزدیکی سطح کالیستو چقدر است؟



شکل ۳۲. مسئله ۴۰

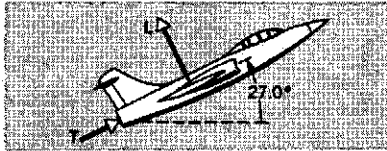
۴۱. چند کارگر در طبقه بالای ساختمانی وسایل و دستگاههایی را در یک آسانسور باری می‌گذارند تا به طبقه پایین بفرستند، اما کابل کهنه آسانسور تحمل این همه بار را ندارد و پاره می‌شود. جرم آسانسور با بار، در لحظه حادثه 1600 kg است. هنگام سقوط آسانسور، ریلهای هدایت‌کننده آن نیروی بازدارنده ثابتی به اندازه 3700 N بر اتاقک وارد می‌کنند. آسانسور با چه سرعتی به کف محفظه‌اش برخورد می‌کند؟ کف محفظه 72 m از طبقه بالا پایین‌تر است.

۴۲. اتومبیلی به جرم 1200 kg را با طنابی که به پشت کامیونی بسته شده است به بالای سطح شیبدار با زاویه 18° یدک می‌کشند. زاویه طناب با سطح شیبدار 27° است (شکل ۳۳). اگر طناب بتواند کشش 46 kN را تحمل کند، اتومبیل را طی مدت 7.5 s ، از حالت سکون، حداکثر تا چه مسافتی می‌شود یدک کشید؟ نیروهای بازدارنده وارد بر اتومبیل را در نظر نگیرید.



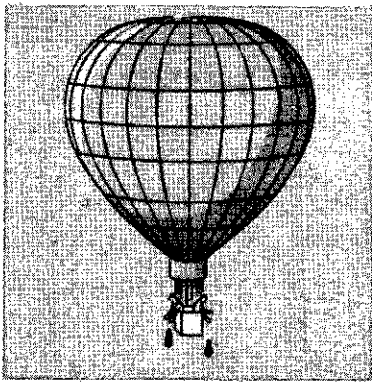
شکل ۳۳. مسئله ۴۲

۴۳. صندوقی به جرم 110 kg را با سرعت ثابت روی سطحی به شیب 34° هل می‌دهیم؛ (شکل ۳۴).



شکل ۳۸. مسئله ۲۸

۴۹. یک بالون پژوهشی به جرم M با شتاب رو به پایین در راستای قائم پایین می‌آید (شکل ۳۹). چقدر بار باید از بالون بیرون ریخت تا بالون شتاب رو به بالای a پیدا کند؟ فرض کنید نیروی بالابرنده بالون تغییری نمی‌کند.



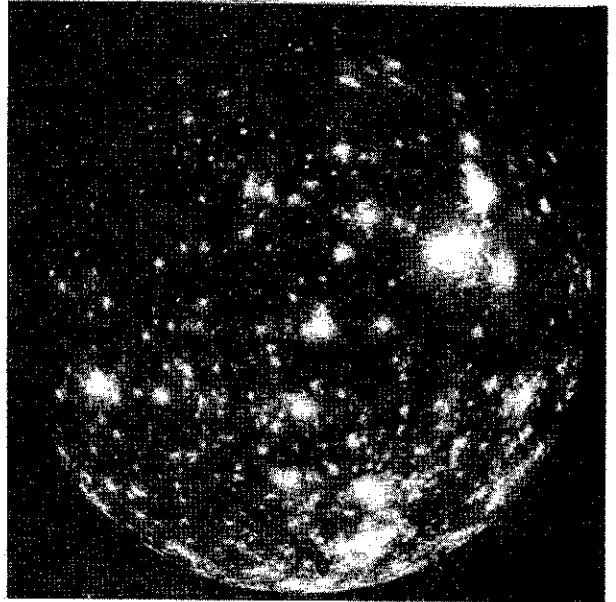
شکل ۳۹. مسئله ۲۹

۵۰. موشکی به جرم 3030 kg از زمین با زاویه فراز 58° آتش می‌شود. موتور موشک به مدت 48 s یک نیروی پیشران به مقدار 612 kN در زاویه ثابت 58° با سطح افقی تولید می‌کند و بعد خاموش می‌شود. از جرم سوخت مصرف شده و از مقاومت هوا صرف‌نظر کنید. (الف) ارتفاع موشک در نقطه خاموش شدن موتور و (ب) کل فاصله میان نقطه پرتاب و نقطه برخورد موشک به زمین را پیدا کنید.

۵۱. مکعبی به جرم m روی سطح شیبدار بدون اصطکاک که در آسانسوری واقع شده است به پایین می‌لغزد. زاویه سطح نسبت به کف آسانسور θ است. شتاب این مکعب نسبت به سطح شیبدار را در حالت‌های زیر پیدا کنید. (الف) آسانسور با سرعت ثابت v پایین می‌آید. (ب) آسانسور با سرعت ثابت v بالا می‌رود. (ج) آسانسور با شتاب ثابت تندکننده a پایین می‌آید. (د) آسانسور با شتاب ثابت کندکننده a پایین می‌آید. (ه) کابل آسانسور پاره می‌شود. (و) در قسمت (ج) سطح شیبدار چه نیرویی بر مکعب وارد می‌کند؟

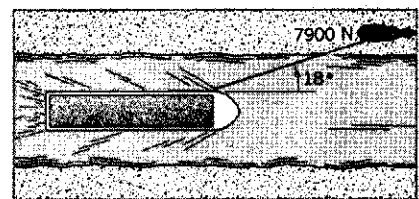
بخش ۱۱-۵ کاربردهای دیگری از قوانین نیوتون

۵۲. در شکل ۱۸، فرض کنید که $m_1 = 430 \text{ kg}$ و $m_2 = 180 \text{ kg}$



شکل ۳۶. مسئله ۴۵

۴۶. روزگاری کرجیها را با اسب می‌کشیدند و در کانال جلو می‌بردند (شکل ۳۷). فرض کنید اسب نیروی 7900 N ، با زاویه 18° نسبت به جهت حرکت در کانال، بر کرجی وارد کند. جرم کرجی 9500 kg و شتاب آن 12 m/s^2 است. آب چه نیرویی بر کرجی وارد می‌کند؟

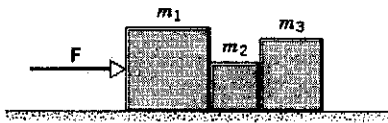


شکل ۳۷. مسئله ۴۶

۴۷. موشکی با بارش 51000 kg جرم دارد. نیروی پیشران موشک در حالتی که موشک (الف) بلافاصله پس از روشن شدن روی سکوی پرتاب به حالت "شنور" درآمده است و (ب) با شتاب 18 m/s^2 به طرف بالا، حرکت می‌کند چقدر است؟

۴۸. جت جنگنده‌ای با زاویه 27° نسبت به سطح افقی، و با شتاب 262 m/s^2 از زمین جدا می‌شود (شکل ۳۸). (الف) نیروی پیشران T موتور هواپیما و (ب) نیروی بالابرنده L را که ناشی از هوا و عمود بر بالهای هواپیماست به دست بیاورید.

حالت (ب) m_2 بر m_2 و (ج) m_1 بر m_2 چه نیرویی وارد می‌کند؟



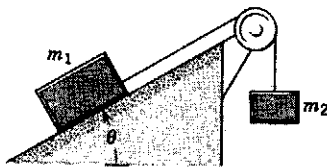
شکل ۴۲. مسئله ۵۷

۵۸. زنجیری شامل ۵ حلقه، هر یک به جرم 100g ، را با شتاب ثابت 250m/s^2 در راستای قائم بالا می‌بریم (شکل ۴۳). (الف) نیرویی که حلقه‌های مجاور بر هم وارد می‌کنند، (ب) نیروی F که عامل خارجی بر حلقه بالایی وارد می‌کند، و (ج) نیروی خالص وارد بر هر حلقه را حساب کنید.



شکل ۴۳. مسئله ۵۸

۵۹. جسمی به جرم $m_1 = 370\text{kg}$ روی سطح شیب‌داری به زاویه $\theta = 28^\circ$ واقع شده و با ریسمانی که از قرقره کوچک بی‌جرم و بدون اصطکاک عبور کرده، به جسم دیگری به جرم $m_2 = 186\text{kg}$ متصل شده است. m_2 به‌طور قائم از ریسمان آویزان است (شکل ۴۴). (الف) شتاب هر جسم چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟



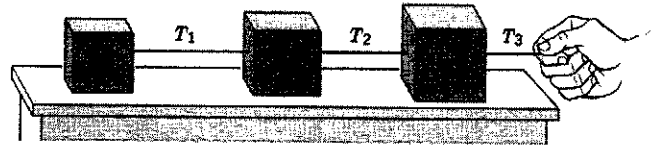
شکل ۴۴. مسئله ۵۹

۶۰. چتربازی به جرم 77kg ، کمی پس از باز شدن چترش با شتاب رو به پایین 25m/s^2 سقوط می‌کند. جرم چتر 52kg است. (الف) نیروی رو به بالای هوا بر چتر چقدر است؟ (ب) نیروی رو به پایینی که شخص بر چتر وارد می‌کند چقدر است؟

۶۱. آسانسوری شامل اتاقک (A)، وزنه مقابل (B)، موتور (C)، و کابل و قرقره است (شکل ۴۵). جرم اتاقک 1000kg و جرم وزنه مقابل 1400kg است. اصطکاک و جرم کابل و قرقره‌ها را به حساب نیاورید. آسانسور با شتاب تندکننده 230m/s^2 به بالا می‌رود و وزنه مقابل هم با همین شتاب به پایین می‌آید. (الف) کشش T_1 و (ب) کشش

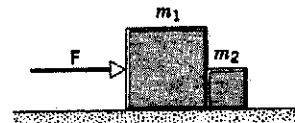
است. (الف) شتاب دو قطعه و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید. ۵۳. مردی به جرم 110kg با گرفتن طنابی خودش را از ارتفاع 12m به سطح زمین می‌رساند. طناب از روی قرقره بدون اصطکاک گذشته و سر دیگرش به کیسه سنی به جرم 74kg بسته شده است. (الف) مرد با چه سرعتی به زمین می‌خورد؟ (ب) آیا راهی هست که با سرعت کمتری به زمین بخورد؟

۵۴. میمونی به جرم 11kg از طنابی بسیار سبک بالا می‌رود. طناب (بدون اصطکاک!) از روی شاخه درختی گذشته است و به باری به جرم 15kg متصل است. (الف) میمون حداقل با چه شتابی باید از طناب بالا برود تا بتواند بار را از زمین بلند کند؟ (ب) اگر پس از بلند شدن بار از زمین، میمون بالا رفتن خود را متوقف کند و از طناب آویزان بماند، (ب) شتاب میمون و (ج) کشش طناب چقدر می‌شود؟ ۵۵. سه جسم روی میز افقی بدون اصطکاک با هم بسته شده‌اند، و با نیروی $T_2 = 65\text{N}$ به طرف راست کشیده می‌شوند (شکل ۴۰). اگر $m_1 = 12\text{kg}$ ، $m_2 = 24\text{kg}$ ، و $m_3 = 31\text{kg}$ باشد، (الف) شتاب سیستم و (ب) کششهای T_1 و T_2 را به دست بیاورید. تبادل نیرو بین اجسامی که به دنبال هم کشیده می‌شوند، مثلاً واگنهای قطار که لکوموتیو آنها را می‌کشد، مثل همین سیستم است.



شکل ۴۰. مسئله ۵۵

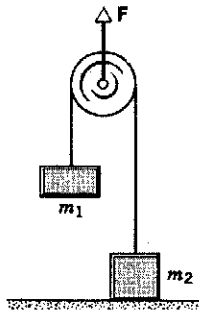
۵۶. دو جسم روی میز بدون اصطکاک با هم در تماس‌اند. نیرویی افقی F به یکی از آنها اعمال می‌شود (شکل ۴۱). (الف) اگر $m_1 = 23\text{kg}$ ، $m_2 = 12\text{kg}$ ، و $F = 32\text{N}$ باشد، نیروی تماسی بین دو جسم را پیدا کنید. (ب) نشان بدهید که اگر همین نیروی خارجی را، به جای m_1 ، به m_2 وارد کنیم، نیروی تماسی بین اجسام 21N می‌شود، که با مقدار حاصل از قسمت (الف) فرق می‌کند. چرا چنین است؟



شکل ۴۱. مسئله ۵۶

۵۷. شکل ۴۲ سه صندوق به جرمهای $m_1 = 452\text{kg}$ ، $m_2 = 228\text{kg}$ ، و $m_3 = 343\text{kg}$ را روی سطح افقی بدون اصطکاک نشان می‌دهد. (الف) چه نیروی افقی ای (F) لازم است تا کل مجموعه را با شتاب 132m/s^2 به طرف راست براندازد در این

زمین بماند؟ (ب) اگر F برابر با 110 N باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) با کشش حاصل از قسمت (ب)، شتاب m_1 چقدر است؟

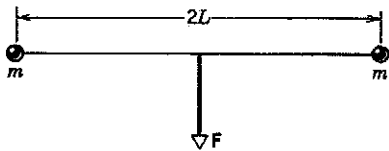


شکل ۴۷. مسئله ۶۳

۶۴. دو ذره، هر یک به جرم m ، با ریسمان سیکی به طول $2L$ به هم متصل‌اند (شکل ۴۸). نیروی ثابت F در نقطه میانی ریسمان ($x = 0$) در جهت عمود بر راستای اولیه ریسمان بر آن وارد می‌شود. نشان بدهید که شتاب هر جرم در راستای عمود بر F برابر است با

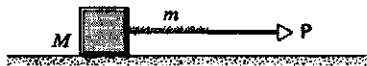
$$a_x = \frac{F}{2m} \frac{x}{(L^2 - x^2)^{3/2}}$$

که در آن، x فاصله عمودی هر جرم از خط اثر F است. وضعیت را در حالت $x = L$ بررسی کنید.



شکل ۴۸. مسئله ۶۴

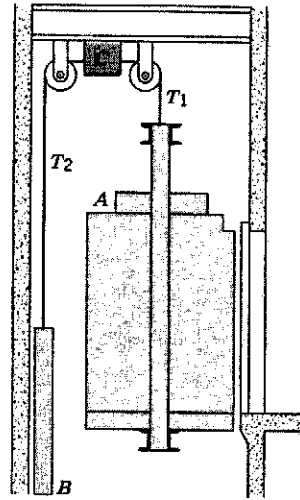
۶۵. جسمی به جرم M روی سطح افقی بدون اصطکاک با طنابی به جرم m کشیده می‌شود (شکل ۴۹). نیروی افقی P بر انتهای طناب وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که طناب، هر چقدر ناچیز، به هر حال باید "شکم بدهد". حالا با فرض ناچیز بودن مقدار خمیدگی طناب، (ب) شتاب طناب و جسم، (ج) نیرویی که طناب بر جسم وارد می‌کند، و (د) کشش طناب در وسط آن را حساب کنید.



شکل ۴۹. مسئله ۶۵

۶۶. شکل ۵۰ بخشی از یک دستگاه "تله‌کابین" را نشان می‌دهد. بیشترین جرم مجاز هر اتاقک با محتوایش 2800 kg است. اتاقکها به یک کابل نگهدارنده سوارند و با کابل دیگری که به دکله متصل است کشیده می‌شوند. اگر اتاقکها با شتاب 1 m/s^2 در امتداد

T_2 در کابل چقدر است و (ج) موتور چه نیرویی به کابل وارد می‌کند؟



شکل ۴۵. مسئله ۶۱

۶۲. هلی‌کوپتری به جرم 15000 kg اتومبیلی به جرم 4500 kg را، با شتاب 1.4 m/s^2 از زمین بلند می‌کند. (الف) نیروی عمودی‌ای را که هوا بر پروانه‌های هلی‌کوپتر وارد می‌کند و (ب) کشش بخش بالایی کابل نگهدارنده را پیدا کنید (شکل ۴۶).

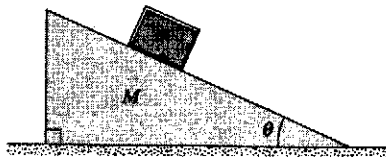


شکل ۴۶. مسئله ۶۲

۶۳. محور قرقره شکل ۴۷ با نیروی F به بالا کشیده می‌شود. فرض کنید قرقره و ریسمان بی‌جرم‌اند و محور هم بدون اصطکاک است. دو جسم، m_1 به جرم 12 kg و m_2 به جرم 19 kg ، به دو سر ریسمانی بسته شده‌اند که از روی قرقره می‌گذرد. جسم m_2 روی زمین است. (الف) نیروی F از چه مقداری بیشتر نباشد تا m_2 روی

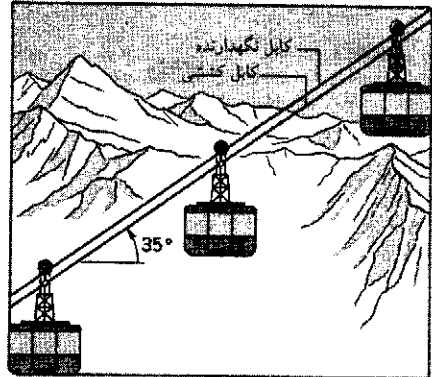
قرقره متصل به آن هم کلاً ۴۳۱b است. وزن طناب ناچیز است. شخص باید با چه نیرویی طناب را بکشد تا بتواند خودش سکوی را با شتاب 1.2 ft/s^2 به بالا حرکت بدهد؟

۶۸. جسمی به جرم m روی گوه قائم‌الزاویه‌ای به جرم M و زاویه شیب θ واقع شده است. گوه روی یک میز افقی قرار دارد (شکل ۵۲). الف) M باید چه شتابی (a) نسبت به میز داشته باشد تا m نسبت به گوه ساکن بماند؟ تماس گوه و جسم را بدون اصطکاک فرض کنید. ب) چه نیروی افقی F باید به این سیستم وارد کرد تا نتیجه الف حاصل شود؟ سطح میز را هم بدون اصطکاک فرض کنید. ج) فرض کنید نیرویی به M وارد نمی‌کنیم و همه سطوح را هم بدون اصطکاک بگیریم. حالا حرکت حاصل را توصیف کنید.



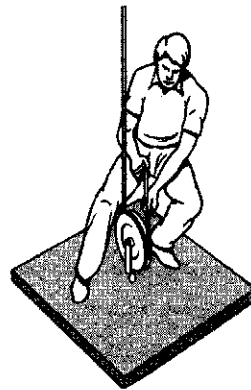
شکل ۵۲. مسئله ۶۸

شیب 35° به بالا کشیده شوند، اختلاف کشش دو قسمت مجاور کابل کشش (در دو طرف اتاچک) چقدر است؟



شکل ۵۰. مسئله ۶۶

۶۷. در شکل ۵۱، وزن شخص ۱۸۰lb است؛ وزن سکوی قرقره



شکل ۵۱. مسئله ۶۷

۶

دینامیک ذرات

در فصل ۵ قوانین نیوتون را معرفی کردیم و مثالهایی از کاربردهایشان ارائه دادیم. این مثالها را مخصوصاً ساده کرده بودیم تا کاربرد قوانین را نشان بدهیم. اما در این روند ساده‌سازی بیش از حد، بخشی از دید فیزیکی از دست می‌رود. مثلاً یکی از مسائل مهم مکانیک، که به ویژه در طراحی سیستمهای مکانیکی وارد می‌شود، مسئله اصطکاک است. در تمام مثالهای فصل ۵ فرض شده بود اصطکاک حضور ندارد.

در این فصل بررسی کاربردهای قوانین نیوتون را ادامه می‌دهیم: نیروهای اصطکاک را معرفی، و آثارشان را مطالعه می‌کنیم. نیروهای متغیر را بررسی می‌کنیم و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان معادلات حرکت وابسته به چنین نیروهایی را حل کرد. سرانجام، نشان می‌دهیم که استفاده از چارچوبهای مرجع نالخت موجب بروز آثاری می‌شود که می‌توان آنها را با وارد کردن نیروهای لختی یا شبه نیروها تحلیل کرد. این نیروها، بر خلاف آنهایی که در فصل ۵ بررسی کردیم، ناشی از جسم خاصی در محیط ذره نیستند.

۱-۶ قوانین نیرو

بیش از اینکه به کاربرد قوانین نیوتون برگردیم، باید مختصری از ماهیت خود نیروها صحبت کنیم. تا اینجا معادلات حرکت را برای تحلیل و محاسبه آثار نیروها به‌کار برده‌ایم، اما این معادلات چیزی درباره علت نیرو نمی‌گویند. برای اینکه بفهمیم که نیرو ناشی از چیست باید درک میکروسکوپی مفصلی از برهم‌کنش اجسام با محیطشان داشته باشیم. به نظر می‌رسد که طبیعت، در بنیادی‌ترین سطح خود، از طریق عده کمی نیروی بنیادی عمل می‌کند. فیزیکدانها به‌طور معمول از چهار نیرو به عنوان نیروهای بنیادی نام می‌برند: ۱. نیروی گرانشی، که ناشی از حضور ماده است (یا، اگر بخواهیم با نظریه نسبیت عام سازگارتر باشیم، منشأ آن ماده و انرژی است)؛ ۲. نیروی الکترومغناطیسی، که شامل برهم‌کنشهای پایه‌ای الکتریکی و مغناطیسی است و پیوند میان اتمها، و ساختار جامدات از آثار آن است؛ ۳. نیروی هسته‌ای ضعیف، که موجب بعضی از فرایندهای واپاشی پرتوزا، و بعضی از واکنشهای میان ذرات بنیادی می‌شود؛ و ۴. نیروی قوی، که بین ذرات بنیادی عمل می‌کند و اجزای هسته را به هم پیوند می‌دهد.

در میکروسکوپی‌ترین مقیاس، مثلاً برای دو پروتونی که درست در کنار هم واقع شده باشند، قدرت نسبی این نیروها به ترتیب عبارت است از: قوی (قدرت نسبی = ۱)؛ الکترومغناطیسی (10^{-2})؛ ضعیف (10^{-7})؛ گرانشی (10^{-38}). در مقیاسهای بنیادی، گرانشی فوق‌العاده ضعیف است و آثار آن قابل چشمپوشی است. با چند آزمایش پیاده

و معمولی می‌توانید متوجه ضعف بودن گرانش بشوید — مثلاً با بلند کردن چند تکه کاغذ به‌وسیله شانه باردار، یا بلند کردن چند سوزن یا گیره کاغذ به‌وسیله یک آهنربای کوچک. نیروی مغناطیسی آهنربای کوچکی می‌تواند بر نیروی گرانشی‌ای که کل زمین بر این اجسام وارد می‌کند غلبه کند!

برای هر چه ساده‌تر کردن این تصویر، فیزیکدانها کوشیده‌اند عده نیروها را از چهار هم کمتر کنند. در سال ۱۹۶۷، نظریه‌ای مطرح شد که طبق آن می‌شود نیروی الکترومغناطیسی و نیروی ضعیف را اجزای یک نیروی واحد، نیروی الکتروضعیف، در نظر گرفت. ترکیب یا وحدت این دو نیرو شبیه است به وحدت نیروهای مجزای الکتریکی و مغناطیسی در قرن نوزدهم، که به نیروی واحد الکترومغناطیسی منجر شد. نظریه‌های جدید دیگری موسوم به نظریه‌های وحدت بزرگ هم ارائه شده‌اند که نیروهای قوی و الکتروضعیف را در یک چارچوب واحد ترکیب می‌کنند، و حتی "نظریه‌های همه‌چیز"ی وجود دارند که می‌خواهند گرانش را هم در این وحدت بگنجانند.

یکی از پیش‌بینیهای چنین نظریه‌هایی آن است که پروتون (ذره هسته‌ای که بار مثبت دارد) پایدار نیست بلکه در مدتی بسیار زیاد، شاید 10^{32} سال، وامی‌باشد. (این زمان خیلی خیلی زیاد است؛ مقایسه کنید با سن عالم که فقط 10^{10} سال است). یکی از راههای آزمودن این نظریه آن است که مجموعه‌ای از 10^{23} پروتون (معادل با مکعبی از آب به ضلع تقریباً ۱۷ متر) را به مدت یک سال مشاهده

باشد، هر محور چرخنده‌ای سرانجام خواهد ایستاد. در اتومبیل، حدود ۲۰٪ توان موتور صرف مقابله با اصطکاک می‌شود. اصطکاک موجب خوردگی و گرفتگی قطعات متحرک می‌شود، و مهندسان تلاش زیادی برای کاهش آن می‌کنند. از طرف دیگر، بدون اصطکاک نمی‌شود راه رفت، نمی‌شود مدادی به دست گرفت، و تازه اگر بشود هم، اصلاً نمی‌شود نوشت؛ حمل و نقل با وسایل چرخدار هم، چنانکه می‌دانیم، غیرممکن می‌شود.

حالا می‌خواهیم که نیروی اصطکاک را برحسب خواص جسم و محیط توصیف کنیم؛ یعنی می‌خواهیم قانون نیروی اصطکاک را بدانیم. در آنچه می‌آید، لغزش (نه غلتش) یک سطح خشک (روغنکاری نشده) را بر سطحی دیگر بررسی می‌کنیم. چنانکه بعداً خواهیم دید، اصطکاک در سطح میکروسکوپی یک پدیده‌ای بسیار پیچیده است. قوانین نیروی اصطکاک لغزشی خشک، ماهیت تجربی دارند و نتایجشان هم تقریبی است. در این قوانین سادگی، دقت، و زیبایی قانون نیروی گرانشی (فصل ۱۶) یا قانون نیروی الکتروستاتیک (فصل ۲۷) وجود ندارد. اما جالب است که از بررسی سطوح بشمار می‌شود که بسیاری از ویژگیهای اصطکاک را به‌طور کیفی می‌توان براساس چند سازوکار ساده فهمید.^۱

جسمی را در نظر بگیرید که روی میزی افقی ساکن است (شکل الف) فزنی به این جسم می‌بندیم که نیروی افقی F لازم برای به حرکت درآوردن آن را بسنجد. اگر نیروی کوچکی به جسم وارد کنیم، خواهیم دید که جسم حرکت نمی‌کند (شکل ب) در این صورت، می‌گوییم که میز هم نیروی اصطکاک مقاوم f را بر جسم وارد می‌کند؛ این نیرو در راستای سطح تماس است. با افزایش نیرویی که اعمال می‌کنیم (شکلهای ج و د) خواهیم دید که نیروی معینی وجود دارد که در آن، جسم از سطح "کنده می‌شود" و شتاب می‌گیرد (شکل ه). پس از شروع حرکت، با کاهش مقدار نیرو خواهیم دید که می‌توان جسم را در حالت حرکت یکنواخت نگه داشت (شکل و). شکل ۱ از نتایج یکی از آزمایشهای سنجش نیروی اصطکاک را نشان می‌دهد. در حدود $t = 2s$ ، اعمال نیرو شروع می‌شود و این نیرو به تدریج افزایش می‌یابد. در این مدت، نیروی اصطکاک هم همراه با F زیاد می‌شود و جسم هنوز ساکن است. در $t = 4s$ ، جسم یکباره شروع به حرکت می‌کند و از آن پس نیروی اصطکاک، مستقل از نیرویی که اعمال می‌شود، ثابت می‌ماند.

نیروی اصطکاک بین سطوحی که نسبت به هم ساکن‌اند، نیروی اصطکاک ایستایی نامیده می‌شود. بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی (متناظر با قله $t = 4s$ در شکل ۱) برابر است با کمترین مقدار نیروی لازم برای اینکه جسم شروع به حرکت کند. با شروع حرکت، نیروی اصطکاک بین سطوح معمولاً کم می‌شود، یعنی نیروی کمتری لازم است تا حرکت یکنواخت را حفظ کند (متناظر با نیروی تقریباً

کنیم و ببینیم که آیا یکی از پروتونه‌های آن وامی‌باشد یا خیر. برای آزمودن چنین نظریه‌های غریبی، این آزمایشها ضروری‌اند، آزمایشهایی که بی‌شبهت به جستجوی یک سوزن در کاهدان نیست. در فصل ۵۶ نسخه طولانی‌تر همین کتاب، در مورد چنین تأملاتی بیشتر صحبت خواهیم کرد.

خوشبختانه برای تحلیل سیستمهای مکانیکی نیازی به استفاده از چنین نظریه‌هایی نداریم. در آنچه درباره سیستمهای مکانیکی معمولی مطالعه می‌کنیم فقط به دو نیرو مربوط می‌شود: گرانش و الکترومغناطیس. نیروی گرانشی به‌طور عمده در جاذبه زمین بر اجسام ظاهر می‌شود، جاذبه‌ای که موجب وزن اجسام می‌شود. جاذبه گرانشی اجسام آزمایشگاهی بر یکدیگر، بسیار ضعیفتر است و تقریباً همیشه می‌توان از آن صرف‌نظر کرد.

همه نیروهای دیگری که معمولاً بررسی‌شان می‌کنیم در نهایت منشأ الکترومغناطیسی دارند: نیروهای تماسی، مثلاً نیروی عمودی که از فشار آوردن جسمی به جسم دیگر ناشی می‌شود و نیروی اصطکاک ناشی از کشیده شدن سطوح اجسام روی یکدیگر است؛ نیروهای چسبندگی، مثلاً مقاومت هوا؛ نیروهای کششی، مثلاً کشش نخ یا طناب؛ نیروهای کشسانی، مثلاً نیروی فنر؛ بسیاری نمونه‌های دیگر، همه از این نوع‌اند. خوشبختانه، در بررسی سیستمهای مکانیکی معمولی می‌توانیم اساس میکروسکوپی را نادیده بگیریم و به جای این زیرساختارهای پیچیده، یک نیروی مؤثر با اندازه و جهت معین اختیار کنیم.

۲-۶ نیروی اصطکاک^۱

اگر جسمی به جرم m را با سرعت اولیه v_0 روی میزی افقی رها کنیم، سرانجام خواهد ایستاد. این یعنی که جسم در طی حرکتش یک شتاب متوسط \bar{a} دارد که در خلاف جهت حرکت است. هر وقت (در چارچوبهای لخت) ببینیم که جسمی شتاب دارد، نیرویی به حرکت جسم وابسته می‌کنیم، که طبق قانون دوم نیوتون تعریف می‌شود. در مورد بالا می‌گوییم که میز، بر جسمی که بر آن می‌لغزد، یک نیروی اصطکاک وارد می‌کند که متوسط آن $m\bar{a}$ است. عموماً منظورمان از اصطکاک، یک برهم‌کنش تماسی بین جامدات است. آثار شبیه به اصطکاک را که در مایعات و گازها ایجاد می‌شوند با اصطلاحات دیگری توصیف می‌کنیم (بخش ۷-۶).

در واقع، هرگاه که سطح جسمی بر سطح جسم دیگری بلغزد، هر جسم یک نیروی اصطکاک به دیگری وارد می‌کند. نیروی اصطکاک وارد بر هر جسم در جهت خلاف حرکت آن نسبت به جسم دیگر است. نیروی اصطکاک، خود به خود با این حرکت نسبی مقابله می‌کند و هیچ‌گاه به آن کمک نمی‌کند. حتی اگر هیچ حرکت نسبی‌ای هم در کار نباشد، ممکن است بین سطوح نیروی اصطکاک وجود داشته باشد.

تا کنون از آثار نیروی اصطکاک چشم پوشیده‌ایم، اما اصطکاک در زندگی روزمره بسیار مهم است. اگر فقط نیروی اصطکاک در کار

۱. یک مرجع عمومی خوب برای اصطکاک، مقاله‌ای است که در دایرة المعارف بریتانیکا، ویراست چهاردهم، در این باره آمده است.

و با نیروی وارد مقابله می‌کند. برای جسمی که روی یک میز افقی ساکن است یا می‌لغزد، اندازه نیروی عمود بر سطح برابر با وزن جسم است. چون جسم شتاب عمودی ندارد، میز باید نیرویی بر آن وارد کرده باشد که به طرف بالا است و اندازه آن با کشش رو به پایین زمین بر جسم، یعنی وزن جسم، برابر است.

نسبت بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی به اندازه نیروی عمودی میان دو سطح را ضریب اصطکاک ایستایی آن سطوح می‌نامند. اگر f_s اندازه نیروی اصطکاک ایستایی باشد، می‌شود نوشت

$$f_s \leq \mu_s N \quad (1)$$

که در آن، μ_s ضریب اصطکاک ایستایی و N اندازه نیروی عمودی است. تساوی فقط وقتی برقرار است که f_s بیشترین مقدارش را داشته باشد. در مورد نیروی اصطکاک جنبشی f_k بین سطوح خشک و روغنکاری شده هم، دو قانون مشابه برقرار است. ۱. نیروی اصطکاک جنبشی، در گستره وسیعی، تقریباً مستقل از مساحت ناحیه تماس دو سطح است. ۲. نیروی اصطکاک جنبشی متناسب با نیروی عمودی است. نیروی اصطکاک جنبشی، تا حدود زیادی از سرعت نسبی سطوح هم مستقل است.

نسبت اندازه نیروی اصطکاک جنبشی به اندازه نیروی عمود بر سطح را ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامند. اگر f_k نماینده اندازه نیروی اصطکاک جنبشی باشد، داریم

$$f_k = \mu_k N \quad (2)$$

که در آن، μ_k ضریب اصطکاک جنبشی است.

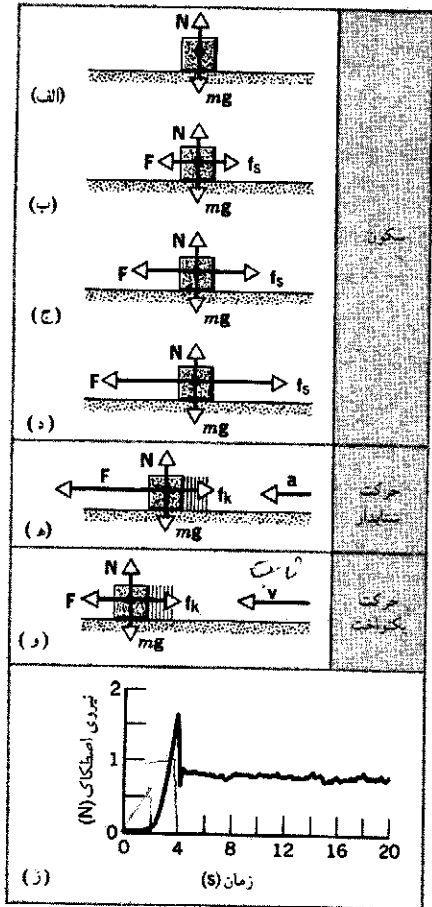
μ_s و μ_k هر دو ثابت بدون بعدند، زیرا نسبت (اندازه) دو نیرو هستند. برای هر زوج سطح، معمولاً $\mu_s > \mu_k$ است. مقادیر واقعی μ_s و μ_k به چگونگی سطوح تماس بستگی دارد. در اغلب موارد می‌توان این دو مقدار را (برای یک زوج سطح معین) در گستره وسیعی از نیروها و سرعت‌هایی که با آنها سروکار داریم، ثابت فرض کرد. هم μ_s و هم μ_k می‌توانند بزرگتر از یک باشند، گرچه معمولاً کوچکتر از یک‌اند. در جدول ۱ مقادیر نوعی μ_s و μ_k برای بعضی مواد آمده است.

دقت کنید که روابط ۱ و ۲ فقط بین اندازه نیروی عمودی و نیروی اصطکاک برقرارند. نیروی اصطکاک و نیروی عمود بر سطح، همواره بر هم عمودند.

۱. برای آشنایی با جزئیات این آزمایش، رجوع کنید به

“Undergraduate Computer-Interfacing Projects,” Joseph Priest and John Snyder, *The Physics Teacher*, May 1987, p. 303.

۲. این دو قانون اصطکاک را ابتدا لئوناردو داوینچی (۱۴۵۲ تا ۱۵۱۹) به‌طور تجربی کشف کرد. بیان لئوناردو از این دو قانون، با توجه به اینکه دو قرن پیش از پرداخت مفهوم نیرو توسط نیوتون بود، کار بسیار مهمی بود. عبارتهای ریاضی قوانین اصطکاک و مفهوم ضریب اصطکاک را بعداً شارل اوگوستین کولن (۱۷۳۶ تا ۱۸۰۶) معرفی کرد. شهرت کولن بیشتر به خاطر مطالعاتش درباره الکتروستاتیک



شکل ۱. (الف تا د) نیروی خارجی F که به جسم ساکن اعمال می‌شود؛ با نیروی اصطکاک f خنثی می‌شود. f با F هم‌اندازه، و در خلاف جهت آن است. با افزایش F ، f هم زیاد می‌شود، تا وقتی که به حداکثر معینی برسد. (ه) در این حالت، جسم “کنده می‌شود” و به طرف چپ شتاب می‌گیرد. (و) اگر بخواهیم که جسم با سرعت ثابت حرکت کند، باید نیروی F را از مقداری که درست پیش از به حرکت درآمدن جسم داشت کمتر کنیم. (ز) نتایج تجربی: نیروی F را، از حدود $t = 2$ s، از مقدار صفر زیاد می‌کنیم، و حرکت تقریباً در زمان $t = 4$ s ناگهان شروع می‌شود.

ثابت در $t > 4$ s در شکل ۱ (ز). نیروی اصطکاک بین سطوح متحرک نسبت به یکدیگر را نیروی اصطکاک جنبشی می‌نامند.

برای بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی بین هر زوج سطح خشک روغنکاری نشده، دو قانون تجربی داریم: ۱. این مقدار، در گستره‌ای وسیع تقریباً مستقل از مساحت ناحیه تماس است و ۲. این مقدار، متناسب با نیروی عمود بر سطح است. ۳. نیروی عمود بر سطح (که گاهی آن را نیروی باز می‌نامند) از خواص کشسانی اجسام در حال تماس با هم ناشی می‌شود (فصل ۱۴). چنین اجسامی هرگز به‌طور کامل صلب نیستند؛ اگر نیرویی بر جسمی وارد شود و جسم نتواند در جهت نیرو حرکت کند، تغییر شکل می‌دهد.

جدول ۱. ضرایب اصطکاک.*

سطوح	μ_s	μ_k
چوب بر چوب	۰٫۵ - ۰٫۲۵	۰٫۲
شیشه بر شیشه	۰٫۹ - ۰٫۱	۰٫۴
فولاد بر فولاد، برای سطوح تمیز	۰٫۶	۰٫۶
فولاد بر فولاد، برای سطوح روغنکاری شده	۰٫۰۹	۰٫۰۵
لاستیک بر بتون خشک	۱٫۰	۰٫۸
چوب اسکی مومزده بر برف خشک	۰٫۰۴	۰٫۰۴
تفلون بر تفلون	۰٫۰۴	۰٫۰۴

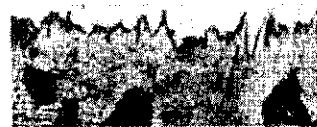
* مقادیر این جدول تقریبی‌اند و فقط برای تخمین مناسب‌اند. مقدار واقعی ضریب اصطکاک هر زوج سطح بستگی به شرایطی از قبیل تمیز بودن سطوح، دما، و رطوبت دارد.

اساس میکروسکوپی اصطکاک (اختیاری)

در مقیاس اتمی، صیقلی‌ترین سطوح هم خیلی با صفحه فرق دارند. مثلاً، شکل ۲ یک نمایه واقعی از سطح فولاد فوق‌العاده صیقلی است، که البته، برای وضوح، خیلی خیلی درشت شده است. به راحتی می‌توان قبول کرد که وقتی دو جسم با هم در تماس باشند، مساحت میکروسکوپی واقعی ناحیه تماس خیلی کمتر از مساحت واقعی سطوح است؛ در مواردی نسبت این دو مساحت می‌تواند حتی یک بر ده هزار باشد.

مساحت (میکروسکوپی) واقعی ناحیه تماس با نیروی عمود بر سطح متناسب است، زیرا نقاط تماس، تحت تنشهای شدیدی که در این نقاط ایجاد می‌شود، مثل مواد پلاستیکی تغییر شکل می‌دهند. در واقع بسیاری از نقاط تماس با هم "جوش سرد" می‌خورند. علت این پدیده، چسبندگی سطحی است: در نقاط تماس مولکولهای دو طرف چنان به هم نزدیک می‌شوند که می‌توانند نیروهای قوی بین مولکولی بر هم وارد کنند.

وقتی جسمی (مثلاً فلزی) روی جسم دیگری کشیده می‌شود، دائماً هزاران جوش کوچک شکسته می‌شود و تماسهای جدیدی برقرار می‌شود (شکل ۳)، و همین پدیده است که موجب مقاومت اصطکاک می‌شود. آزمایش با ردیابهای پرتوزایی نشان داده است که در این عمل شکستن جوشها، مقادیر کوچکی از یک سطح فلزی می‌تواند کنده شود و به سطح دیگر بچسبند. اگر سرعت نسبی سطوح به قدر کافی



شکل ۲. نمایه بزرگ‌شده یک سطح فولادی بسیار صیقلی. ابعاد قائم بی‌نظمیهای سطح، چند هزار برابر قطر اتم است. برش طوری مایل انجام گرفته که مقیاس عمودی ۱۰ برابر مقیاس افقی بزرگ شده است.

زیاد باشد، ممکن است فلز در محل بعضی از نقاط تماس ذوب شود، اگرچه خود سطح در کل فقط کمی گرم می‌شود. همین رویدادهای "چسبیدن و لغزیدن" اند که موقع مالش سطوح بر یکدیگر تولید صدا می‌کنند؛ مثل جیرجیر گچ روی تخته سیاه.^۱

ضریب اصطکاک به متغیرهای زیادی بستگی دارد، از جمله جنس مواد، پرداخت سطوح، لایه‌های سطحی، دما، و میزان ناخالصی. مثلاً، اگر دو سطح فلزی بسیار تمیز را در اتاقکی با خلأ شدید بگذاریم تا لایه سطحی اکسید نتواند تشکیل شود، ضریب اصطکاک بسیار زیاد می‌شود و دو سطح در واقع محکم به هم "جوش می‌خورند". اگر کمی هوا وارد اتاقک کنیم، روی سطوح لایه اکسید تشکیل می‌شود و ضریب اصطکاک کم می‌شود و به مقدار "عادی" اش می‌رسد.

نیروی اصطکاک که مانع غلتیدن اجسام بر هم می‌شود، خیلی کمتر از اصطکاک لغزشی است؛ همین است که موجب مزیت چرخ بر سورتیه می‌شود. علت عمده کاهش اصطکاک این است که در غلتش، جوشهای سطحی میکروسکوپی از هم کنده و برداشته می‌شوند، در حالی که در لغزش، جوشها کشیده و بریده می‌شوند. چنین است که نیروی اصطکاک غلتشی چندین بار کوچکتر است.

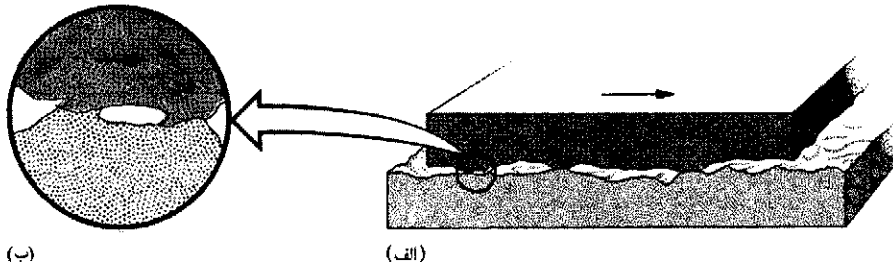
مقاومت اصطکاک در اصطکاک لغزشی خشک را با روغنکاری می‌توان به مقدار قابل توجهی کم کرد. یک نقاشی بر دیوار غاری در مصر، که زمان آن در حدود ۱۹۰۰ پیش از میلاد است، مجسمه سنگی بزرگی را نشان می‌دهد که روی سورتیه‌های کشیده می‌شود، و مردی در جلوی آن، روی مسیر روغن می‌ریزد. روش مؤثرتری هم وجود دارد و آن اینکه لایه‌ای از گاز بین سطوح لغزنده قرار بدهند. ریل‌های آزمایشگاه و یاتاقان سوار بر "بالمشک گاز" دو نمونه از موارد استفاده این روش‌اند. با معلق نگهداشتن اجسام به کمک نیروهای مغناطیسی، اصطکاک را از این هم می‌شود کمتر کرد. قطارهایی که (اخیراً ساخته می‌شوند) با استفاده از میدان مغناطیسی به حالت تعلیق در می‌آیند، قابلیت حرکت بسیار سریع و تقریباً بدون اصطکاک را دارند.

مثال ۱. جسمی روی سطح شیب‌داری که با سطح افقی زاویه θ می‌سازد ساکن است (شکل ۴ الف). با زیاد کردن زاویه شیب، درمی‌یابیم که درست در $\theta_s = 15^\circ$ لغزش شروع می‌شود. ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و سطح شیب‌دار چقدر است؟

حل: نیروهای وارد بر جسم، که آن را ذره در نظر می‌گیریم، در شکل ۴ ب نشان داده شده است. وزن جسم mg ، نیروی عمودی وارد بر جسم از سطح شیب‌دار N ، و نیروی اصطکاک وارد بر جسم از سطح شیب‌دار f_s است. توجه کنید که نیروی برابند وارد بر جسم از سطح شیب‌دار، $N + f_s$ ، دیگر بر سطح تماس عمود نیست (برخلاف حالتی که سطح بدون اصطکاک بود). چون جسم ساکن است، از قانون دوم

۱. می‌توانید رجوع کنید به

"Stick and Slip," Ernest Rabinowicz in *Scientific American*, May 1956, p. 109.



شکل ۳. سازوکار اصطکاک لغزشی. (الف) سطح رویی، در این نمای بزرگ، روی سطح زیری به طرف راست می‌لغزد. (ب) تصویر بزرگ شده‌ای که دو نقطه جوش سرد را نشان می‌دهد. برای شکستن این جوشها و ادامه حرکت، نیرو لازم است.

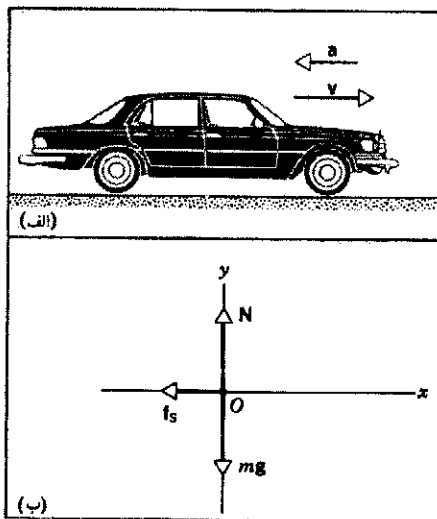
روی کتابتان به پایین می‌لغزد تعیین کنید.

مثال ۲. اتومبیلی با سرعت v_0 روی جاده افقی مستقیمی حرکت می‌کند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیک و جاده μ_s باشد، کمترین مسافت لازم برای توقف اتومبیل چقدر است؟
حل: شکل ۵ نیروهای وارد بر اتومبیل را نشان می‌دهد. فرض می‌کنیم اتومبیل در جهت مثبت x حرکت می‌کند. اگر f_s را ثابت بگیریم، حرکت با شتاب ثابت کند می‌شود.
از رابطه

$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$$

با انتخاب مکان اولیه $x_0 = 0$ و سرعت نهایی $v = 0$ ، نتیجه می‌شود که

$$x = -\frac{v_0^2}{2a}$$



شکل ۵. مثال ۲. (الف) اتومبیلی با شتاب کندکننده. (ب) نمودار جسم آزاد اتومبیل با شتاب کندکننده، که به عنوان ذره در نظر گرفته می‌شود. برای سادگی، نقطه اثر همه نیروها را در یک جا می‌گیریم: در واقع، سه نیرویی که در شکل مشخص شده‌اند، مجموع نیروهایی هستند که بر هر یک از چهار

نیوتون نتیجه می‌شود که $\sum \mathbf{F} = 0$. نیروها را به مؤلفه‌های x و y (به ترتیب، در راستای سطح شیبدار و عمود بر آن) تجزیه می‌کنیم. نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} \text{برای مؤلفه } x: \quad \sum F_x = f_s - mg \sin \theta = 0 \\ f_s = mg \sin \theta \\ \text{برای مؤلفه } y: \quad \sum F_y = N - mg \cos \theta = 0 \\ N = mg \cos \theta \end{aligned}$$

در زاویه θ_s ، که لغزش شروع می‌شود، f_s بیشترین مقدارش را دارد و برابر است با $\mu_s N$. مقادیر بالا را به‌ازای θ_s به‌دست می‌آوریم و بر هم تقسیم می‌کنیم. نتیجه می‌شود

$$\frac{f_s}{N} = \frac{mg \sin \theta_s}{mg \cos \theta_s} = \tan \theta_s$$

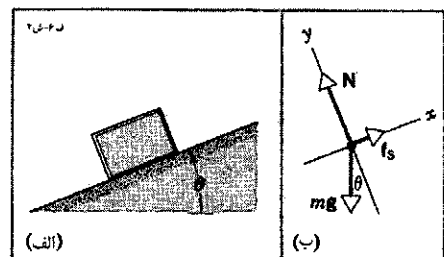
یا

$$\mu_s = \tan \theta_s = \tan 15^\circ = 0.27$$

بنابراین، سنجش زاویه‌ای که لغزش از آن آغاز می‌شود، روش تجربی ساده‌ای برای تعیین ضریب اصطکاک ایستایی بین سطوح است. توجه کنید که نتیجه کار مستقل از وزن جسم است.
با استدلال مشابهی می‌توانید نشان بدهید که زاویه سطح شیبدار θ_k ، که به‌ازای آن جسم (که قبلاً با ضربه کوچکی به‌راه افتاده است) با سرعت ثابت به پایین می‌لغزد، از رابطه زیر به‌دست می‌آید:

$$\mu_k = \tan \theta_k$$

که $\theta_k < \theta_s$ است. به کمک خط‌کش می‌شود تانژانت زاویه شیب را اندازه گرفت؛ به این ترتیب، می‌توانید μ_k و μ_s را برای سکه‌ای که از



شکل ۴. مثال ۱. (الف) جسمی که روی سطح شیبدار ناهمواری ساکن است. (ب) نمودار جسم آزاد این جسم.

عقب را سنگین تر کنند، یعنی مثلاً صندوق عقب را بار می‌کنند تا ایمنی رانندگی بیشتر شود. این تجربه را چگونه می‌توان با نتیجه ما - مینی بر مستقل از جرم بودن مسافت توقف سازگار کرد؟ (راه‌نمایی: مسئله ۲ را ببینید.)

مثال ۳. مثال ۱۰ فصل ۵ را تکرار کنید، اما این بار نیروی اصطکاک میان جسم ۱ و سطح شیبدار را هم در نظر بگیرید. مقادیر $\mu_s = 0.24$ و $\mu_k = 0.15$ را به کار ببرید.

حل: اگر فرض کنیم، چنانکه در مثال ۱۰ فصل ۵ دیدیم، جسم ۱ از سطح شیبدار به پایین می‌لغزد، نیروی اصطکاک به طرف بالای سطح شیبدار است. شکل ۶ نمودار جسم-آزاد m_1 را نشان می‌دهد. در این حالت، معادلات مؤلفه‌ای قانون دوم نیوتون برای m_1 عبارت‌اند از

$$\begin{aligned} \sum F_x &= T + f - m_1 g \sin \theta = m_1 a_{1x} = -m_1 a \\ \sum F_y &= N - m_1 g \cos \theta = m_1 a_{1y} = 0 \end{aligned}$$

در اینجا صریحاً این انتظار را که a_1 باید در جهت منفی x باشد (یعنی $a_{1x} = -a$)، وارد کرده‌ایم. در معادله مربوط به m_2 هم تغییر مشابهی می‌دهیم:

$$\sum F_y = m_2 g - T = m_2 a_{2y} = -m_2 a$$

گذاشته‌ایم $a_{2y} = -a$ ، زیرا انتظار داریم جسم ۲ در جهت منفی y حرکت کند.

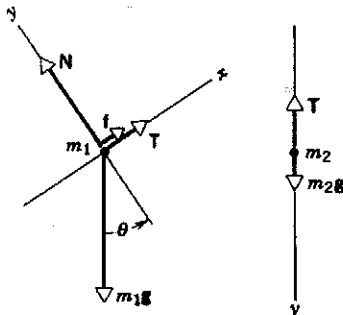
با استفاده از $f = \mu_k N = \mu_k m_1 g \cos \theta$ ، از مؤلفه x معادله m_1 نتیجه می‌شود که

$$T + \mu_k m_1 g \cos \theta - m_1 g \sin \theta = -m_1 a$$

دو معادله اخیر را با هم حل می‌کنیم، و مجهولهای T و a را به دست می‌آوریم:

$$a = -g \frac{m_2 - m_1(\sin \theta - \mu_k \cos \theta)}{m_1 + m_2} \quad (3)$$

$$T = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} (1 + \sin \theta - \mu_k \cos \theta) \quad (4)$$



شکل ۶. مثال ۳. نمودارهای جسم-آزاد شکل ۲۰ فصل ۵، با در نظر گرفتن اصطکاک د. استاء، سطح شیبدار.

x مسافت توقف است، که طی آن سرعت از v_0 به 0 می‌رسد. چون a منفی است، x چنان که انتظار می‌رود، مثبت است. برای تعیین a ، قانون دوم نیوتون را برای مؤلفه‌های شکل ۵ ب به کار می‌بریم:

$$\text{مؤلفه } x: \sum F_x = -f_s = ma \quad \text{یا} \quad a = -f_s/m$$

$$\text{مؤلفه } y: \sum F_y = N - mg = 0 \quad \text{یا} \quad N = mg$$

بنابراین

$$f_s = \mu_s N = \mu_s mg$$

این مقادیر را در عبارت a جایگذاری می‌کنیم، نتیجه می‌شود که

$$a = -\frac{f_s}{m} = -\mu_s g$$

به این ترتیب، مسافت توقف برابر است با

$$x = -\frac{v_0^2}{2a} = \frac{v_0^2}{2\mu_s g}$$

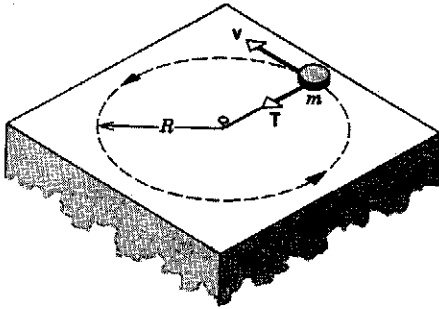
هر چه سرعت اولیه بیشتر باشد، مسافت بیشتری برای توقف لازم است؛ در واقع، این مسافت با مجذور سرعت اولیه متناسب است. همچنین، هر چه ضریب اصطکاک میان سطوح بیشتر باشد، مسافت کمتری برای توقف لازم است.

در این مثال ضریب اصطکاک ایستایی را به کار بردیم نه ضریب اصطکاک جنبشی را، زیرا فرض کرده‌ایم که لاستیکها روی جاده نمی‌لغزند. به علاوه، فرض کرده‌ایم که بیشترین مقدار نیروی اصطکاک ایستایی ($f_s = \mu_s N$) وارد می‌شود، زیرا می‌خواسته‌ایم کمترین مسافت توقف را پیدا کنیم. اگر نیروی اصطکاک ایستایی کوچکتر باشد، روشن است که مسافت توقف بیشتر می‌شود. روش صحیح ترمز کردن برای توقف در کمترین مسافت، آن است که حرکت اتومبیل را درست در آستانه لغزش نگه داریم. (اتومبیل‌های مجهز به سیستم ضد قفل ترمز، خود به خود چنین وضعیتی را فراهم می‌کنند.) اگر سطح جاده صاف باشد و پدال ترمز را تا ته فشار بدهیم، ممکن است لغزش رخ بدهد. در این حالت، μ_k جانشین μ_s می‌شود و مسافت لازم برای توقف بیشتر می‌شود، زیرا μ_k از μ_s کوچکتر است.

به عنوان مثالی مشخص، اگر $v_0 = 60 \text{ mi/h} = 27 \text{ m/s}$ و $\mu_s = 0.6$ باشد (که معمولاً هم در همین حدود است) نتیجه می‌شود

$$x = \frac{v_0^2}{2\mu_s g} = \frac{(27 \text{ m/s})^2}{2(0.6)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 62 \text{ m}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم اتومبیل است. در اتومبیل‌هایی که موتورشان در جلوست ولی نیرو را به چرخ عقب منتقل می‌کنند، هنگام رانندگی در جاده‌های برفی اغلب سعی می‌کنند "چرخهای



شکل ۷. قرصی به جرم m با سرعت ثابت در مسیری دایره‌ای بر سطح افقی بدون اصطکاکی حرکت می‌کند. تنها نیروی افقی وارد بر قرص کشش T است که ریسمان با آن قرص را می‌کشد؛ همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت دایره‌ای است. نیروهای عمودی (mg و N) را در شکل نشان نداده‌ایم.

جهتش مدام تغییر می‌کند. می‌توانید به شکل ۱۱ فصل ۴ برگردید؛ این شکل رابطه برداری بین v و a در حرکت دایره‌ای با سرعت ثابت را نشان می‌دهد.

طبق قانون دوم نیوتون ($\sum F = ma$) بر هر جسم شتابداری باید نیروی خالصی اثر کند. بنابراین (با فرض اینکه در یک چارچوب لخت قرار داریم)، اگر مشاهده کنیم که جسمی حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد، می‌توانیم مطمئن باشیم که اندازه نیروی خالص $\sum F$ وارد بر آن از رابطه زیر تبعیت می‌کند:

$$\left| \sum F \right| = ma = \frac{mv^2}{r} \quad (5)$$

این جسم در حالت تعادل نیست زیرا نیروی خالص وارد بر آن صفر نیست. جهت نیروی خالص $\sum F$ در هر لحظه، باید با جهت a در همان لحظه یکی باشد؛ یعنی شعاعی و مرکزگرا. این نیرو را عامل (یا عوامل) خارجی، که در محیط جرم m واقع شده است، بر آن وارد می‌کند.

اگر جسمی که حرکت دایره‌ای یکنواخت دارد قرصی باشد که به سر ریسمانی بسته شده است و روی میزی افقی و بدون اصطکاک حرکت می‌کند (شکل ۷)، نیروی خالص وارد بر قرص را کشش T ریسمان تأمین می‌کند. این نیرو به قرص شتاب می‌دهد و جهت سرعت آن را به طور پیوسته تغییر می‌دهد. به این ترتیب است که قرص می‌تواند روی دایره حرکت کند. جهت T همواره به طرف میخی است که در مرکز دایره است، و اندازه آن باید برابر با mv^2/R باشد.

اگر ریسمان را قطع کنیم، دیگر نیروی خالصی وجود ندارد که بر قرص اثر کند. در این صورت، قرص با سرعت ثابت روی یک خط راست، در جهت مماس بر دایره در نقطه‌ای که از قید ریسمان رها شده است، حرکت خواهد کرد. این قرص در راستای شعاع از مرکز دور نمی‌شود، روی مسیر خمیده‌ای هم پیش نمی‌رود، بلکه دقیقاً روی v در لحظه بریدن ریسمان، حرکت می‌کند.

توجه کنید که در حد $\mu_k \rightarrow 0$ ، معادلات ۳ و ۴ به معادلات ۹ و ۱۰ مثال ۱۰ فصل ۵ تبدیل می‌شوند (تنها علامت a فرق می‌کند زیرا در این مورد آن را در خلاف جهت قبلی گرفته‌ایم). مقدار عددی a و T را به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} a &= (-9.80 \text{ m/s}^2) \\ &\times \frac{2.6 \text{ kg} - 9.5 \text{ kg}(\sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ)}{2.6 \text{ kg} + 9.5 \text{ kg}} \\ &= 1.2 \text{ m/s}^2 \\ T &= \frac{(9.5 \text{ kg})(2.6 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)}{9.5 \text{ kg} + 2.6 \text{ kg}} \\ &\times (1 + \sin 34^\circ - 0.15 \cos 34^\circ) \\ &= 29 \text{ N} \end{aligned}$$

مثبت بودن a با طرح اولیه ما برای معادلات سازگار است؛ جسم به طرف پایین سطح شیبدار حرکت می‌کند، همان‌طور که در مثال ۱۰ فصل ۵ حرکت می‌کرد، اما شتاب آن از شتاب بدون اصطکاک (که 2.2 m/s^2 بود) کمتر است.

کشش ریسمان کمتر از حالت بدون اصطکاک (31 N) است. جسم ۱، در حضور اصطکاک با شتاب کمتری به پایین سطح شیبدار می‌رود؛ بنابراین، ریسمان متصل به جرم ۲ را با شدت کمتری می‌کشد. پرسش دیگری که باید پاسخ بدهیم این است که اصولاً آیا سیستم حرکت می‌کند یا خیر. یعنی، آیا نیروی کافی برای غلبه بر اصطکاک ایستایی و شروع حرکت وجود دارد؟ اگر سیستم ابتدا در حالت سکون باشد، کشش ریسمان برابر با وزن m_2 ، یعنی $26 \text{ N} = (2.6 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)$ است. بیشترین مقدار اصطکاک ایستایی، که با تمایل جسم ۱ برای حرکت به پایین سطح شیبدار مخالفت می‌کند، $\mu_s N = \mu_s m_1 g \cos \theta = 19 \text{ N}$ است. مؤلفه وزن m_1 در جهت پایین سطح شیبدار $m_1 g \sin \theta = 52 \text{ N}$ است. بنابراین، مؤلفه وزن در جهت پایین سطح شیبدار (52 N) بیش از مقدار لازم برای غلبه بر مجموع نیروهای کشش و اصطکاک ایستایی ($26 \text{ N} + 19 \text{ N} = 45 \text{ N}$) است، و سیستم واقعاً حرکت می‌کند. خودتان باید بتوانید نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک ایستایی از ۰.۳۴ بیشتر باشد، حرکتی در کار نخواهد بود.

۳-۶ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

در بخش ۴-۴ دیدیم جسمی که با سرعت ثابت v روی دایره یا کمانی به شعاع r حرکت می‌کند، شتاب مرکزگرای a دارد که اندازه آن v^2/r است. a همواره در راستای شعاع و جهت آن به طرف مرکز دایره است. بنابراین، a یک بردار متغیر است، زیرا، اگر

نتیجه می‌دهد که

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{T} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

روشن است که نیروی خالص وارد بر جسم مخالف صفر است، و باید هم این‌طور باشد زیرا نیروی لازم است تا جسم بتواند با سرعت ثابت روی دایره حرکت کند.

\mathbf{T} را، در هر لحظه، به دو مؤلفه شعاعی و عمودی تجزیه می‌کنیم:

$$T_z = T \cos \theta \quad \text{و} \quad T_r = -T \sin \theta$$

اگر جهت شعاعی مثبت را به طرف خارج محور تعریف کنیم، مؤلفه شعاعی منفی می‌شود.

چون جسم شتاب عمودی ندارد، مؤلفه z قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_z = T_z - mg = 0$$

با

$$T \cos \theta = mg$$

شتاب شعاعی $a_r = -v^2/R$ است؛ علامت منفی به‌خاطر آن است که شتاب به طرف داخل است (یعنی در خلاف جهت \mathbf{r} ، که به عنوان جهت شعاعی مثبت گرفته‌ایم). این شتاب را T_r (مؤلفه شعاعی \mathbf{T}) تأمین می‌کند، که همان نیروی مرکزگرای وارد بر m است. بنابراین، از مؤلفه شعاعی قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_r = T_r = ma_r$$

یا

$$-T \sin \theta = -mv^2/R$$

از تقسیم معادلات مؤلفه‌های شعاعی و z برهم، نتیجه می‌شود که

$$\frac{-T \sin \theta}{T \cos \theta} = \frac{-mv^2/R}{mg}$$

v را از این معادله به‌دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{Rg \tan \theta}$$

از این رابطه، سرعت ثابت جسم به‌دست می‌آید. t را زمان یک گردش کامل جسم می‌گیریم، نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{2\pi R}{t}$$

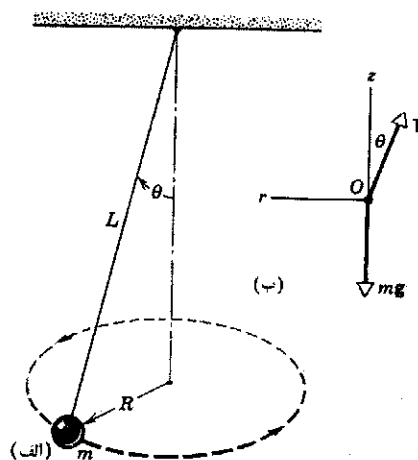
بنابراین، برای اینکه قرص روی دایره حرکت کند، باید نیرویی باشد تا آن را به طرف مرکز دایره، بکشد. نیرویی را که موجب حرکت دایره‌ای یکنواخت می‌شود نیروی مرکزگرا می‌نامند، زیرا جهت این نیرو "به طرف مرکز" دایره حرکت است؛ اما باید توجه داشت که نام "مرکزگرا" برای نیرو، تنها به این معنی است که جهت آن شعاعی و به طرف داخل است؛ این اسم، هیچ چیز درباره ماهیت نیرو یا جسمی که آن را وارد می‌کند نمی‌گوید: در مورد قرص گردان شکل ۷، نیروی مرکزگرا یک نیروی کششی است که ریسمان آن را فراهم می‌کند؛ در مورد ماه که به دور زمین می‌گردد، نیروی مرکزگرا کشش گرانشی زمین بر ماه است؛ در مورد الکترونی که به دور هسته اتم می‌گردد، نیروی مرکزگرا از نوع الکتروستاتیک است. نیروی مرکزگرا نوع جدیدی از نیرو نیست، بلکه عبارتی برای توصیف رفتار زمانی بعضی نیروهاست، که همه آنها را می‌توان به اجسام معینی در محیط جسم منسوب کرد. نیرو می‌تواند مرکزگرا و اصطکاک، مرکزگرا و گرانشی، مرکزگرا و الکتروستاتیک، یا مرکزگرا و هر نوع دیگری باشد.

حالا چند نمونه از نیروهایی را که مرکزگرا عمل می‌کنند بررسی می‌کنیم.

آونگ مخروطی

شکل ۸ جسم کوچکی به جرم m را نشان می‌دهد که به سر ریسمانی به طول L بسته شده است و با سرعت ثابت v روی دایره‌ای افقی می‌گردد. با حرکت جسم، ریسمان سطح جانبی یک مخروط فرضی را می‌روید. این وسیله را آونگ مخروطی می‌نامند. می‌خواهیم زمان یک دورگردش کامل جسم را به‌دست بیاوریم.

اگر زاویه ریسمان با راستای عمودی θ باشد، شعاع مسیر دایره‌ای $R = L \sin \theta$ است. نیروهای وارد بر جسم عبارت‌اند از وزن جسم mg و کشش ریسمان \mathbf{T} (شکل ۸ ب). به این ترتیب، قانون دوم نیوتون



شکل ۸. آونگ مخروطی (الف) جسمی به جرم m که از ریسمانی به طول L آویزان است، روی دایره حرکت می‌کند؛ ریسمان مخروط قائمی با نیم‌زاویه θ می‌سازد. (ب) نمودار جسم آزاد جسم.

هم، مانند محاسبه قبل، نیروها را به مؤلفه‌های شعاعی و قائم تجزیه می‌کنیم. جهت مثبت محور z را رو به بالا می‌گیریم؛ اگر قرار باشد شخص نیفتد، در راستای z نباید شتابی داشته باشیم. از مؤلفه z قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = f_s - mg = ma_z = 0$$

شعاع گردونه را R و سرعت مماسی شخص را v می‌گیریم. شتاب شعاعی شخص $-v^2/R$ است؛ بنابراین، مؤلفه شعاعی قانون دوم نیوتون را می‌توان چنین نوشت

$$\sum F_r = -N = ma_r = \frac{-mv^2}{R}$$

توجه کنید که، در این مورد، N همان نیروی مرکزگراست. اگر μ_s ضریب اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره باشد، برای اینکه درست در آستانه لغزش باشیم، باید $f_s = \mu_s N$ باشد. پس می‌توانیم بنویسیم

$$f_s = mg = \mu_s N = \frac{\mu_s mv^2}{R}$$

یا

$$v = \sqrt{\frac{gR}{\mu_s}} \quad (7)$$

این معادله، ضریب اصطکاک لازم برای جلوگیری از لغزش را به سرعت مماسی جسمی که واقع بر دیواره است مربوط می‌کند. توجه کنید که این نتیجه بستگی به وزن شخص ندارد.

عملاً، ضریب اصطکاک بین پارچه لباس شخص و دیواره گردونه (با روکشی از جنس کرباس) در حدود 0.4 است. شعاع گردونه هم، نوعاً 2.0 m است؛ بنابراین، v باید حداقل در حدود 7.0 m/s باشد. محیط مسیر دایره‌ای $12.6\pi \text{ m}$ است؛ با سرعت 7.0 m/s طی یک دور کامل $t = 12.6\pi \text{ m} / (7.0 \text{ m/s}) = 5.8 \text{ s}$ طول می‌کشد. بنابراین، آهنگ دوران گردونه باید $0.56 \text{ دور/s} = 33 \text{ rpm}$ یا در حدود 33 rpm باشد، که همان سرعت چرخش گرامافونهای معمولی است.

پیچ با شیب عرضی

فرض کنید که جسم شکل 11° الف اتومبیل یا قطاری است که با سرعت ثابت v در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند و در پیچی به شعاع R خمش R می‌پیچد. علاوه بر دو نیروی قائم، یعنی وزن mg و نیروی عمودی N ، یک نیروی افقی P هم باید بر اتومبیل وارد شود. نیروی P همان نیروی مرکزگرای لازم برای حرکت بر دایره است. در مورد اتومبیل، این نیرو از اصطکاک جانبی‌ای که جاده بر چرخها اعمال می‌کند تأمین می‌شود؛ در مورد قطار، نیرو را ریل بر لبه‌های درونی چرخها وارد می‌کند. در

$$t = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg \tan \theta}} = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g \tan \theta}}$$

اما $R = L \sin \theta$ است، پس

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{L \cos \theta}{g}} \quad (6)$$

این معادله، رابطه بین t ، L ، و θ را به دست می‌دهد. توجه کنید که t ، که دوره تناوب حرکت نامیده می‌شود، به m بستگی ندارد.

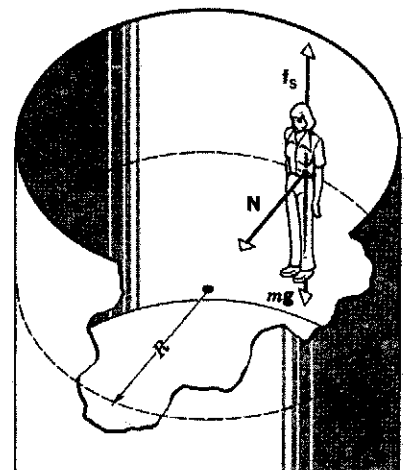
اگر $L = 1.2 \text{ m}$ و $\theta = 25^\circ$ باشد، دوره یا زمان تناوب حرکت چقدر می‌شود؟ از رابطه بالا داریم

$$t = 2\pi \sqrt{\frac{(1.2 \text{ m})(\cos 25^\circ)}{9.8 \text{ m/s}^2}} = 2.1 \text{ s}$$

گردونه

در بسیاری از پارکهای تفریحی وسیله‌ای به نام گردونه وجود دارد. گردونه فضای استوانه‌ای توخالی‌ای است که می‌شود آن را حول محور قائم مرکزی استوانه به چرخش درآورد. شخص وارد گردونه می‌شود، در آنجا می‌بندد، و کنار دیواره می‌ایستد. گردونه شروع به چرخیدن می‌کند، و به تدریج سرعتش زیاد می‌شود. در یک سرعت معین، "کف" زیرپای شخص به پایین می‌رود و حفره عمیقی زیرپای او ظاهر می‌شود. این شخص البته نمی‌افتد، بلکه "مبخکوب" به دیواره گردونه باقی می‌ماند. کمترین سرعت گردونه که می‌تواند شخص را میخکوب نگه دارد چقدر است؟

شکل ۹ نیروهای وارد بر شخص را نشان می‌دهد. وزن شخص mg است، نیروی اصطکاک ایستایی میان شخص و دیواره گردونه f_s است، و N نیروی عمود بر سطحی است که دیواره بر شخص وارد می‌کند. (خواهیم دید که همین نیرو، نیروی مرکزگرای لازم است.) اینجا



شکل ۹. گردونه. نیروهای وارد بر شخص مشخص شده است.

و از تقسیم این دو معادله بر هم نتیجه می‌شود

$$\tan \theta = v^2 / Rg \quad (\lambda)$$

توجه کنید که زاویه مناسب شیب بستگی به سرعت اتومبیل و خمش جاده دارد و مستقل از جرم اتومبیل است؛ یعنی در یک شیب مناسب برای یک سرعت معین، انواع اتومبیلها می‌توانند با ایمنی حرکت کنند. شیب عرضی جاده را، برای یک خمش معین، براساس سرعت متوسطی که انتظار می‌رود طرح می‌کنند. معمولاً سر هر پیچ علامتی وجود دارد که سرعت مناسب، یعنی سرعتی را که شیب عرضی برای آن طرح شده است، مشخص می‌کند. اگر سرعت اتومبیل از این مقدار بیشتر شود، نیروی مرکزگری اضافی را باید اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین کند تا بتوان پیچ را به سلامت طی کرد.

فرمول شیب عرضی را در حالت‌های حدی $v, R \rightarrow \infty, v = 0$ بزرگ، و R کوچک بررسی کنید. به این هم توجه کنید که اگر معادله λ را برای v حل کنیم، همان نتیجه‌ای حاصل می‌شود که برای سرعت وزنه آونگ مخروطی به‌دست آمد. شکل‌های λ و 1° را با هم مقایسه کنید و به شباهت‌هایشان توجه کنید.

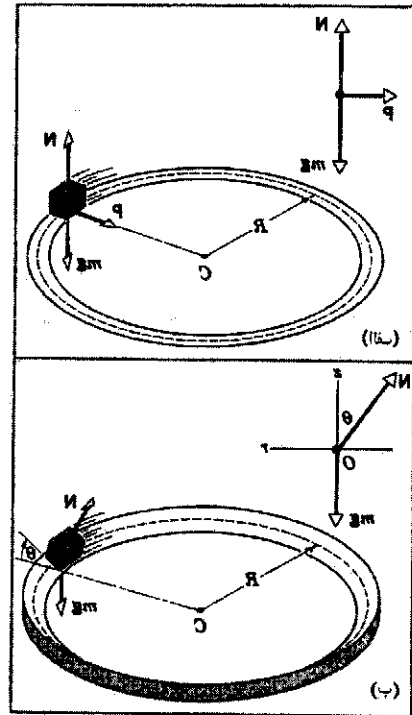
۴-۶ معادلات حرکت: نیروهای ثابت و متغیر^۱

بباید، به‌طور خلاصه، پیشرفت‌هایمان را در مطالعهٔ دینامیک و سینماتیک مرور کنیم. هدف نهایی آن است که حرکت ذره‌ای را که تحت تأثیر چند نیروست توصیف کنیم، طرح این تحلیل را (در یک‌بعد) می‌توان چنین نشان داد:

$$\sum F \rightarrow a \rightarrow x(t), v(t)$$

منظور این است که با استفاده از قوانین نیوتون (که در فصل ۵ بررسی شد)، شتاب هر ذره را از نیروی خالص وارد بر آن به‌دست می‌آوریم. مرحلهٔ بعد، مرحله‌ای ریاضی است که در آن مکان و سرعت را (در هر زمان t) از مکان و سرعت اولیه و شتاب محاسبه می‌کنیم. به‌استثنای حرکت دایره‌ای که در بخش قبلی مطالعه شد، تا به حال فقط نیروهای ثابت را بررسی کرده‌ایم (یعنی نیروهایی که مستقل از زمان، سرعت، یا مکان‌اند). اگر نیرو ثابت باشد، شتاب هم ثابت است، و در حالت شتاب ثابت در یک‌بعد، $v(t)$ و $x(t)$ به‌راحتی به‌دست می‌آیند؛ همان‌طور که در بخش ۲-۶ دیدیم. به این ترتیب، نیروهای ثابت را به‌طور کامل تحلیل کردیم.

اگر نیرو ثابت نباشد، باز هم می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون شتاب را به‌دست بیاوریم اما دیگر نمی‌توانیم فرمولهای شتاب ثابت بخش ۲-۶ را برای محاسبهٔ $v(t)$ و $x(t)$ به‌کار ببریم. در این مورد باید از روشهایی شامل حساب انتگرال استفاده کنیم.



شکل ۱۰. (الف) جادهٔ افقی. نمودار جسم-آزاد یک جسم متحرک در طرف چپ شکل آمده است. نیروی مرکزگرا باید از اصطکاک میان چرخها و جاده تأمین شود. (ب) جادهٔ با شیب عرضی. برای پیچیدن ایمن در پیچ، اصطکاک ضرورتی ندارد.

مقدارشان کافی است، و هر دو نیرو هم باعث فرسایش غیر ضروری لاستیکها یا چرخها می‌شوند. به همین دلیل، مسیر را در پیچها با شیب عرضی می‌سازند؛ (شکل ۱۰ ب). در این صورت، نیروی عمودی N ، هم مثل حالت قبل یک مؤلفهٔ عمودی دارد، و هم یک مؤلفهٔ افقی که نیروی مرکزگری لازم برای حرکت دایره‌ای یکنواخت را تأمین می‌کند. به این ترتیب، در مسیرهایی که به‌طور مناسب برای عبور وسایل نقلیه با سرعت معین طراحی شده باشند، نیروی جانبی دیگری لازم نیست. برای محاسبهٔ زاویهٔ مناسب θ ، در غیاب اصطکاک، می‌توانیم چنین عمل کنیم: طبق معمول، با قانون دوم نیوتون شروع می‌کنیم و به نمودار جسم-آزاد شکل ۱۰ ب برمی‌گردیم. شتاب قائم نداریم؛ بنابراین برای مؤلفهٔ قائم نتیجه می‌شود که

$$\sum F_z = N \cos \theta - mg = ma_z = 0$$

مؤلفهٔ شعاعی نیروی عمود بر سطح $N \cos \theta$ است، و مؤلفهٔ شعاعی شتاب $-v^2/R$. بنابراین، از مؤلفهٔ شعاعی قانون دوم نیوتون خواهیم داشت

$$\sum F_r = -N \sin \theta = ma_r = -mv^2/R$$

۱. بخشهای ۴-۶ تا ۷-۶ شامل مقدماتی از حساب انتگرال‌اند. مطالب این بخشها را می‌توان حذف کرد، یا، تا زمانی که دانشجو آشنایی بیشتری با روشهای انتگرال‌گیری پیدا کند، به تعویق انداخت.

تحلیلی $v(t)$ و $x(t)$ ، مقادیر عددی v و x را در هر زمان t به دست می‌آوریم. این کار را با هر میزان دقت که لازم باشد می‌شود انجام داد. نیروی ثابت کاربرد قوانین نیوتون را نشان می‌دهد، و البته کار کردن با نیروهای ثابت ساده‌تر از کار کردن با نیروهای متغیر است. خوشبختانه در اغلب مسائل عملی نیروهایی وجود دارند که در شرایط بسیاری می‌توان به تقریب ثابت فرضشان کرد؛ مثلاً گرانش در نزدیکی سطح زمین، نیروی اصطکاک، نیروی کشش ریسمان، و مانند آن. اما خیلی از شرایط فیزیکی هم هستند که نمی‌توان با نیروی ثابت به خوبی توصیفشان کرد. در این موارد برای حل مسئله یا باید روشهای تحلیلی به‌کار برد یا روشهای عددی. چند مثال از این نیروها می‌آوریم:

۱. نیروهای وابسته به زمان. در فصل ۲، اتومبیل را پس از ترمز کردن، با فرض اینکه شتاب آن ثابت باشد، تحلیل کردیم. در عمل، به‌ندرت چنین اتفاقی می‌افتد. در بسیاری از موارد، به ویژه در سرعت‌های زیاد، معمولاً راننده در ابتدا آرام ترمز می‌گیرد و سپس، با کند شدن حرکت، پدال را به تدریج شدیدتر فشار می‌دهد. بنابراین، نیروی ترمز، طی مدتی که حرکت اتومبیل کند می‌شود، بستگی به زمان دارد؛ تابع $a(t)$ بستگی به جزئیات ترمز کردن دارد.

مثال دیگر نیروهای وابسته زمان، نیروی مربوط به موجی است که از محیطی می‌گذرد. موج صوتی را در هوا در نظر بگیرید؛ در هر نقطه، موج به‌طور سینوسی با زمان تغییر می‌کند. بنابراین، نیروی وارد بر تک تک مولکولهای هوا هم در زمان به‌طور سینوسی، و با همان فرکانس موج، تغییر می‌کند. بستگی زمانی شتاب ذره نیز مثل بستگی زمانی نیروست.

۲. نیروهای وابسته به سرعت. نمونه‌آشنای نیروهای وابسته به سرعت، نیروی مقاومتی است که بر اجسام متحرک در محیط شاره، مثل هوا یا آب، وارد می‌شود. این نیروی اصطکاک، با افزایش سرعت زیاد می‌شود. شاید خود شما هم، هنگام راه رفتن در استخر، به این پدیده برخورد کرده باشید. اگر آرام راه بروید، نیروی مقاوم کمی احساس خواهید کرد، اما وقتی به سرعت حرکت می‌کنید، نیروی مقاوم وارد بر پاهایتان می‌تواند بسیار بزرگ باشد. هر چه تندتر حرکت کنید، نیروی مقاوم بیشتر می‌شود.

حرکت پرتابی هم به شدت تحت تأثیر نیروی اصطکاک شاره‌هاست، هر چند، در تحلیل اجسام آفتان و پرتابه‌ها در فصل‌های ۲ و ۴ این نیروها را ندیده گرفتیم. برد پرتابه‌ای مثل توپ بیسیال، به‌ازای سرعت اولیه معین، ممکن است حدود نصف مقداری باشد که از تحلیل بخش ۳-۴ به دست می‌آید. جسمی که مسافتی طولانی را سقوط کند، دیگر از معادلات سقوط آزاد بخش ۲-۷ پیروی نخواهد کرد؛ طبق این معادلات، سرعت جسم می‌تواند به‌طور نامحدود زیاد شود. برعکس، هر چه سرعت بزرگتر شود، نیروی اصطکاک هم بزرگتر می‌شود، و این نیرو می‌خواهد که جلوی افزایش بیشتر سرعت را بگیرد. در واقع، چنان‌که در بخش ۶-۷ خواهیم دید، سرعت به حدی (سرعت حد) می‌گراید که نمی‌تواند از آن بیشتر شود. (برای بیشتر اجسام، این پدیده در سرعت‌های

پیش از تحلیل نیروهای متغیر، حساب انتگرال را برای نیروی ثابت به‌کار می‌بریم و همان نتایج بخش ۲-۶ را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم شتاب a را (از قوانین نیوتون) داریم و می‌خواهیم $v(t)$ و $x(t)$ را پیدا کنیم. از اینجا شروع می‌کنیم که $a = dv/dt$. به این ترتیب،

$$dv = a dt \quad (9)$$

از طرفین انتگرال می‌گیریم. در طرف چپ، متغیر انتگرال‌گیری سرعت است، و حدود انتگرال‌گیری از v_0 در زمان 0 تا v در زمان t ، در طرف راست، روی زمان 0 تا t انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a dt \quad (10)$$

وقتی شتاب ثابت باشد، a از انتگرال طرف راست بیرون می‌آید و نتیجه می‌شود که

$$v - v_0 = a \int_0^t dt \quad (11)$$

یا

$$v(t) = v_0 + at \quad (12)$$

که همان معادله ۱۵ فصل ۲ است.

در ادامه، با استفاده از $v = dx/dt$ و با یک انتگرال‌گیری دیگر، $x(t)$ را به دست می‌آوریم:

$$dx = v dt = (v_0 + at)dt = v_0 dt + at dt \quad (13)$$

حدود انتگرال از مکان x_0 در زمان 0 تا مکان x در زمان t است:

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v_0 dt + \int_0^t at dt \quad (14)$$

چون a ثابت است باز هم آن را از انتگرال بیرون می‌آوریم:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= v_0 \int_0^t dt + a \int_0^t t dt \\ &= v_0 t + a \left(\frac{1}{2} t^2 \right) \\ x(t) &= x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} at^2 \end{aligned} \quad (15)$$

این معادله، همان معادله ۱۹ فصل ۲ است.

اگر شتاب ثابت نباشد، انتگرال‌گیریها مشکلتر می‌شود. گرفتن انتگرال ۱۰ و انتگرال ۱۴ و به دست آوردن توابع صریح $v(t)$ و $x(t)$ ، روش تحلیلی حل مسئله است. روش دیگر، روش عددی است، که در آن به کمک کامپیوتر انتگرالها را محاسبه می‌کنیم.

این را هم با معادلات ۱۱ و ۱۵ مقایسه کنید و ببینید که اثر a ثابت باشد، معادله ۱۷ به معادله ۱۵ تبدیل می‌شود.

مثال ۴. اتومبیلی با سرعت ۱۰۵ km/h (در حدود ۶۵ mi/h یا ۲۹.۲ m/s) حرکت می‌کند. راننده ناگهان ترمز می‌کند، اما با نیروی افزایش‌یابنده، طوری که شتاب کندکننده متناسب با زمان به صورت $a(t) = ct$ زیاد می‌شود، که در آن $c = -۲.۶۷ \text{ m/s}^2$ است. (الف) چه مدت طول می‌کشد تا اتومبیل متوقف شود؟ (ب) در این مدت اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) باید عبارتی برای $v(t)$ پیدا کنیم تا بتوانیم زمانی را که $v = 0$ می‌شود به دست بیاوریم. با استفاده از معادله ۱۶، با $a(t) = ct$ ، نتیجه می‌شود که

$$v(t) = v_0 + \int_0^t ct \, dt = v_0 + \frac{1}{2}ct^2$$

به جای $v(t)$ صفر می‌گذاریم و زمان t_1 را، که در آن اتومبیل ساکن می‌شود، به دست می‌آوریم:

$$0 = v_0 + \frac{1}{2}ct_1^2$$

$$t_1 = \sqrt{\frac{-2v_0}{c}} = \sqrt{\frac{-2(29.2 \text{ m/s})}{-2.67 \text{ m/s}^2}} = 4.68 \text{ s}$$

4.68 s طول می‌کشد تا اتومبیل بایستد.

(ب) برای اینکه ببینیم اتومبیل چه مسافتی را می‌پیماید، باید عبارتی برای $x(t)$ به دست بیاوریم. به این منظور، باید طبق معادله ۱۷ از $v(t)$ انتگرال بگیریم:

$$x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + \frac{1}{2}ct^2) dt = x_0 + v_0 t + \frac{1}{6}ct^3$$

به ازای $t = t_1 = 4.68 \text{ s}$ ، مسافت پیموده شده (با $x_0 = 0$) برابر است با

$$x(t_1) = 0 + (29.2 \text{ m/s})(4.68 \text{ s}) + \frac{1}{6}(-2.67 \text{ m/s}^2)(4.68 \text{ s})^3 = 91.0 \text{ m}$$

شکل ۱۱ بستگی زمانی x ، v ، و a را نشان می‌دهد. برخلاف حالت شتاب ثابت، $v(t)$ خط راست نیست.

با این روش ترمز کردن، بیشترین تغییر سرعت در حوالی پایان حرکت انجام می‌شود. تغییر سرعت در نخستین ثانیه پس از ترمز کردن، تنها ۱.۳ m/s (در حدود ۳ mi/h) است؛ اما در آخرین ثانیه حرکت، سرعت ۱۱.۲ m/s (در حدود ۲۵ mi/h) تغییر می‌کند. (به یاد دارید که در حالت شتاب ثابت، تغییر سرعت در بازه‌های زمانی

برای ۱ یا ۲ متر سقوط در آزمایشگاه، این پدیده قابل چشمپوشی است و می‌توان معادلات بخش ۲-۷ را با اطمینان به کار برد.)

۳. نیروهای وابسته به مکان. مثال آشنای نیروهای وابسته به مکان، نیروی بازگرداننده فنری است که به اندازه x از حالت تعادلش کشیده شده است؛ این فنر نیروی $F = -kx$ وارد می‌کند. شتاب جسمی به جرم m که به فنر بسته شده است، $a = F/m = -kx/m$ است. اگر جسم را به فاصله x جابه‌جا کنیم، نیرویی بر آن وارد می‌شود که می‌خواهد آن را به طرف نقطه تعادل بکشد. اگر جسم را رها کنیم، به طرف نقطه تعادل حرکت خواهد کرد؛ در بازگشت به طرف تعادل، جابه‌جایی x کم می‌شود و شتاب هم همین‌طور. هنگامی که جسم از نقطه تعادل می‌گذرد، شتاب آن به‌طور لحظه‌ای صفر می‌شود، اما پس از آن جسم از $x = 0$ هم رد می‌شود و اندازه شتاب دوباره بزرگ می‌شود.

ساده‌ترین راه تحلیل نیروهای وابسته به مکان، استفاده از روشهای کار و انرژی است، که در فصل ۷ و ۸ به آنها خواهیم پرداخت. در بخشهای بعدی این فصل چند روش تحلیل نیروهای وابسته به زمان یا سرعت را، با استفاده از قوانین نیوتون، بررسی می‌کنیم.

۵-۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای تحلیلی

با استفاده از قوانین نیوتون به شکل معمول، برای نیروهای وابسته به زمان، یک شتاب $a(t)$ به دست می‌آید که به زمان بستگی دارد. در این موارد می‌توانیم درست مثل بخش ۴-۶ عمل کنیم و سرعت را با انتگرال‌گیری مستقیم به دست بیاوریم. $a = dv/dt$ را به صورت $dv = a(t)dt$ می‌نویسیم و از $t = 0$ (سرعت اولیه v_0) تا t (سرعت اولیه v) انتگرال می‌گیریم. برای سادگی فرض می‌کنیم که حرکت یک‌بعدی است، اما تعمیم نتایج به سه‌بعد هم سراسر است. داریم

$$\int_{v_0}^v dv = \int_0^t a(t)dt$$

$$v - v_0 = \int_0^t a(t)dt$$

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt \quad (16)$$

معادلات بالا را با معادلات ۱۰ تا ۱۲ مقایسه کنید؛ تنها تفاوتشان در این است که a در داخل انتگرال باقی می‌ماند.

وقتی $v(t)$ به دست آمد، می‌شود این روش را تکرار کرد و $x(t)$ را به دست آورد. از $v = dx/dt$ داریم $dx = v(t)dt$ ، و با انتگرال‌گیری مشابهی از $t = 0$ (مکان اولیه x_0) تا t (مکان x) نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_0}^x dx = \int_0^t v(t)dt$$

$$x - x_0 = \int_0^t v(t)dt$$

$$x(t) = x_0 + \int_0^t v(t)dt \quad (17)$$

که کامپیوتر به خوبی انجام می‌دهد. بنابراین، روش حل عددی مسئله را، با کامپیوتر، می‌توان با دقت دلخواه به‌کار گرفت.

شکل ۱۲ طرح کلی این روش را، در حالت شتاب متغیر مثال ۴ نشان می‌دهد. ناحیهٔ بین $t = 0$ و $t = 0.5$ به 10° بازهٔ کوچک، هر یک به اندازهٔ 0.5 ر، $\delta t = 0.5$ ر، تقسیم شده است. تابع $a(t)$ را در هر بازه با یک مقدار ثابت (شتاب متوسط، که در این حالت خطی، برابر با a در وسط بازه هم هست) تقریب زده‌ایم. در بازهٔ اول، شتاب متوسط از مقادیر a در $t = 0$ و $t = 0.5$ ر به دست می‌آید:

$$\bar{a}_1 = \frac{1}{\Delta t} [a(0) + a(0.5)] = \frac{1}{0.5} [0 + (-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5)] \\ = -0.67 \text{ m/s}^2$$

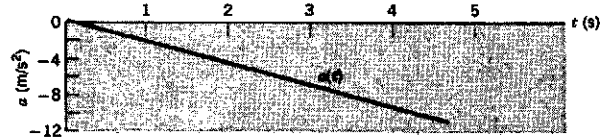
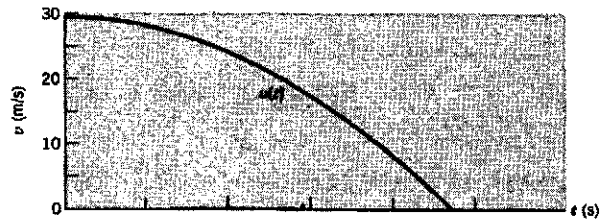
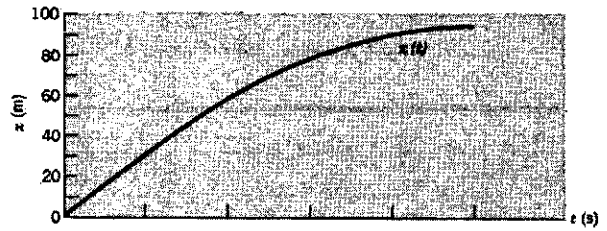
تغییر سرعت در بازهٔ اول، δv_1 ، تقریباً برابر است با

$$\delta v_1 = \bar{a}_1 \delta t = (-0.67 \text{ m/s}^2)(0.5) = -0.34 \text{ m/s}$$

بنابراین، سرعت در $t = 0.5$ ر عبارت است از

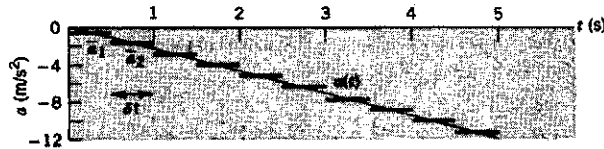
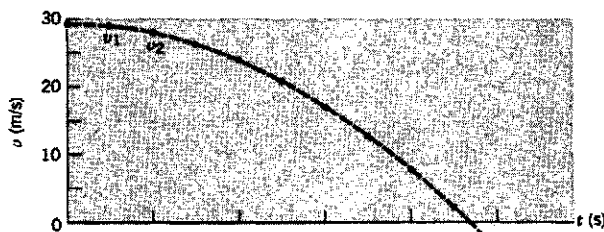
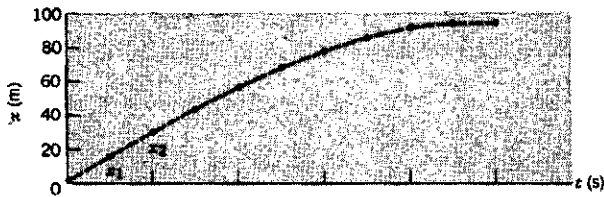
$$v_1 = v_0 + \delta v_1 = 29.2 \text{ m/s} - 0.34 \text{ m/s} = 28.9 \text{ m/s}$$

برای یافتن جابه‌جایی طی بازهٔ اول، ابتدا سرعت متوسط را در این بازه



شکل ۱۱. مثال ۴ $x(t)$ و $v(t)$ حاصل از $a(t)$ ، که به‌طور خطی با زمان تغییر می‌کند.

مساوی یکسان بود.) فکر می‌کنید که این روش تمرکز کردن فایده‌ای هم دارد؟ ضرر چطور؟



شکل ۱۲. جواب عددی (نقاط نشان داده شده در شکل) مثال ۴؛ این جواب را با جواب تحلیلی مقایسه کنید (شکل ۱۱ و منحنیهای خط چین). در هر یک از بازه‌های 0.5 ر، شتاب را ثابت فرض می‌کنیم، و مکان و سرعت را در نقطهٔ پایانی بازه جساب می‌کنیم، که نقاط رسم شده در شکل را به دست می‌دهند. هر چه بازه‌های بیشتر (و کوچک‌تری) بگیریم، نقاط بیشتر

۶-۶ نیروهای وابسته به زمان: روشهای عددی (اختیاری)

با روش تحلیلی بخش قبلی، علی‌الاصول با داشتن $a(t)$ می‌شود $x(t)$ و $v(t)$ را به دست آورد. اما خیلی وقتها این روش عملی یا مطلوب نیست. مثلاً ممکن است انتگرالها شکل تحلیلی نداشته باشند، یا شاید شکل آنها آنقدر پیچیده باشد که جوابهای حاصل کمکی به بصیرت فیزیکی ما از مسئله نکنند. استفاده از روشهای عددی راه مناسب دیگری در کنار روشهای تحلیلی است، و البته روشهای عددی بخصوص وقتی مفیدند که روشهای تحلیلی قابل استفاده نباشند.

در روش عددی مسئله را به این ترتیب تقریب می‌زنیم؛ بازهٔ زمان مورد نظر را به تعداد زیادی بازهٔ کوچک تقسیم می‌کنیم، و در هر بازه معادلات مربوط به شتاب ثابت را به‌کار می‌بریم. اما این مقدار "ثابت" از یک بازه به بازهٔ دیگر تغییر می‌کند. یک انتخاب مناسب برای شتاب ثابت هر بازه، شتاب متوسط آن بازه است.

هر چه بازه‌ها را کوچکتر کنیم، روش بهتر کار می‌کند و جواب دقیقتری به دست می‌آید؛ هر چه بازه‌ها کوچکتر باشد، شتاب متوسط (ثابت) بهتر شتاب واقعی را تقریب می‌کند. از طرف دیگر، هر چه بازه‌ها کوچکتر بشوند تعداد آنها زیادتر می‌شود، و به این ترتیب باید محاسبات تکرار شوند؛ متعددی انجام بدهیم. این درست است.

به دست می آوریم:

$$\bar{v}_1 = \frac{1}{\Delta t}(v_0 + v_1) = \frac{1}{\Delta t}(29.2 \text{ m/s} + 28.9 \text{ m/s}) \\ = 29.1 \text{ m/s}$$

جابه جایی δx_1 در این بازه، تقریباً برابر است با

$$\delta x_1 = \bar{v}_1 \Delta t = (29.1 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.6 \text{ m}$$

اگر نقطه شروع را $x_0 = 0$ بگیریم، مکان در پایان بازه اول چنین به دست می آید

$$x_1 = x_0 + \delta x_1 = 0 + 14.6 \text{ m} = 14.6 \text{ m}$$

مقادیر v_1 و x_1 در $t = 0.5 \text{ s}$ ، در شکل ۱۲ رسم شده اند.

اکنون به بازه دوم می رویم و همین روش را تکرار می کنیم. در اینجا شتاب متوسط برابر است با

$$\bar{a}_2 = \frac{1}{\Delta t}[a(0.5 \text{ s}) + a(1.0 \text{ s})] \\ = \frac{1}{\Delta t}[(-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) + (-2.67 \text{ m/s}^2)(1.0 \text{ s})] \\ = -2.67 \text{ m/s}^2$$

با ادامه کار، به همان روش بازه اول، نتیجه می شود که

$$\delta v_2 = \bar{a}_2 \Delta t = (-2.67 \text{ m/s}^2)(0.5 \text{ s}) = -1.34 \text{ m/s} \\ v_2 = v_1 + \delta v_2 = 28.9 \text{ m/s} - 1.34 \text{ m/s} = 27.6 \text{ m/s}$$

و

$$\bar{v}_2 = \frac{1}{\Delta t}(v_1 + v_2) = \frac{1}{\Delta t}(28.9 \text{ m/s} + 27.6 \text{ m/s}) \\ = 28.3 \text{ m/s}$$

$$\delta x_2 = \bar{v}_2 \Delta t = (28.3 \text{ m/s})(0.5 \text{ s}) = 14.2 \text{ m}$$

$$x_2 = x_1 + \delta x_2 = 14.6 \text{ m} + 14.2 \text{ m} = 28.8 \text{ m}$$

مقادیر v_2 و x_2 سرعت و مکان در پایان بازه دوم اند، که در شکل ۱۲ در $t = 1.0 \text{ s}$ رسم شده اند.

با تکرار روش در هر 1.0 بازه، نقاط باقی مانده شکل ۱۲ به دست می آید.

از مقایسه شکل های ۱۱ و ۱۲، می توان دید که توافق جواب عددی با جواب تحلیلی چقدر خوب است، حتی در اینجا که فقط 1.0 بازه به کار برده ایم. کامپیوتر می تواند به سادگی این محاسبات را برای 100 یا 1000 بازه انجام بدهد، و در چنین حالتی نقاط رسم شده برای x و v بسیار نزدیک به یک منحنی هموار می شوند.

از درونیابی سرعت بین نقاط پایانی بازه آخر، نتیجه می شود که اتومبیل در حدود زمان 4.7 s متوقف می شود؛ درست همان مقداری که در جواب تحلیلی به دست آمده بود. از شکل ۱۲ مسافت پیموده شده را تخمین می زنیم؛ این مسافت در حدود 91 m است، که باز هم با مقدار تحلیلی سازگار است.

البته مقدار منفی v در پایان بازه دهم، در این مسئله بی معنی است؛ شرایط دینامیکی مسئله چنان است که سرعت نمی تواند منفی شود، زیرا با ترمز کردن نمی توان اتومبیل را واداشت که به عقب حرکت کند. اما ادامه محاسبه عددی تا این نقطه از آن جهت مفید است که به تحلیل بازه آخر کمک می کند.

در پوست ب، یک برنامه کامپیوتری (به زبان بیسیک) آمده است که می تواند این محاسبه را انجام بدهد. با تغییرات کوچکی در این برنامه، می شود همین محاسبات را برای هر شکلی از $a(t)$ انجام داد.

۶-۷ اصطکاک شاره ها و حرکت پرتابی

قطره های باران از ابرهایی سقوط می کنند که ارتفاع (h) آنها از سطح زمین در حدود 2 km است. با استفاده از معادله سقوط آزاد اجسام (معادله ۲۵ فصل ۲)، انتظار داریم که این قطره ها با سرعت $v = \sqrt{2gh} \approx 200 \text{ m/s}$ ، یا در حدود 440 mi/h به زمین برخورد کنند. برخورد پرتابه ای چنین سریع با آدمیزاد، حتی اگر این پرتابه قطره باران باشد، مرگ آور است؛ پس قطره های باران خیلی کندتر از اینها حرکت می کنند، و معلوم است که در جایی از محاسبات خطا کرده ایم.

اشکال کار اینجاست که اثر نیروی مقاومت هوا بر قطره افتان را نادیده گرفته ایم. این نیرو، نیروی اصطکاک شاره است که بر اجسامی که در آن حرکت می کنند وارد می شود. چنین نیروهایی، در موارد گوناگون، آثار مهمی دارند؛ مثلاً در اثر این نیرو توپ بیسبال به مقدار قابل ملاحظه ای از مسیر ایده آل بدون اصطکاک منحرف می شود؛ این نیرو سرعت اسکی باز را هم کم می کند و اسکی باز بدن خودش را در چنان حالتی قرار می دهد که اثر آن را کم کند؛ در طراحی هواپسما و کشتی هم باید اثر این نیروها را در نظر گرفت. از دید اجسام افتان، از قطره باران گرفته تا چتر باز، نیروی اصطکاک شاره ها نمی گذارد که سرعت به طور نامحدود زیاد شود، بلکه یک سرعت بیشینه، یا حد، تعیین می کند که جسم در حال سقوط نمی تواند از آن تندتر حرکت کند.

یکی از ویژگی های خاص نیروی اصطکاک شاره ها آن است که این نیرو به سرعت بستگی دارد؛ هرچه جسم سریعتر حرکت کند، نیروی اصطکاک هم بیشتر می شود. بنابراین، برای تحلیل سینماتیک مسئله باید از روشهای انتگرال استفاده کرد.

اگر نیرو، و در نتیجه شتاب، تابع سرعت باشد، روشهای بخش ۶-۵ برای نیروهای وابسته به زمان را باید قدری تغییر داد. چنانکه در معادله ۱۶ دیدیم، از $a = dv/dt$ شروع می کنیم، اما در اینجا a تابع سرعت،

باشد، نیروی خالصی بر جسم اثر نمی‌کند و شتاب جسم صفر می‌شود (شکل ۱۳ ج). از این لحظه سرعت ثابت می‌ماند. جواب ریاضی ما هم باید همین خاصیت را نشان بدهد.
قانون دوم نیوتون در مورد این مسئله چنین عبارت است از

$$\sum \mathbf{F} = \mathbf{D} + m\mathbf{g} = m\mathbf{a}$$

محور y را رو به پایین می‌گیریم؛ به این ترتیب مؤلفه قائم به صورت زیر است

$$\sum F_y = mg - bv = ma$$

یا

$$a = g - \frac{b}{m}v$$

از این عبارت دیده می‌شود که با افزایش v ، سرانجام به جایی می‌رسیم که طرف راست صفر می‌شود، و این رویداد در زمانی است که $bv/m = g$ بشود. در این نقطه $a = 0$ می‌شود و از آن پس هم صفر می‌ماند. پس، از اینجا به بعد سرعت ثابت می‌ماند. این همان سرعت حد، $v_T = mg/b$ است.

برای محاسبه $v(t)$ ، معادله ۱۸ را با $v_0 = 0$ به‌کار می‌بریم:

$$\int_0^v \frac{dv}{g - (b/m)v} = t$$

انتگرال را می‌توان چنین نوشت

$$-\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv}$$

که به شکل $\int du/u = \ln u$ است (با $u = mg - bv$). پس

$$\begin{aligned} -\frac{m}{b} \int_0^v \frac{-b dv}{mg - bv} &= -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) \Big|_0^v \\ &= -\frac{m}{b} \ln(mg - bv) + \frac{m}{b} \ln(mg) \\ &= -\frac{m}{b} \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) = t \end{aligned}$$

این عبارت، رابطه‌ای کاملاً قابل قبول بین v و t است، اما برای آسانتر شدن تعبیر و کاربرد آن، بهتر است رابطه را معکوس کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم:

$$\begin{aligned} \ln \left(\frac{mg - bv}{mg} \right) &= -\frac{bt}{m} \\ \frac{mg - bv}{mg} &= e^{-bt/m} \end{aligned}$$

سرانجام خواهیم داشت

$$v(t) = \frac{mg}{b} (1 - e^{-bt/m}) \quad (19)$$

یعنی $a(v)$ است:

$$a(v) = \frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{a(v)} = dt$$

از این رابطه می‌توان مستقیماً انتگرال گرفت:

$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{a(v)} = \int_0^t dt = t \quad (18)$$

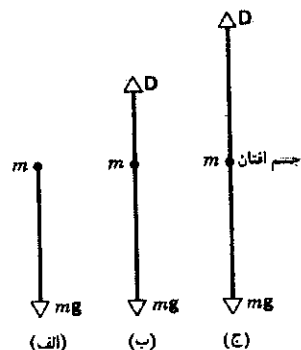
طرف چپ معادله ۱۸ تابعی از v است؛ پس معادله ۱۸ عملاً t را به صورت تابعی از v ، $t(v)$ ، به‌دست می‌دهد. البته اغلب می‌توانیم نتیجه را "معکوس" کنیم و $v(t)$ را به‌دست بیاوریم که عموماً برای محاسبات مفیدتر است.

مثال ۵. فرض کنید جسمی به جرم m در هوا سقوط می‌کند و نیروی مقاومت D وارد بر آن به‌طور خطی با سرعت زیاد می‌شود

$$D = bv$$

و این نیرو همواره در خلاف جهت حرکت جسم است. ثابت b به خواص جسم (مثلاً اندازه و شکل آن) و همچنین به خواص شاره (به‌ویژه چگالی آن) بستگی دارد. با این فرض که جرم m از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشد، سرعت آن برحسب زمان، یعنی $v(t)$ را پیدا کنید.

حل: شکل ۱۳ نمودار جسم-آزاد را نشان می‌دهد؛ این نمودار با گذشت زمان عوض می‌شود زیرا D همراه با v تغییر می‌کند. هنگامی که جسم رها می‌شود D صفر است (زیرا v صفر است)؛ با افزایش v ، D هم زیاد می‌شود. در نقطه خاصی از حرکت که $D = mg$



شکل ۱۳. نیروهای وارد بر جسمی که در هوا سقوط می‌کند. (الف) در لحظه‌ای که جسم رها می‌شود، $v = 0$ است و نیروی اصطکاکی وجود ندارد. (ب) با سرعت گرفتن جسم نیروی اصطکاک هم زیاد می‌شود. (ج) سرانجام نیروی اصطکاک با وزن برابر می‌شود؛ از آن پس این نیرو ثابت می‌ماند و جسم با سرعت ثابت، برابر با سرعت حد، سقوط می‌کند.

جدول ۲. چند سرعت حد در هوا.

مسافت (m)٪۹۵	سرعت حد (m/s)	جسم
۲۵۰۰	۱۴۵	گلوله ۱۶ پابندی
۴۳۰	۶۰	چترباز در حال سقوط آزاد (نوعی)
۲۱۰	۴۲	توپ بیسبال
۱۱۵	۳۱	توپ تنیس
۴۷	۲۰	توپ بسکتبال
۱۰	۹	توپ پینگ‌پنگ
۶	۷	قطره باران (به شعاع ۱٫۵mm)
۳	۵	چترباز (نوعی)

۱. مسافتی که جسم باید از حالت سکون سقوط کند تا به ۹۵٪ سرعت حد خود برسد.

مرجع:

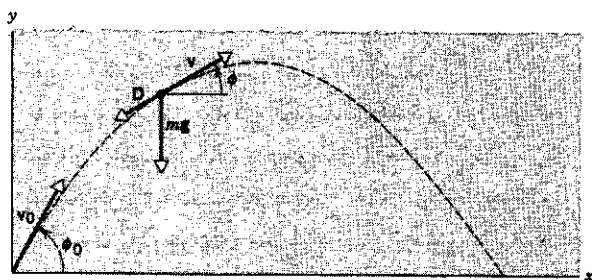
Peter J. Brancazio, *Sport Science*, Simon & Schuster Inc., New York, 1984.

جدول ۲ فهرستی از مقادیر نوعی است که برای سرعت حد اجسام متفاوت در هوا اندازه‌گیری شده است.

حرکت پرتابی با مقاومت هوا (اختیاری)

محاسبات نیروی مقاومت اصطکاکی برای حرکت پرتابی دوبعدی هم مهم است. مثلاً توپ بیسبال با سرعت حدوداً 100 mi/h یا 45 m/s از "چوب" جدا می‌شود. این مقدار از سرعت حدی توپ در هوا بیشتر است (جدول ۲). نیروی اصطکاک هوا، $D = bv$ ، را می‌توان از جواب مثال ۵ تخمین زد. از معادله ۲۰ نتیجه می‌شود که ثابت b برابر است با وزن mg توپ بیسبال (در حدود 1.4 N)، متناظر با جرم 0.14 kg تقسیم بر سرعت حد توپ، 42 m/s . پس $b = 0.33 \text{ N/(m/s)}$ است. اگر توپ با سرعت 45 m/s حرکت کند، نیروی مقاومتی (bv) در حدود 1.5 N بر آن وارد می‌شود، که از وزن توپ بیشتر است و بنابراین اثر قابل‌ملاحظه‌ای بر حرکت آن می‌گذارد.

شکل ۱۵ نمودار جسم-آزاد را در نقطه معینی از حرکت نشان



شکل ۱۵. پرتابه‌ای در حال حرکت. پرتابه با سرعت v_0 در زاویه ϕ_0 نسبت به سطح افقی پرتاب می‌شود. در نقطه معینی، سرعت آن v با زاویه ϕ است. وزن و نیروی اصطکاک هوا (که همواره در خلاف جهت v است) در نقطه مورد نظر نشان داده شده است.

اگر t کوچک باشد (در زمانهای ابتدایی سقوط جسم)، می‌توان تابع نمایی را به شکل $1 + x \approx e^x$ برای x های کوچک ($x \ll 1$) تقریب کرد. به این ترتیب،

$$v(t) \approx \frac{mg}{b} \left[1 - \left(1 - \frac{bt}{m} \right) \right] = gt \quad (\text{برای } t \text{ های کوچک})$$

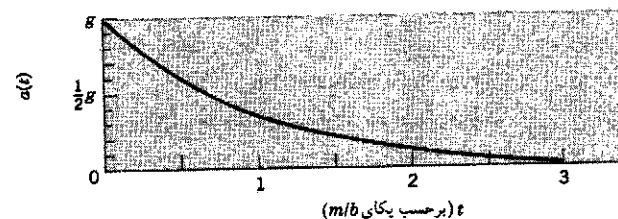
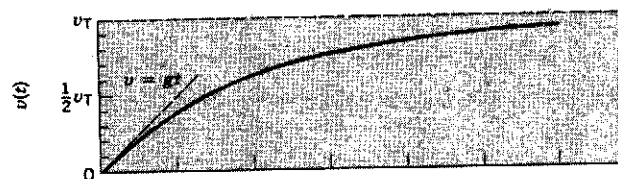
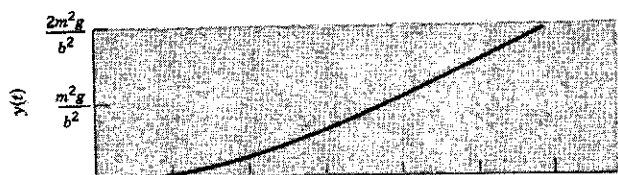
در ابتدای حرکت، پیش از آنکه نیروی اصطکاک قابل‌ملاحظه شده باشد، حرکت جسم کاملاً نزدیک به سقوط آزاد با شتاب g است.

در t های بزرگ، تابع نمایی به صفر می‌گراید (در حد $x \rightarrow \infty$ ، $e^{-x} \rightarrow 0$). در این حالت سرعت به مقدار حدی‌اش v_T می‌گراید.

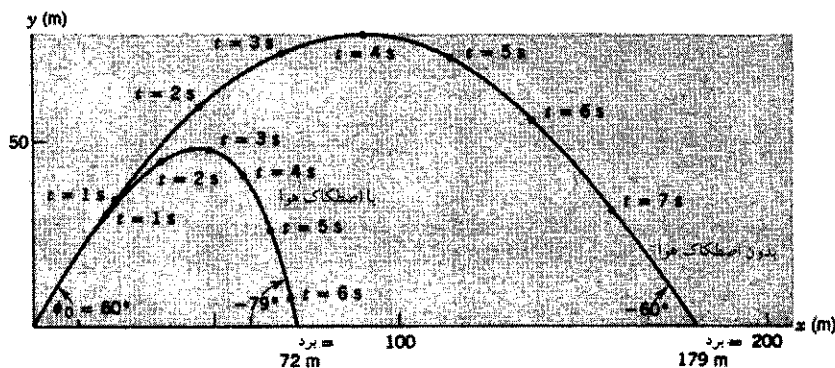
$$v_T = \frac{mg}{b} \quad (20)$$

با داشتن عبارت $v(t)$ ، می‌توان از آن مشتق گرفت و $a(t)$ را به دست آورد، یا از آن انتگرال گرفت و $g(t)$ را به دست آورد. انجام این محاسبات و بررسی نتایج در t های کوچک و t های بزرگ را به عنوان تمرین به عهده دانشجویان گذاشته‌ایم (مسئله ۶۶). شکل ۱۴ بستگی زمانی a ، v و y را نشان می‌دهد.

این مثال، یک رهیافت برای تحلیل نیروی اصطکاک شماره‌ها را نشان می‌دهد. رهیافتی دیگر، D را به جای v ، متناسب با v^2 فرض می‌کنند. در این مورد هم از همان محاسباتی که به کار بردیم استفاده می‌شود، اما ریاضیات مسئله قدری پیچیده‌تر است. اینجا هم یک سرعت حد به دست می‌آید، اگرچه شکل ریاضی این سرعت با آنچه قبلاً به دست آوردیم متفاوت است.



شکل ۱۴. مثال ۵. مکان، سرعت، و شتاب یک جسم افتان که تحت اثر نیروی مقاومت هواست. توجه کنید که شتاب از g شروع می‌شود و به صفر می‌گراید، و سرعت از صفر شروع می‌شود و به v_T می‌گراید.



شکل ۱۶. حرکت پرتابی با نیروی اصطکاک هوا و بدون آن. محاسبه برای $v_0 = 40 \text{ m/s}$ و $\phi_0 = 60^\circ$ انجام شده است.

جسم مورد نظر نسبت داد، و نمی‌توان در رده‌هایی که در بخش ۱-۶ گفته شد طبقه‌بندی کرد و به‌علاوه، اگر جسم را از دید چارچوبهای لخت بررسی کنیم، شبه‌نیروها ناپدید می‌شوند. شبه‌نیرو صرفاً ابزاری است که به کمک آن می‌شود مکانیک کلاسیک را، به روشهای معمول، برای بررسی رویدادها از دید چارچوبهای مرجع نالخت به‌کار برد.^۱

مثلاً ناظر S' را در نظر بگیرید که در کامیونی که با سرعت ثابت حرکت می‌کند نشسته است. در این کامیون یک ریل هوایی دراز هست که "لغزک" ای به جرم 250 kg ، بی‌اصطکاک، روی آن قرار گرفته است (شکل ۱۷ الف). راننده ترمز می‌کند، و سرعت کامیون به تدریج کم می‌شود. ناظر S بر زمین، شتاب ثابت کامیون را 2 m/s^2 می‌سنجد. بنابراین، ناظر S' که در کامیون است، هنگام ترمز، در یک چارچوب مرجع نالخت است. S' مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب 2 m/s^2 به طرف جلو حرکت می‌کند. هر یک از دو ناظر، چگونه با استفاده از قانون دوم نیوتون حرکت جسم لغزنده را توضیح می‌دهند؟ برای ناظر زمینی S ، که در یک چارچوب مرجع لخت است، تحلیل مسئله سراسر است. لغزک، که پیش از ترمز با سرعت ثابت به جلو می‌رفته است، الآن هم دارد همین کار را می‌کند. از دید S ، لغزک شتاب ندارد و هیچ نیروی افقی‌ای لازم نیست که بر آن اثر کند. اما S' مشاهده می‌کند که لغزک شتاب می‌گیرد و هیچ جسمی هم در محیط این جسم نمی‌یابد که نیروی مولد این شتاب را بر آن وارد کند. S' ، برای اینکه بتواند قانون دوم نیوتون را به‌کار برد، باید فرض

۱. برای کسب اطلاعات بیشتر درباره این محاسبات رجوع کنید به

"Trajectory of a Fly Ball", Peter J. Brancazio, *The Physics Teacher*, January 1985, p. 20.

و نیز به کتاب همین مؤلف

SportScience. (Simon & Schuster Inc, 1984)

این کتاب شامل بسیاری مثالهای جالب از کاربرد اصول فیزیک در ورزش است. همچنین رجوع کنید به

"Physics and Sports: the Aerodynamics of Projectiles" Peter Brancazio.

در کتاب

Fundamentals of Physics, 3rd ed., David Halliday and Robert Resnick, (Wiley, 1988).

می‌دهد. D ، مثل همه نیروی اصطکاک دیگر، در خلاف جهت v است، و فرض می‌کنیم که باد نمی‌وزد. اگر بگیریم $D = -bv$ ، می‌توانیم با استفاده از قوانین نیوتون یک جواب تحلیلی برای مسیر به‌دست بیاوریم، که نمونه‌ای از آن را در شکل ۱۶ نشان داده‌ایم. مقاومت هوا باعث می‌شود که برد پرتابه از 179 m به 72 m ، و ارتفاع اوج از 78 m به 48 m کاهش بیابد. همچنین توجه کنید که مسیر دیگر نسبت به محور قائمی که از نقطه اوج می‌گذرد متقارن نیست؛ شیب مسیر در هنگام سقوط خیلی تندتر است تا در مرحله صعود. اگر $\phi_0 = 60^\circ$ باشد، پرتابه با زاویه 79° به زمین می‌خورد، در حالی که در غیاب اصطکاک با زاویه ϕ_0 به زمین برخورد می‌کرد.

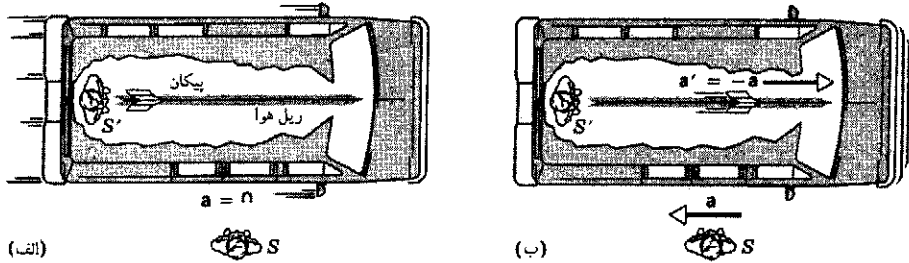
نیروی مقاومت هوا به سرعت پرتابه در هوای ساکن بستگی دارد. اگر باد بوزد، محاسبات را باید تغییر داد، و نتیجه هم تغییر می‌کند. اگر بخواهیم عبارتهایی دیگر (و واقعی‌تری) برای نیروی مقاومت D به‌کار ببریم باید محاسبات را به شکل عددی انجام بدهیم.^۱

۸-۶ چارچوبهای نالخت و شبه نیرو (اختیاری)

در بررسی مکانیک کلاسیک تا اینجا فرض کردیم که اندازه‌گیری و مشاهده در یک چارچوب مرجع لخت انجام می‌شود؛ یعنی در یکی از چارچوبهای مرجعی که با قانون اول نیوتون تعریف می‌شوند، چارچوبهایی که در آنها اگر محیطی نباشد که به جسم مورد نظر نیرو وارد کند ($\sum \mathbf{F} = 0$)، این جسم شتاب نمی‌گیرد ($a = 0$). انتخاب چارچوب مرجع همیشه با خودمان است؛ یعنی اگر فقط چارچوبهای لخت را هم به‌کار ببریم، هیچ محدودیتی روی پدیده‌های طبیعی‌ای که می‌شود با مکانیک کلاسیک بررسی کرد نمی‌گذاریم.

با وجود این، در مواردی که مناسب بدانیم، می‌توانیم مکانیک کلاسیک را از دید ناظرهای چارچوبهای نالخت هم به‌کار ببریم، یعنی از دید چارچوبهای متصل به جسمی که، از دید چارچوبهای لخت، شتابدار است. چارچوبهای متصل به یک اتومبیل شتابدار یا چرخ و فلک چرخان، نمونه‌هایی از چارچوب نالخت‌اند.

برای به‌کار بردن مکانیک کلاسیک در چارچوبهای نالخت باید نیروهای دیگری به نام شبه نیرو (یا نیروی لختی) وارد کنیم. شبه‌نیروها را بر خلاف نیروهایی که تاکنون دیده‌ایم، نمی‌توان به اجسام خاصی در محیط



شکل ۱۷. (الف) ناظر زمینی S مشاهده می‌کند که ناظر S' در کامیون با سرعت ثابت حرکت می‌کند. هر دو ناظر در چارچوبهای مرجع لخت‌اند. (ب) از دید ناظر S ، کامیون با شتاب ثابت a ترمز می‌کند. ناظر S' ، که اکنون در یک چارچوب مرجع لخت است، مشاهده می‌کند که لغزک با شتاب ثابت $a' = -a$ روی ریل هوا به جلو می‌رود. ناظر S' این حرکت را با شبه‌نیرو توضیح می‌دهد.

حرکت کنند. تویی که در دست شماست، از دید شما در حالت تعادل است؛ نیروی روبه "بیرون" (مرکزگریز) با نیروی روبه "درون" (مرکزگرا) که دست شما به توپ وارد می‌کند خنثی می‌شود. از دید ناظر زمینی، که در چارچوب مرجع لخت است، توپ روی دایره حرکت می‌کند، و در اثر نیروی مرکزگرایی که شما توسط دستتان بر آن وارد می‌کنید، شتابی به سوی مرکز دارد. برای ناظر زمینی، نیروی مرکزگریزی وجود ندارد، زیرا توپ در حالت تعادل نیست و در امتداد شعاع به طرف مرکز دایره شتاب دارد.

بعضی ابزارهای عملی براساس شبه‌نیروها کار می‌کنند. دستگاه سانتریفوژ را در نظر بگیرید، که یکی از مفیدترین وسایل آزمایشگاه است. اگر مخلوطی از مواد را روی دایره‌ای به سرعت بچرخانیم، نیروی مرکزگریز mv^2/r وارد بر مواد پرجرمتر بیشتر خواهد بود. پس این مواد از محور دوران بیشتر فاصله می‌گیرند. به این ترتیب، سانتریفوژ با استفاده از شبه‌نیرو، مواد را برحسب جرمشان از هم جدا می‌کند، درست همان‌طور که طیف‌سنج جرمی (بخشهای ۵-۱ و ۴-۵) آنها را به کمک نیروی الکترومغناطیسی، برحسب جرم، از هم جدا می‌کند.

یکی دیگر از انواع شبه‌نیرو، نیروی کوریولیس است. روی یک صفحه افقی چرخان، تویی را با سرعت ثابت در راستای شعاع به طرف مرکز صفحه چرخان می‌غلطانید. در لحظه‌ای که توپ را در شعاع r رها می‌کنید، سرعت مماسی آن همان سرعت نقطه‌ای است که در فاصله r از مرکز حرکت دایره‌ای دارند (دزست به اندازه سرعت مماسی خودتان). این توپ هر قدر که به مرکز نزدیکتر می‌شود، سرعت مماسی کمتری برای حفظ حرکت دایره‌ای با همان آهنگ محیط اطرافش لازم دارد. اما چون راهی برای کاهش سرعت مماسی نیست (فرض کرده‌ایم که اصطکاک بین توپ و کف چرخ و فلک کم است)، توپ قدری از خط رنگی نشانه حرکت دورانی یکنواخت (امتداد اولیه غلتش) جلو می‌افتد. یعنی شما در چارچوب مرجع لخت دوار خودتان باید فرض کنید که یک نیروی جانبی — نیروی کوریولیس — باعث می‌شود که توپ، با نزدیکتر شدن به مرکز دایره، از خط دورتر شود. اما از دید ناظر زمینی در چارچوب لخت، نیروی کوریولیسی وجود ندارد؛ توپ با سرعت

کند که شبه‌نیروی بر لغزک اثر می‌کند. از دید S' ، نیروی F' باید برابر با ma' باشد، که در آن $a' = (-a)$ شتاب لغزک از دید S' است. اندازه این شبه‌نیرو برابر است با

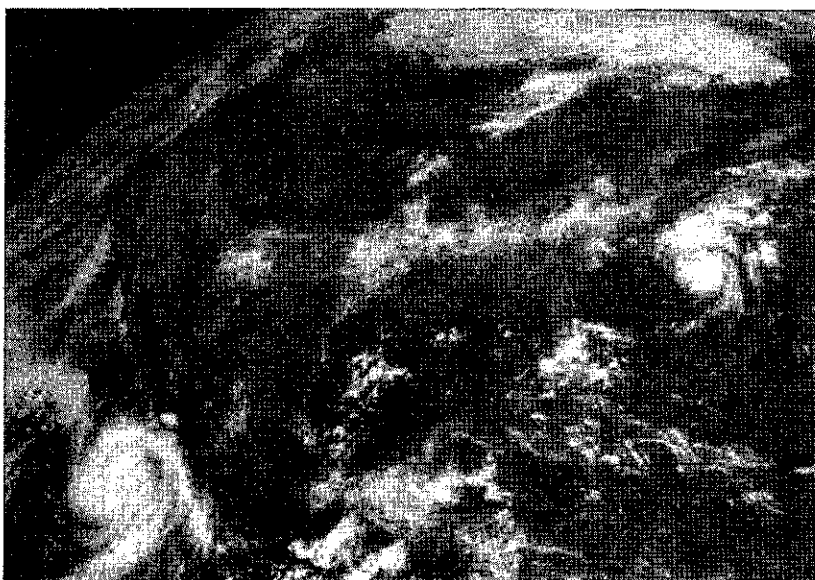
$$F' = ma' = (0.25 \text{ kg})(2.8 \text{ m/s}^2) = 0.70 \text{ N}$$

و جهت آن همان جهت a' است، یعنی به طرف جلوی کامیون. این نیرو که از دید S' خیلی واقعی است، از دید ناظر زمینی S وجود ندارد؛ چون S برای توضیح حرکت لغزک اصلاً نیازی به چنین نیرویی ندارد.

یکی از نمودهای اینکه شبه‌نیرو غیر نیوتونی است، این است که این نیرو قانون سوم نیوتون را نقض می‌کند. به مصداق قانون سوم نیوتون، S' باید نیروی عکس‌العملی پیدا کند که از لغزک بر جسمی دیگر وارد می‌شود. چنین نیروی عکس‌العملی نمی‌توان یافت؛ بنابراین، قانون سوم نیوتون نقض می‌شود.

شبه‌نیروها برای کسانی که تحت تأثیر این نیروها قرار می‌گیرند، کاملاً واقعی‌اند. تصور کنید در اتومبیلی نشسته‌اید که سر یک پیچ به چپ می‌پیچد. از دید ناظر زمینی، اتومبیل شتاب مرکزگرا دارد و بنابراین، یک چارچوب لخت است. اگر صندلیهای اتومبیل مثلاً از جنس وینیل و کم اصطکاک باشد، شما به طرف راست خواهید لغزید. از دید ناظر زمینی، که در یک چارچوب لخت است، این حرکت کاملاً طبیعی است؛ بدن شما فقط می‌خواهد از قانون اول نیوتون تبعیت کند و روی خط راست جلو برود؛ در واقع این اتومبیل است که زیر بدن شما به طرف چپ می‌لغزد. اما شما، در چارچوب لخت اتومبیل، ناچارید حرکت لغزشی‌تان را ناشی از شبه‌نیروی بداندید که شما را به طرف راست هل می‌دهد. این نوع شبه‌نیرو را نیروی مرکزگریز می‌نامند، یعنی نیرویی که در جهت دور شدن از مرکز عمل می‌کند.

اگر سوار چرخ‌فلک باشید هم در یک چارچوب شتابدار، و در نتیجه لخت، واقع شده‌اید. در این چارچوب (چرخ‌فلک چرخان در صفحه افقی)، به نظر می‌رسد که اجسام در اثر نیروی مرکزگریز، می‌خواهند به طرف خارج، یعنی در جهت دور شدن از محور دوران،



شکل ۱۸. مرکز کم فشاری بر زمین چرخان. با جریان یافتن هوا به طرف مرکز، ناظر نالخت در نیمکره شمالی می بیند که هوا در جهت پادساعتگرد می چرخد. گردباد (عکس سمت راست) چنین مرکز کم فشاری است.

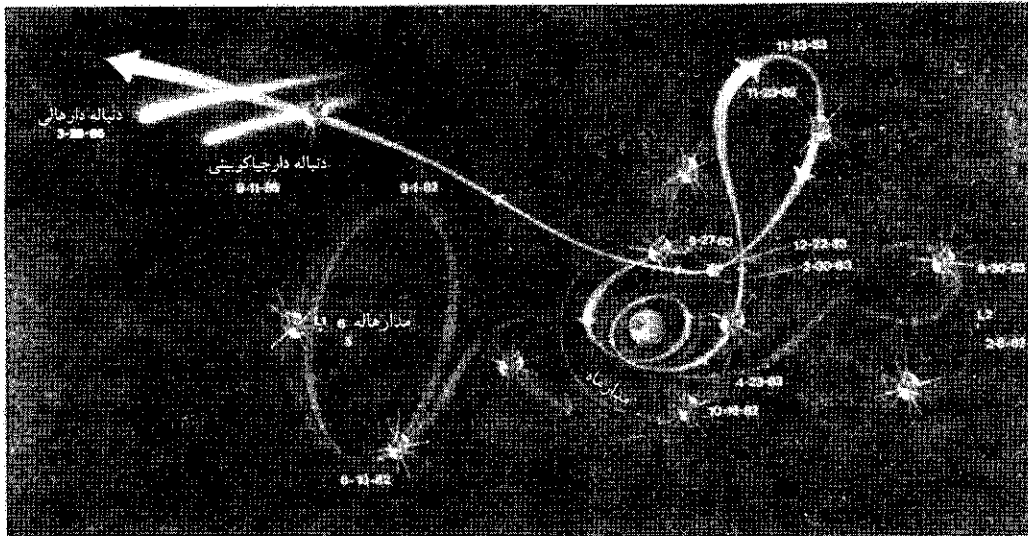
با توجه به آنچه گفته شد، در حل مسائل مکانیک دو راه پیش رو داریم: (۱) یک چارچوب لخت انتخاب کنیم و فقط نیروهای "حقیقی" را در نظر بگیریم، یعنی نیروهایی را که می شود به اجسام معینی در محیط نسبت داد، یا (۲) یک چارچوب نالخت انتخاب کنیم، و علاوه بر نیروهای "حقیقی" شبه نیروهایی مناسب را هم در نظر بگیریم. ما معمولاً روش اول را به کار می بریم، اما گاهی هم روش دوم را انتخاب می کنیم؛ دو روش کاملاً هم ارزند، و انتخاب بستگی به این دارد که در هر مورد کدام یک ساده تر یا مناسبتر است.

۹-۶ محدودیتهای قوانین نیوتون (اختیاری)

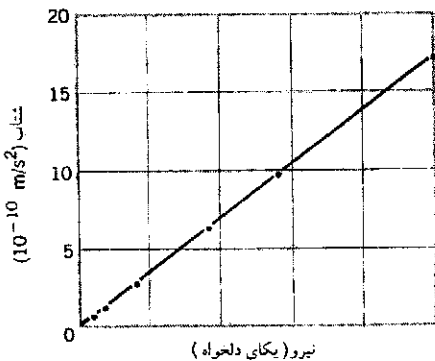
در شش فصل اول کتاب، نظامی برای تحلیل رفتار مکانیکی سیستمها توصیف کرده ایم که گستره کاربردهای آن بسیار وسیع است. برای طراحی آسمانخراشهایی عظیم و پلهای معلق، یا حتی برای محاسبه مسیرهای متنوع فضاپیماها در سفرهای بین سیارات (شکل ۱۹)، جز معادلات نیوتون عملاً به چیزهای خیلی بیشتری نیاز نیست. مکانیک نیوتونی، که ابزار محاسباتی لازم برای این کار را فراهم کرد، نخستین تحول واقعاً انقلابی در فیزیک نظری بود.

مثالی که ذکر می کنیم گویای اطمینانی است که می توانیم به قوانین نیوتون داشته باشیم. اغلب کپکشانها و خوشه های کپکشان در حال چرخش اند، و با رصد کردن می توان سرعت چرخششان را به دست آورد. از این اطلاعات می توانیم مقدار ماده ای را که باید در کپکشان یا خوشه موجود باشد تا گرانش حاصل از آن بتواند نیروی مرکزگرای لازم برای چرخش مشاهده شده را تأمین کنند محاسبه کنیم. اما مقدار ماده ای که واقعاً با تلسکوپ مشاهده می کنیم خیلی کمتر

ثابت روی خطی راست حرکت می کند، و این سرعت ثابت را مؤلفه های سرعت توپ در لحظه رها شدن (از دست شما) تعیین می کنند. شاید آشنا ترین مثال از آثار نیروی کوریولیس، حرکت جو حول مراکز کم فشاری یا پرفشار باشد. شکل ۱۸ نموداری مرکز کم فشار را در نیمکره شمالی نشان می دهد. چون فشار هوا در این مرکز از اطراف کمتر است، هوا از همه جهتها به طرف مرکز حرکت می کند. چون زمین می چرخد (و بنابراین، چارچوب نالخت است) پدیده ای شبیه به توپ و چرخ و فلک بالا به وجود می آید: هوایی که از جنوب به طرف مرکز می آید، کمی از خط فرضی ثابت، نسبت به زمین چرخان، جلو می افتد، و هوایی که از شمال می آید (مانند توپی که به طرف محیط چرخ و فلک در حرکت باشد) کمی از این خط عقب می ماند. نتیجه کلی این است که هوا در جهت پادساعتگرد حول مرکز کم فشار می چرخد. به این ترتیب، اثر کوریولیس است که باد را در پدیده های گردبادی به چرخش در می آورد. در نیمکره جنوبی، جهت این اثر معکوس می شود. در حرکت گلوله توپهای بلندبرد، لازم است که اثر کوریولیس ناشی از چرخش زمین به حساب آورده شود. برای گلوله ای نوعی به برد 10 km ، پدیده کوریولیس می تواند انحرافی به اندازه 2 m به وجود بیاورد. تصحیحات لازم برای از بین بردن این انحرافات، در برنامه های کامپیوتری ای که برای کنترل نشانه روی سلاحهای بلندبرد به کار می رود گنجانده شده است. اما گاهی هم اشتباه پیش می آید. مثلاً در یکی از نبردهای جنگ جهانی اول در نزدیکی جزایر فالکلند، چنین اشتباهی برای ناوگان بریتانیا اتفاق افتاد. دستورالعملهای آتش برای نیمکره شمالی نوشته شده بود، اما جزایر فالکلند در نیمکره جنوبی است، و تصحیحات کوریولیس باید برعکس باشد. گلوله های بریتانیاییها به حدود 100 m آن طرفتر از هدف اصابت می کردند، زیرا تصحیح کوریولیس در خلاف جهتی که باید انجام شده بود!



شکل ۱۹. یک پیروزی برای مکانیک نیوتونی. فضایی‌های "کاشف بین‌المللی سیارات" ۱ در سال ۱۹۷۸ به فضا پرتاب شد، ۴ سال در مداری حول نقطه L_1 باقی ماند و بادهای خورشیدی را بررسی کرد. سپس دم مغناطیسی زمین را در مداری در طرف شب زمین کشف کرد. در سال ۱۹۸۵ از دم دنباله‌دار "جیا کوبینی-زیر"، و در سال ۱۹۸۶ از دم دنباله‌دار هالی گذشت. این فضاییما فعلاً در سفری بین سیاره‌های است و در سال ۲۰۱۲ به نزدیکی زمین باز خواهد گشت. این کاشف سیاره‌های طی سفرش تا کنون ۳۷ موشک روشن کرده و ۵ بار از کنار ماه گذشته است.



شکل ۲۰. نتایج یکی از آزمایشهای جدید برای تعیین اینکه آیا قانون دوم نیوتون در شتابهای کوچک کمتر از 10^{-9} m/s^2 هم معتبر هست یا خیر. خط راست نشان می‌دهد که شتاب، تا حد 10^{-10} m/s^2 ، با نیروی اعمال شده متناسب است؛ یعنی قانون نیوتون حتی در این شتابهای کوچک هم برقرار است.

مقایسه با سرعت نور حرکت می‌کنند به کار برد. نسبیت عام نشان می‌دهد که قوانین نیوتون در حضور نیروهای گرانشی بسیار قوی معتبر نیست. مکانیک کوانتومی می‌گوید که قوانین نیوتون را نمی‌شود به قلمرو اجسامی به کوچکی اتم هم تعمیم داد.^۱

نسبیت خاص شامل دیدگاهی غیر نیوتونی از فضا و زمان است. این نظریه را در همه موارد، چه سرعتهای زیاد و چه سرعتهای کم، می‌توان به کار برد. می‌شود نشان داد که دینامیک نسبیت خاص در

از مقداری است که انتظار باید داشت. بنابراین، گفته شده است که مقداری "ماده تاریک" هم هست که نمی‌توانیم آن را با تلسکوپ ببینیم اما باید باشد تا میدان گرانشی مورد نیاز را تأمین کند. تا کنون توضیح قانع‌کننده‌ای درباره نوع یا ماهیت این ماده تاریک به دست نیامده، و بنابراین توجهات دیگری برای رفع این ناسازگاری میان مقدار واقعاً مشاهده شده ماده کهکشانیها و مقدار لازم برای برقراری قوانین نیوتون، ارائه شده است. یک توضیح آن است که محاسبات ما نادرست‌اند زیرا قوانین نیوتون در اوضاع و احوالی که در مقیاس بسیار بزرگ وجود دارد، یعنی برای شتابهای بسیار کوچک (کمتر از چند 10^{-10} m/s^2) برقرار نیستند. به خصوص پیشنهاد شده است که شاید در این شتابهای بسیار کوچک، نیرو با a^2 متناسب باشد نه با a .

شکل ۲۰ نتایج آزمایشی را نشان می‌دهد که اخیراً گزارش شده و هدف آن آزمودن این فرضیه است. اگر بستگی نیرو به شتاب، به شکل توانی جز ۱ باشد، داده‌های نمودار روی خط راست نمی‌افتند. از این آزمایش بسیار دقیق نتیجه می‌شود که، تا حد شتابهایی در حدود 10^{-10} m/s^2 ، نیرو متناسب با شتاب است و قانون دوم نیوتون برقرار است.

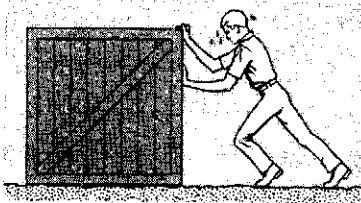
در قرن بیستم، سه تحول انقلابی دیگر هم داشته‌ایم: نظریه نسبیت خاص اینشتین (۱۹۰۵)، نظریه نسبیت عام اینشتین (۱۹۱۵)، و مکانیک کوانتومی (در حدود ۱۹۲۵). از نسبیت خاص معلوم می‌شود که نمی‌توان قوانین نیوتون را برای اجسامی هم که با سرعتهای قابل

1. International Planetary Explorer.

توانسته‌اند دو ویژگی کمر بند سیارکها را (که بین مدارهای مریخ و مشتری قرار دارد) توضیح بدهند. این ویژگیها را صرفاً در چارچوب مکانیک نیوتونی متعارف نمی‌شد توجیه کرد: (۱) بسیاری از سیارکها از مدارهایی که علی‌القاعده باید پایدار باشند خارج می‌شوند؛ برخی از این سیارکها همان شهابیایی می‌شوند که مدام بر زمین می‌بارند. (۲) در کمر بند سیارکها چندین ناحیه تهی وجود دارد که تعداد سیارکهای مدارگرد در آنجا کم یا صفر است. تازه در دهه گذشته (سالهای ۸۰)، به لطف کامپیوترهای بسیار سریع، امکان محاسبات مفصل چنین سیستمهایی تا زمانهای لازم برای مشاهده این رفتارهای غیرعادی، فراهم شده است. با انجام محاسبات بیشتر، به تدریج کاربردهای دیگری هم از این مقوله هیجان‌انگیز کشف می‌شود.

پرسشها

۱. حدی وجود دارد که اگر سطحی را از آن بیشتر صیقل بدهند، مقاومت اصطکاکی به جای کم شدن زیاد می‌شود. چرا؟
۲. صندوقی سنگین‌تر از شما روی زمین افقی ناهمواری قرار دارد (شکل ۲۱). ضریب اصطکاک میان صندوق و زمین همان ضریب اصطکاک میان کفش شما و زمین است. آیا می‌توانید صندوق را روی این زمین هل بدهید؟^۱



شکل ۲۱. پرسش ۲

۳. در بازی بیسبال، دونده معمولاً با دویدن سریعتر حرکت می‌کند تا با سر خوردن. چرا؟ در این صورت دونده اصلاً چرا سر می‌خورد؟
۴. چگونه شخصی که روی آبگیر یخ بسته کاملاً بدون اصطکاک ایستاده است، می‌تواند خودش را به ساحل برساند؟ آیا این شخص می‌تواند با راه رفتن، غلتیدن، تاب دادن دستها، یا لگد پراندن موفق شود؟ اصولاً چگونه می‌توان شخصی را در چنین وضعیتی قرار داد؟
۵. چرا لاستیکهای اتومبیل موقع حرکت بر سطح افقی بهتر به زمین می‌چسبند تا موقع بالا رفتن یا پایین آمدن از شیب؟

۱. رجوع کنید به

حد سرعتهای کم، به همان قوانین نیوتون می‌انجامد. نظریه نسبیت عام را، هم برای نیروهای گرانشی قوی و هم برای نیروهای گرانشی ضعیف می‌توان به‌کار گرفت، اما معادلات آن در حد میدانهای ضعیف به همان قوانین نیوتون تحویل می‌شوند. از مکانیک کوانتومی می‌توانیم هم برای تک‌تک اتمها و هم برای اجسام معمولی که تعداد بسیار زیادی اتم دارند استفاده کنیم؛ در مورد اول کترگی معینی در رفتار سیستم پیش‌بینی می‌شود، و در مورد دوم، میانگین این رفتار کتره‌ای برای تعداد فوق‌العاده‌ای از ذرات، باز هم به همان قوانین نیوتون منجر می‌شود.

طی دهه گذشته، تحول ظاهراً انقلابی دیگری هم رخ داده است. این پیشرفت مربوط به سیستمهای مکانیکی‌ای است که رفتارشان را با واژه آشوبناک توصیف می‌کنند. یکی از مهمترین ویژگیهای قوانین نیوتون قابلیت آنها در پیش‌بینی رفتار آینده سیستم است، البته اگر شرایط اولیه و نیروهای عامل حرکت معلوم باشند. مثلاً اگر مکان و سرعت اولیه فضاپیمایی را که تحت اثر نیروی گرانشی معین خورشید و سیارات دیگر است بدانیم، می‌توانیم مسیر دقیق آن را محاسبه کنیم. اما حالا ترکه‌ای را در نظر بگیرید که در یک نهر متلاطم شناور است. این ترکه هم همواره تحت تأثیر نیروهایی است که از قوانین نیوتون تبعیت می‌کنند، اما مسیر آن به طرف پایین نهر کاملاً غیر قابل پیش‌بینی است. اگر دو ترکه را کنار هم در این نهر بیندازیم، در پایین نهر ممکن است خیلی از هم جدا شده باشند. مشخصه مهم دینامیک آشوبناک آن است که تغییرات بسیار کوچکی در شرایط اولیه می‌توانند به شدت تقویت شوند و به تفاوت‌های بسیار بزرگی در نتایج پیش‌بینی شده بینجامند. دینامیک آشوبناک خیلی وقتها در پیش‌بینی هوا به‌کار می‌آید، و گفته شده است که بال زدن پروانه‌ای در ژاپن می‌تواند با تشکیل گردبادی در خلیج مکزیک مرتبط باشد.

چنین رفتارهای آشوبناکی مختص سیستمهای پیچیده‌ای مثلاً نهر متلاطم نیست، بلکه در سیستمهای ساده‌ای مثل آونگ، شیر آبی که به آرامی چکه می‌کند، یا در مدارهای الکتریکی نوسانی هم مشاهده می‌شود. در دهه ۱۹۶۰ معلوم شد که رفتار به ظاهر آشوبناک این سیستمها نوعی نظم و قاعده‌مندی پنهان در بر دارد، و مطالعه این نظم هسته یک شاخه جدید علم، آشوب، را تشکیل داده است.^۱ قوانین آشوب، نه تنها در سیستمهای فیزیکی بلکه در سیستمهای زیست‌شناختی هم به‌کار برده شده‌اند. رفتار آشوبناک حتی در بعضی شاخه‌های حیطة علوم اجتماعی مثل اقتصاد و دینامیک جمعیت هم مشاهده می‌شود.

از محاسباتی که بر مبنای تلفیقی از قوانین نیوتون و نظریه آشوب صورت گرفته معلوم شده است که مدار سیاره پلوتون، در مقیاس زمانی چند ده میلیون سال، آشوبناک است (این زمان در مقایسه با سن منظومه شمسی، در حدود ۴٫۵ میلیارد سال، کوتاه است اما در مقایسه با زمان تناوب مدار پلوتون به دور خورشید، در حدود ۲۵۰ سال، طولانی است). به کمک نظریه آشوب همچنین

شناور مانده و با سقف در تماس است. در هر یک از حالت‌های زیر چه بر سر این دو جسم می‌آید؟ (الف) اگر با سرعت ثابت بیچید و (ب) اگر ترمز کنید.

۱۸. اثر مقاومت هوا را بر زاویه برد پیشینه پرتابه بررسی کنید.
۱۹. قطره‌های درشت‌تر باران سریعتر سقوط می‌کنند یا قطره‌های ریزتر؟

۲۰. سرعت حد توپ بیسبال 95 mi/h است. اما سرعتی که برای توپ‌های پرتاب شده اندازه‌گیری می‌شود اغلب بیش از این است و به حدود 100 mi/h هم می‌رسد. چطور چنین چیزی ممکن است؟

۲۱. حرکت جسمی را توصیف کنید که با سرعتی بیش از سرعت حد خودش، در راستای قائم به طرف پایین پرتاب می‌شود.

۲۲. کنده‌ای روی نهری شناور است و به طرف پایین رود حرکت می‌کند. چگونه می‌توانید نیروی مقاومت اصطکاکی وارد بر آن را به دست بیاورید؟

۲۳. دو جسم به جرم‌های متفاوت را همزمان از بالای برجی رها می‌کنیم. نشان بدهید که اگر مقاومت هوا برای هر دو جسم ثابت و یکسان فرض شود، جسمی که جرم بیشتری دارد زودتر به زمین می‌رسد. این فرض تا چه حدی موجه است؟

۲۴. چرا در جدول ۲ "مسافت ۹۵٪" را آورده‌ایم نه "مسافت ۱۰۰٪" را؟

۲۵. چرخش زمین چه اثری بر وزن ظاهری اجسام در استوا دارد؟

۲۶. توضیح بدهید که چرا شاقول در بیشتر عرض‌های جغرافیایی دقیقاً در راستای جاذبه گرانشی زمین قرار نمی‌گیرد؟

۲۷. فضانوردان در فضاپیمايي که در مدار است می‌خواهند وزن خود را روزانه ثبت کنند. با توجه به "بی‌وزنی" این فضانوردان، می‌توانید تصور کنید که این کار چگونه ممکن است؟

۲۸. چرا پرسش "سرعت خطی نقطه‌ای بر استوا چقدر است؟" به فرضی درباره چارچوب مرجع به‌کار رفته نیاز دارد؟ نشان بدهید که چگونه با تغییر چارچوب مرجع، جواب هم تغییر می‌کند؟

۲۹. چه تمایزی بین چارچوب‌های مرجع لخت و چارچوب‌های دیگری فقط محورهایشان نسبت به چارچوب‌های اولیه منتقل شده یا چرخیده است وجود دارد؟

۳۰. مسافری در صندلی جلوی اتومبیلی نشسته است. راننده ناگهان به چپ می‌پیچد و مسافر به طرف در می‌لغزد. نیروهای وارد بر مسافر و اتومبیل در این لحظه را از دید چارچوب مرجع (الف) متصل به زمین و (ب) متصل به اتومبیل بررسی کنید.

۳۱. آیا در بازی تنیس یا گلف باید نیروی کوریولیس را هم در نظر گرفت؟ اگر نه، چرا؟

۳۲. در بالکن یک برج مرتفع، به طرف شرق ایستاده‌اید و جسمی را رها می‌کنید تا در پای برج به زمین برخورد (شکل ۲۲). (فرض کنید که می‌توانید محل برخورد را با دقت زیاد بسنجید.) آیا جسم به نقطه a ، درست در زیر نقطه رها شدنش می‌خورد،

۶. پشت اتومبیل‌های مسابقه سطوح خمیده‌ای (به نام "اسپویلر") نصب می‌کنند. طراحی این سطوح چنان است که هوایی که از آنها می‌گذرد نیرویی رو به پایین تولید می‌کند. این کار چه فایده‌ای دارد؟

۷. دو سطح با هم تماس دارند، اما نسبت به هم ساکن‌اند. با وجود این به هم نیروی اصطکاک وارد می‌کنند. چرا؟

۸. اتومبیل شما در جاده یخزده‌ای سر می‌خورد و کمی وارد باند مخالف می‌شود. در هر یک از موارد زیر آیا بهتر است چرخ‌های جلو را در همان جهت لغزش بچرخانید یا در خلاف جهت آن؟ (الف) اگر بخواهید از تصادف با اتومبیلی که از روبرو رو می‌آید اجتناب کنید و (ب) اگر اتومبیل دیگری در آن نزدیکی نباشد و بخواهید که دوباره کنترل اتومبیل را به دست بیاورید. اتومبیل را "با چرخ‌های محرک در عقب" و بعد "با چرخ‌های محرک در جلو" در نظر بگیرید.

۹. چرا اتومبیل‌های مسابقه هنگام گذشتن از پیچ سرعتشان را زیاد می‌کنند؟

۱۰. در هواپیمایی در ارتفاع ثابت در پروازید و می‌خواهید یک دور 90° بزنید. چرا باید هواپیما را کج کنید تا بتوانید دور بزنید؟

۱۱. وقتی یک سگ خیس خودش را می‌تکاند، کسانی که نزدیک به او ایستاده‌اند ممکن است خیس بشوند. چرا آب از سگ این‌طور به اطراف می‌چهد؟

۱۲. شاید توجه کرده باشید (اینشتین توجه کرده بود) که وقتی چای را در فنجان به هم می‌زنید، تقاله‌های چای در وسط فنجان جمع می‌شوند نه در لبه آن. آیا می‌توانید این پدیده را توضیح بدهید؟ (اینشتین توانسته بود.)

۱۳. می‌خواهید تعیین کنید که سطح میزی که در قطاری قرار دارد واقعاً افقی هست یا نه. آیا با استفاده از یک تراز (محتوی حباب در مایع) می‌توانید در حالتی که قطار از شیبی بالا یا پایین می‌رود این کار را انجام بدهید؟ اگر قطار در حال بیچیدن باشد چطور؟ (راهنمایی: دو مؤلفه افقی وجود دارد.)

۱۴. در آونگ مخروطی، زمان تناوب و سرعت گلوله آونگ به‌ازای $\theta = 90^\circ$ چه می‌شود؟ چرا این زاویه از نظر فیزیکی غیرممکن است؟ در مورد حالت $\theta = 0^\circ$ هم توضیح بدهید.

۱۵. سکه‌ای روی صفحه گردان گرامافونی قرار دارد. موتور گرامافون را روشن می‌کنیم. پیش از آنکه گرامافون به سرعت نهایی خود برسد، سکه به خارج پرتاب می‌شود. چرا؟

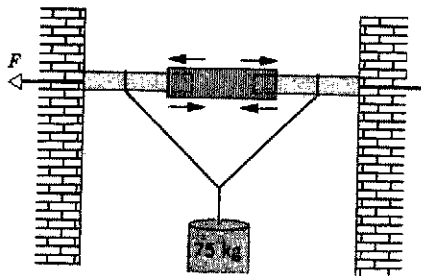
۱۶. اتومبیلی در جاده‌ای که پستی و بلندی دارد حرکت می‌کند. فرض کنید سرعت اتومبیل ثابت باشد. نیرویی را که اتومبیل در بخش افقی به جاده وارد می‌کند، با نیروی وارد از اتومبیل به جاده در بخش‌های "بلندی" و "پستی" مقایسه کنید و در این باره توضیح بدهید.

۱۷. اتومبیلی را با سرعت ثابت در بزرگراهی می‌رانید. تویی روی کف اتومبیل در حالت سکون است و بادکنکی پر از هلیوم در بالای توپ



شکل ۲۳. مسئله ۴

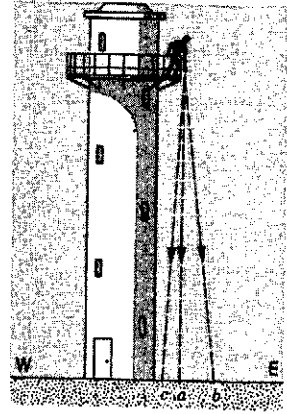
۵. یک میله افقی برای نگه داشتن جسمی به جرم 75kg بین دو دیوار کار گذاشته شده است. شکل ۲۴. نیروهای یکسان F را، که میله بر دیوارها وارد می‌کند، می‌توان با کم و زیاد کردن طول میله تغییر داد. فقط اصطکاک بین دو سر میله با دیوارهاست که سیستم را نگه می‌دارد. ضریب اصطکاک ایستایی میان میله و دیوار 0.41 است. کمترین مقدار نیروی F برای برقراری تعادل چقدر است؟



شکل ۲۴. مسئله ۵

۶. کنده‌ای به وزن 531b (یعنی 240N) روی زمین ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان کنده و زمین 0.41 ، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو 0.32 است. (الف) کمترین نیروی افقی‌ای که می‌تواند کنده را به حرکت در بیاورد چقدر است؟ (ب) پس از شروع حرکت، چه نیروی افقی‌ای باید اعمال کرد تا کنده با سرعت ثابت به حرکتش ادامه بدهد. (ج) اگر، به جای این نیرو، همان نیروی اولیه (لازم برای شروع حرکت) همچنان به کنده اثر کند چه شتابی به آن می‌دهد؟ ۷. ضریب اصطکاک ایستایی میان لاستیکهای یک اتومبیل و جاده خشک 0.62 است. جرم اتومبیل 1500kg است. (الف) روی جاده

یا به نقطه b متمایل به شرق، یا به نقطه c متمایل به غرب؟ جسم را از حالت سکون رها کرده‌اید، و زمین از غرب به شرق می‌چرخد.



شکل ۲۲. برش ۲۲

۳۳. با استدلال کیفی نشان بدهید که، به علت چرخش زمین، بادی که در نیمکره شمالی از شمال به جنوب بوزد به طرف راست منحرف می‌شود. بادی که از جنوب به شمال بوزد چطور؟ اوضاع در نیمکره جنوبی چگونه خواهد بود؟

مسئله‌ها

بخش ۶-۲ نیروی اصطکاک

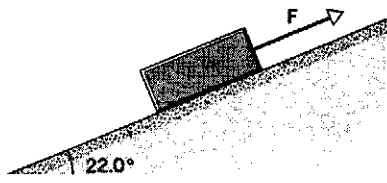
۱. ضریب اصطکاک ایستایی بین تفلون و خاکینه در حدود 0.4 است. کف (افقی) یک ماهیتابه تفلون را حداقل باید چند درجه کج کرد تا خاکینه روی آن بلغزد؟

۲. فرض کنید فقط چرخهای عقب اتومبیل می‌توانند به آن شتاب بدهند، و این چرخها نیمی از وزن اتومبیل را تحمل می‌کنند. (الف) اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده μ_s باشد، بیشترین شتابی که اتومبیل می‌تواند بگیرد چقدر است؟ (ب) μ_s را برابر با 0.56 بگیرید و یک مقدار برای این شتاب محاسبه کنید.

۳. ضریب اصطکاک ایستایی بین پیست و کفشهای دوندۀ ای 0.95 است. بیشترین شتابی که این دونده می‌تواند بگیرد چقدر است؟

۴. یک بازیکن بیسبال (شکل ۲۳) به جرم 79kg در پایان یک حرکت روی زمین سر می‌خورد و حرکتش با نیروی اصطکاک 470N کند می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی بین این بازیکن و زمین چقدر است؟

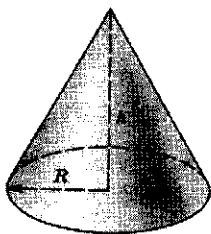
F برای به حرکت درآوردن جسم به طرف بالای سطح شیبدار چقدر است؟ (ج) حداقل نیروی F برای اینکه جسم با سرعت ثابت به طرف بالای سطح شیبدار حرکت کند چقدر است؟



شکل ۲۷. مسئله ۱۱

۱۲. دانشجویی می‌خواهد ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین یک جعبه و یک تخته را به دست بیاورد. جعبه را روی تخته می‌گذارد و یک سر تخته را کم‌کم بلند می‌کند. هنگامی که زاویه شیب تخته با سطح افقی 28° می‌شود، جعبه شروع به لغزیدن می‌کند و طی 3.925 مسافت 2.53 m را روی سطح شیبدار طی می‌کند. ضرایب اصطکاک را پیدا کنید.

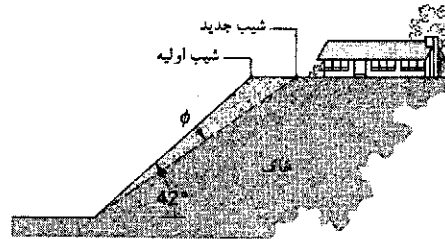
۱۳. کارگری می‌خواهد مقداری ماسه را در ناحیه‌ای دایره‌ای شکل روی هم انباشته کند؛ شعاع دایره R است و هیچ ماسه‌ای نباید به ناحیه خارج از دایره بریزد (شکل ۲۸). نشان بدهید که بیشترین حجم ماسه‌ای که به این ترتیب می‌توان انباشته کرد $\frac{\pi \mu_s R^3}{3}$ است، که در آن μ_s ضریب اصطکاک ایستایی ماسه با ماسه است. (حجم مخروطی به مساحت قاعده A و ارتفاع h ، $Ah/3$ است.)



شکل ۲۸. مسئله ۱۳

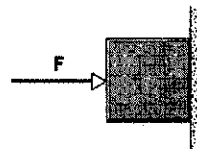
۱۴. گرمای ناشی از اصطکاک، که در اثر حرکت اسکی ایجاد می‌شود، عامل اصلی لغزیدن اسکی روی برف است. اسکی در شروع کار به برف می‌چسبد، اما در اثر حرکت، برف زیر آن ذوب می‌شود. با موم زدن به اسکی، اصطکاک میان اسکی و لایه آب کم می‌شود. مجله‌ای گزارش کرده است که نوع جدیدی اسکی پلاستیکی، از موم هم کم اصطکاک‌تر است و یک اسکی‌باز با این اسکی روی شیب ملایمی به طول 23 m در آلپ، توانسته است رکورد خودش را از 615 به 425 کاهش بدهد. با فرض اینکه زاویه شیب 3° باشد، ضریب اصطکاک جنبشی را برای دو نوع اسکی حساب کنید.

افقی و (ب) روی جاده‌ای با شیب 8.6° به طرف پایین، حداکثر چه نیروی ترمزی می‌توان اعمال کرد؟
۸. خانه‌ای بر فراز تپه‌ای ساخته شده است. شیب دامنه تپه 42° است. ریزش دامنه نشان می‌دهد که شیب را باید کم کرد. اگر ضریب اصطکاک خاک بر خاک 0.55 باشد، شیب را به اندازه چه زاویه‌ای (ϕ) باید کمتر کرد (شکل ۲۵)؟



شکل ۲۵. مسئله ۸

۹. نیروی افقی F به مقدار $121b$ ، جسمی به وزن $50b$ را به یک دیوار قائم می‌فشارد (شکل ۲۶). ضریب اصطکاک ایستایی میان دیوار و جسم 0.6 ، و ضریب اصطکاک جنبشی میان این دو 0.4 است. فرض کنید جسم در ابتدا ساکن است. (الف) آیا جسم شروع به حرکت می‌کند؟ (ب) دیوار چه نیرویی به جسم وارد می‌کند؟



شکل ۲۶. مسئله ۹

۱۰. صندوقی به جرم 136 kg روی زمین ساکن است. مردی می‌خواهد با نیروی افقی 412 N آن را به حرکت در بیاورد. (الف) فرض کنید ضریب اصطکاک ایستایی میان صندوق و زمین 0.37 است. نشان بدهید که صندوق حرکت نمی‌کند. (ب) مرد دیگری، برای کمک به اولی، صندوق را به طرف بالا می‌کشد. این دومی حداقل باید چه نیرویی به طرف بالا وارد کند تا صندوق روی زمین به راه بیفتد؟ (ج) اگر دومی، به جای نیروی قائم، یک نیروی افقی به صندوق وارد کند، حداقل چه نیرویی، علاوه بر نیروی شخص اول، باید وارد کند تا صندوق شروع به حرکت کند؟

۱۱. جسمی به جرم 796 kg روی سطحی با شیب 22° نسبت به افق قرار دارد (شکل ۲۷). ضریب اصطکاک ایستایی 0.25 ، و ضریب اصطکاک جنبشی 0.15 است. (الف) حداقل نیروی F ، موازی با سطح شیبدار، برای جلوگیری از لغزیدن جسم روی سطح چقدر است؟ (ب) حداقل نیروی

۱۵. جسمی با سرعت ثابت روی سطح شیب‌داری به زاویه θ به پایین می‌لغزد. همین جسم را با سرعت اولیه v_0 به طرف بالای سطح شیب‌دار پرتاب می‌کنیم. (الف) جسم تا چه مسافتی بالا می‌رود؟ (ب) آیا باز به پایین برمی‌گردد؟

۱۶. قطعه‌ای یخ در حالت سکون روی سطح شیب‌داری به زاویه 33° که با یخ اصطکاک دارد، شروع به لغزش می‌کند و مسافت معینی را می‌پیماید. زمان پیمودن این مسافت دو برابر زمانی است که برای پیمودن همان مسافت روی سطح شیب‌داری با همان شیب، اما بدون اصطکاک، لازم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین یخ و سطح شیب‌دار ناهموار چقدر است؟

۱۷. در شکل ۲۹ جرم A برابر با 4.4 kg و جرم B برابر با 2.6 kg است. ضرایب اصطکاک ایستایی و جنبشی میان A و میز، به ترتیب، 0.18 و 0.15 است. (الف) جسم C را روی A می‌گذاریم تا مانع لغزش آن شود. (الف) حداقل جرم C چقدر باشد تا A نلغزد؟ (ب) C را به ناگهان از روی A برمی‌داریم. شتاب A چقدر می‌شود؟

۱۸. جسمی به جرم 4.8 kg روی سطح شیب‌داری به زاویه 39° است و نیروی افقی 46 N بر آن وارد می‌شود (شکل ۳۰). ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح 33° است. (الف) اگر جسم در حال حرکت به طرف بالای سطح شیب‌دار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت اولیه جسم 4.3 m/s باشد، و نیروی افقی هم دائماً بر آن اثر کند، جسم تا چه مسافتی روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ج) پس از اینکه جسم به بالاترین نقطه مسیر خود رسید، چه بر سرش می‌آید؟

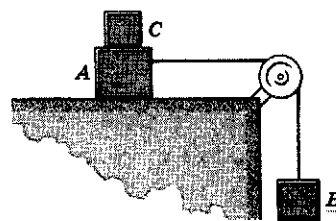


شکل ۳۱. مسئله ۲۰

۲۱. کارگری صندوقی به وزن 150 lb را به کمک طنابی روی زمین می‌کشد. طناب با سطح افقی زاویه 17° می‌سازد. ضریب اصطکاک ایستایی 0.52 و ضریب اصطکاک جنبشی 0.35 است. (الف) چه کششی در طناب لازم است تا صندوق شروع به حرکت کند. (ب) شتاب اولیه صندوق چقدر است؟

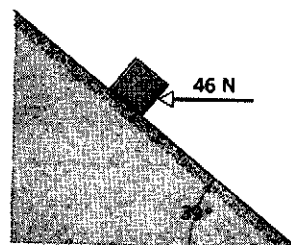
۲۲. از سیمی که فقط تحمل 1.22 kN کشش را دارد برای کشیدن جعبه‌ای روی زمین استفاده می‌کنیم. حداکثر وزن جعبه‌ای که با این سیم می‌توانیم بکشیم چقدر می‌تواند باشد؟ ضریب اصطکاک ایستایی 0.35 است، و سیم را الزاماً افقی به‌کار نمی‌بریم.

۲۳. شکل ۳۲ مقطع جاده‌ای را نشان می‌دهد که روی دامنه کوهی ساخته شده است. خط AA' نماینده صفحه بستر سستی است که روی آن امکان لغزش وجود دارد (صفحه شکست). قطعه B بلافاصله بالایی جاده، توسط یک شکاف بزرگ (مفصل) از صخره‌های بالایی تپه جدا شده است، بنابراین فقط نیروی اصطکاک بین این قطعه و صفحه احتمالی "شکست" است که مانع لغزش می‌شود. جرم قطعه



شکل ۲۹. مسئله ۱۷

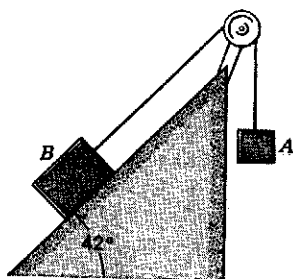
۳۰. جسمی به جرم 4.8 kg روی سطح شیب‌داری به زاویه 39° است و نیروی افقی 46 N بر آن وارد می‌شود (شکل ۳۰). ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح 33° است. (الف) اگر جسم در حال حرکت به طرف بالای سطح شیب‌دار باشد، شتاب آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت اولیه جسم 4.3 m/s باشد، و نیروی افقی هم دائماً بر آن اثر کند، جسم تا چه مسافتی روی سطح شیب‌دار بالا می‌رود؟ (ج) پس از اینکه جسم به بالاترین نقطه مسیر خود رسید، چه بر سرش می‌آید؟



شکل ۳۰. مسئله ۱۸

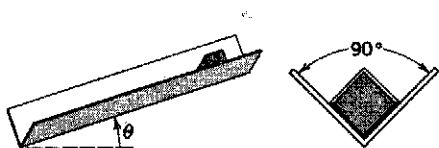
۱۹. جسمی فولادی به جرم 12 kg روی میزی افقی ساکن است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و میز 0.52 است. (الف) اندازه

اصطکاک جنبشی میان آنها 0.25 است. (الف) شتاب B ، در حال حرکت به طرف بالا، چقدر است؟ (ب) شتاب B ، در حال حرکت به طرف پایین، چقدر است؟ زاویه سطح شیبدار 42° است.



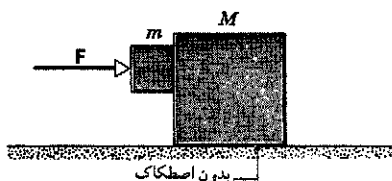
شکل ۳۵. مسئله ۲۶

۲۷. جعبه‌ای در ناودان شیب‌داری با مقطع قائم‌الزاویه، به طرف پایین می‌لغزد (شکل ۳۶). ضریب اصطکاک جنبشی میان جعبه و سطح داخلی ناودان μ_k است. شتاب جعبه چقدر است؟



شکل ۳۶. مسئله ۲۷

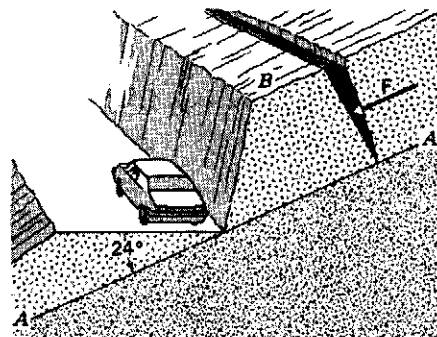
۲۸. در شکل ۳۷، $m = 16\text{kg}$ و $M = 88\text{kg}$ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم $\mu_s = 0.38$ است، اما M با سطح زیرینش اصطکاک ندارد. نیروی افقی F حداقل باید چقدر باشد تا m نسبت به M ساکن بماند؟



شکل ۳۷. مسئله ۲۸

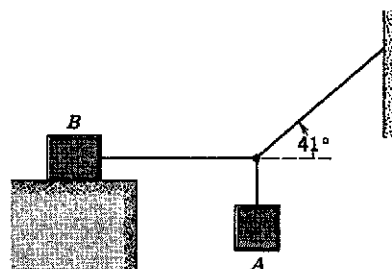
۲۹. روی یک سطح شیب‌دار، دو جسم به جرمهای $m_1 = 1.65\text{kg}$ و $m_2 = 3.22\text{kg}$ با میله‌ای بی‌جرم به هم متصل‌اند. میله با سطح موازی است (شکل ۳۸). این مجموعه به طرف پایین سطح شیب‌دار می‌لغزد، چنان‌که m_1 به دنبال m_2 حرکت می‌کند. زاویه سطح شیب‌دار 29.5° است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_1 و سطح شیب‌دار 0.226 و بین m_2 و سطح شیب‌دار 0.127 است. (الف) شتاب مشترک دو جسم و (ب) کشش میله را به دست بیاورید. (ج) اگر جای m_1 و m_2 را عوض کنیم چه تغییری در

$1.8 \times 10^2\text{kg}$ ، زاویه صفحه شکست 24° پایین‌تر از سطح جاده، و ضریب اصطکاک ایستایی میان قطعه و صفحه 0.63 است. (الف) نشان بدهید که قطعه نمی‌لغزد. (ب) اگر آب در مفصل جمع شود و نیروی هیدروستاتیکی F را در راستای موازی با شیب قطعه بر آن وارد کند، حداقل نیروی F لازم برای لغزش قطعه چقدر است؟



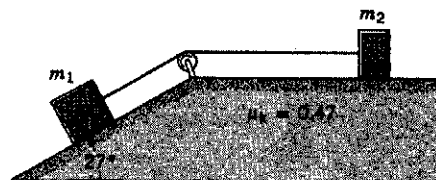
شکل ۳۲. مسئله ۲۳

۲۴. در شکل ۳۳، وزن جسم B برابر با 712N است. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم B و میز 0.25 است. حداکثر وزن A چقدر باشد تا سیستم از حالت تعادل خارج نشود؟



شکل ۳۳. مسئله ۲۴

۲۵. در شکل ۳۴، جرم m_1 برابر با 420kg و جرم m_2 برابر با 230kg است. ضریب اصطکاک جنبشی بین m_2 و سطح افقی 0.47 است. سطح شیب‌دار اصطکاک ندارد. (الف) شتاب اجسام و (ب) کشش ریسمان را پیدا کنید.



شکل ۳۴. مسئله ۲۵

۲۶. در شکل ۳۵، وزن B برابر با 94lb و وزن A برابر با 29lb است. ضریب اصطکاک ایستایی میان B و سطح 0.56 ، و ضریب

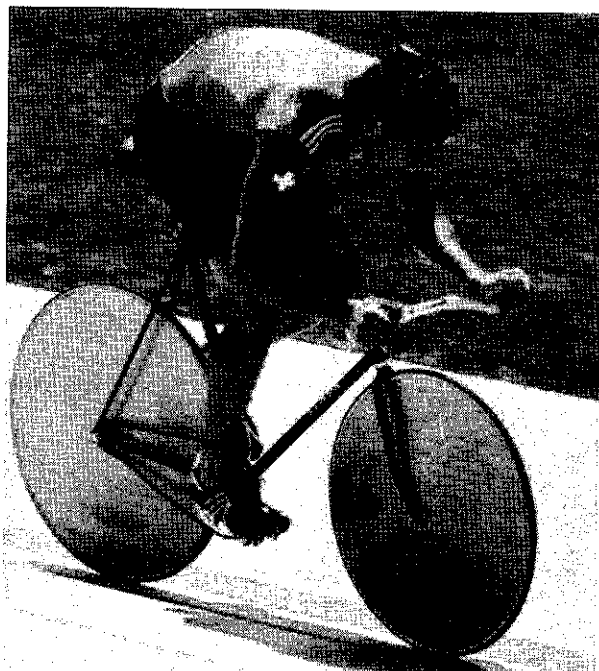
به شعاع 200 ft (یعنی 61 m) که شیب عرضی ندارد بگذرد. (الف) نیروی اصطکاک لازم برای اینکه اتومبیل بر دایره بماند چقدر است؟ (ب) حداقل ضریب اصطکاک لازم بین لاستیکها و جاده، برای تأمین این نیرو، چقدر است؟

۳۴. پیچ دایره‌ای شکل بزرگراهی برای سرعت 60 km/h (یعنی 37 mi/h) طراحی شده است. (الف) اگر شعاع پیچ 150 m (یعنی 490 ft) باشد، زاویه صحیح شیب عرضی چقدر است؟ و (ب) اگر پیچ شیب عرضی نداشته باشد، حداقل ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده چقدر باشد تا اتومبیلهایی که با این سرعت از پیچ می‌گذرند نلغزند؟

۳۵. دارید اتومبیلتان را با سرعت 85 km/h می‌رانید که متوجه مانعی در جاده می‌شوید که 62 m جلوتر از شماست. (الف) برای اینکه بتوانید پیش از مانع متوقف بشوید، ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باید باشد؟ (ب) فرض کنید که دارید در پارکینگ خالی و وسیعی با سرعت 85 km/h می‌رانید. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا بتوانید با اتومبیل روی دایره‌ای به شعاع 62 m حرکت کنید (تا به دیواری که 62 m جلوی شماست برخورد نکنید)؟

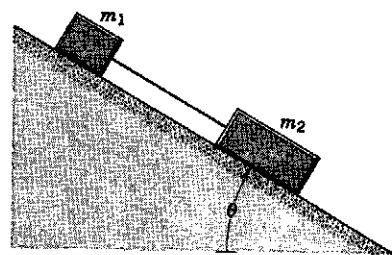
۳۶. یک آونگ مخروطی وزنه‌ای به جرم 53 g دارد که به ریسمانی به طول 14 m متصل است. وزنه آونگ روی دایره‌ای به شعاع 25 cm حرکت می‌کند. (الف) سرعت وزنه چقدر است؟ (ب) شتاب آن چقدر است؟ (ج) کشش ریسمان چقدر است؟

۳۷. دوچرخه‌سواری (شکل ۴۱) دایره‌ای به شعاع 25 m را با سرعت ثابت 8.7 m/s می‌پیماید. جرم مجموعه دوچرخه و دوچرخه‌سوار 85 kg است. نیرویی را که جاده بر دوچرخه وارد می‌کند (مقدار و زاویه با راستای قائم را) محاسبه کنید.



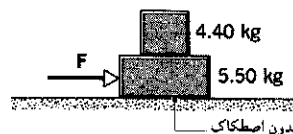
شکل ۴۱. مسئله ۳۷

جوابهای (الف) و (ب) به وجود می‌آید؟



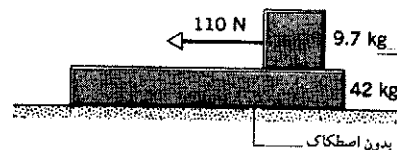
شکل ۳۸. مسئله ۲۹

۳۰. جسمی به جرم 440 kg روی جسم دیگری به جرم 505 kg قرار دارد. برای اینکه جسم رویی روی جسم زیری بلغزد (در حالی که جسم زیری ثابت نگه داشته شده است)، باید نیروی افقی به اندازه 120 N بر جسم رویی وارد شود. مجموعه دو جسم را روی میزی افقی و بدون اصطکاک می‌گذاریم (شکل ۳۹). (الف) حداکثر نیروی افقی F که می‌توان بر جسم زیرین وارد کرد تا دو جسم با هم حرکت کنند چقدر است؟ (ب) شتاب دو جسم، به ازای این نیرو، چقدر است؟ (ج) ضریب اصطکاک ایستایی بین دو جسم را پیدا کنید.



شکل ۳۹. مسئله ۳۰

۳۱. تیغه‌ای به جرم 42 kg روی یک سطح بدون اصطکاک واقع شده است. جسمی به جرم 9.7 kg روی ورقه قرار دارد (شکل ۴۰). ضریب اصطکاک ایستایی بین جسم و تیغه 0.53 ، و ضریب اصطکاک جنبشی میان آنها 0.38 است. به جسم 9.7 کیلوگرمی نیرویی افقی به اندازه 110 N وارد می‌شود. (الف) شتاب جسم و (ب) شتاب تیغه چقدر است؟



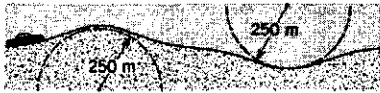
شکل ۴۰. مسئله ۳۱

بخش ۳-۶ دینامیک حرکت دایره‌ای یکنواخت

۳۲. در یک مسابقه لوژسواری در المپیک، یک تیم اروپایی پیچی به شعاع 25 ft را با سرعت 60 mi/h می‌پیماید. شتاب مسابقه‌دهنده‌ها (الف) بر حسب ft/s^2 و (ب) بر حسب یکای g چقدر است؟

۳۳. اتومبیلی به وزن 2400 lb (یعنی 107 kN)، که با سرعت 30 mi/h (یعنی 13.4 m/s) حرکت می‌کند، می‌خواهد از پیچی

راست نمی‌پیچد اما پستی و بلندی دارد، حرکت می‌کند. بخشی از این جاده یک ناحیه برآمدگی و یک ناحیه فرورفتگی دارد که شعاع هر دو ناحیه 250 m است (شکل ۴۳). (الف) هنگامی که اتومبیل از برآمدگی می‌گذرد، نیروی عمودی وارد بر آن از جاده نصف وزن اتومبیل است. وزن اتومبیل 16 kN است. نیروی عمودی وارد بر اتومبیل هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟ (ب) حداکثر سرعت اتومبیل، برای اینکه هنگام گذشتن از برآمدگی از جاده جدا نشود، چقدر می‌تواند باشد؟ (ج) اگر اتومبیل با سرعت قسمت (ب) حرکت کند، نیروی عمودی وارد بر آن، هنگام گذشتن از فرورفتگی چقدر است؟

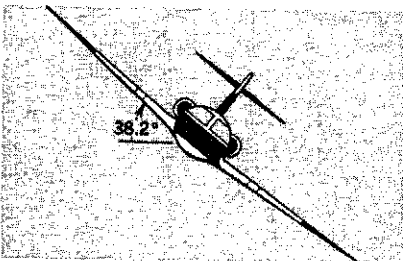


شکل ۴۳. مسئله ۴۴

۴۵. سکه‌ای کوچک روی صفحه تخت و افقی گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که گرامافون هر 3 rps دقیقاً ۳ دور می‌زند. (الف) سکه به فاصله 5.2 cm از مرکز صفحه است و بدون لغزش همراه با آن می‌گردد. سرعت سکه چقدر است؟ (ب) (اندازه و جهت) شتاب سکه را به دست بیاورید. (ج) اگر جرم سکه 1.7 g باشد، نیروی اصطکاک وارد بر آن چقدر است؟ (د) مشاهده می‌شود که اگر سکه در فاصله‌ای بیش از 12 cm از مرکز صفحه قرار بگیرد می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی بین سکه و صفحه چقدر است؟

۴۶. جسم کوچکی به فاصله 13 cm از مرکز صفحه گرامافونی قرار دارد. مشاهده می‌شود که صفحه اگر با سرعت $33\frac{1}{2}\text{ rev/min}$ بچرخد جسم نمی‌لغزد، اما اگر با سرعت 45 rev/min بچرخد جسم می‌لغزد. ضریب اصطکاک ایستایی میان جسم و صفحه در چه گستره‌ای می‌تواند باشد؟

۴۷. هواپیمایی با سرعت 482 km/h روی دایره‌ای افقی پرواز می‌کند. بالهای هواپیما با سطح افقی زاویه 38.2° می‌سازند (شکل ۴۴). شعاع دایره‌ای که هواپیما روی آن پرواز می‌کند چقدر است؟ فرض کنید نیروی مرکزگرا تماماً از نیروی بالابرنده‌ای تأمین می‌شود که بر بالها عمود است.



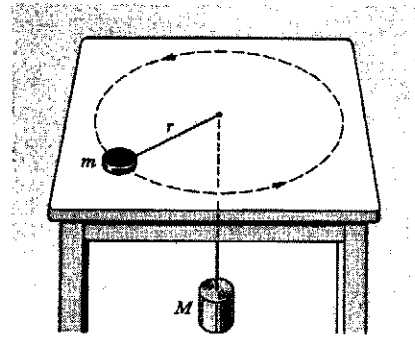
شکل ۴۴. مسئله ۴۷

۴۸. یک مرغ در ناسی در یک مسیر دایره‌ای افقی، بدون بال زدن،

۳۸. در مدل بور برای اتم هیدروژن، الکترون در مداری دایره‌ای شکل به دور هسته می‌گردد. اگر شعاع مدار 10^{-11} m و 5 r/s و بسامد چرخش الکترون 10^{15} rev/s باشد، (الف) سرعت الکترون، (ب) شتاب الکترون، و (ج) نیروی وارد بر الکترون را حساب کنید. (این نیرو ناشی از جاذبه بین هسته با بار مثبت و الکترون با بار منفی است.)

۳۹. کودکی یک زنبیل پیک‌نیک را روی لبه بیرونی صفحه چرخانی به شعاع 4.6 m می‌گذارد. صفحه هر 24 s یک دور می‌چرخد. ضریب اصطکاک ایستایی حداقل چقدر باشد تا زنبیل روی صفحه باقی بماند؟

۴۰. قرصی به جرم m روی میزی بدون اصطکاک است و با ریسمانی که از سوراخی در میز می‌گذرد، به استوانه‌ای به جرم M متصل است (شکل ۴۲). قرص با چه سرعتی باید در دایره‌ای به شعاع r حرکت کند تا استوانه ساکن بماند؟



شکل ۴۲. مسئله ۴۰

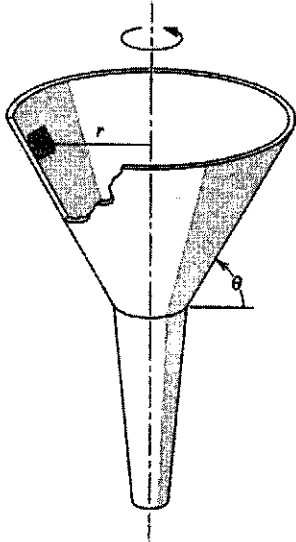
۴۱. در دفترچه راهنمای اتومبیلی آمده است که اگر با سرعت 48 km/h در حرکت باشید و بخواهید در کوتاهترین مسافت ممکن متوقف بشوید، از لحظه‌ای که تصمیم می‌گیرید تا لحظه‌ای که پای شما به پدال ترمز برسد، اتومبیل 10 m جلو رفته است و بعد از ترمز هم 21 m دیگر می‌پیماید تا متوقف شود. (الف) در این محاسبات، ضریب اصطکاک چقدر فرض شده است؟ (ب) حداقل شعاع مسیری که با سرعت 48 km/h می‌توان در آن پیچید، بی‌آنکه اتومبیل بلغزد، چقدر است؟

۴۲. پیچ دایره‌ای بزرگراهی با شیب عرضی مناسب برای سرعت 95 km/h طراحی شده است. شعاع پیچ 210 m است. در یک روز بارانی، ترافیک با سرعت 52 km/h در این بزرگراه حرکت می‌کند. (الف) ضریب اصطکاک بین لاستیکها و جاده حداقل چقدر باشد تا اتومبیلها (با وجود این اختلاف سرعت) سرپیچ نلغزند؟ (ب) به ازای این ضریب اصطکاک، اتومبیلها حداکثر با چه سرعتی می‌توانند پیچ را بدون لغزش طی کنند؟

۴۳. دانشجویی 150 lb وزن دارد. وزن ظاهری این دانشجو، در بالاترین نقطه چرخ و فلکی که با سرعت ثابت می‌چرخد، 125 lb است. (الف) وزن ظاهری او در پایین‌ترین نقطه چرخ و فلک چقدر است؟ (ب) اگر سرعت چرخ و فلک دو برابر شود، وزن ظاهری دانشجو در بالاترین نقطه آن چقدر می‌شود؟

۴۴. اتومبیلی با سرعت ثابت روی جاده‌ای مستقیم که به جیب ۰

ثابت v دور بر ثانیه حول یک محور قائم می چرخد (شکل ۴۶). زاویه دیواره قیف با سطح افقی θ است. ضریب اصطکاک ایستایی بین مکعب و قیف μ_s ، و فاصله مرکز مکعب از محور دوران r است. (الف) بیشترین و (ب) کمترین مقدار v برای اینکه مکعب نسبت به قیف حرکت نکند چقدر است؟



شکل ۴۶. مسئله ۵۳

۵۴. چون زمین می چرخد، نخ شاقول دقیقاً در راستای نیروی گرانش زمین قرار نمی گیرد و ممکن است کمی از این راستا منحرف شود. (الف) نشان بدهید که زاویه انحراف θ برحسب رادیان، در عرض جغرافیایی L برابر است با

$$\theta = \left(\frac{2\pi^2 R}{gT^2} \right) \sin 2L$$

که در آن R شعاع زمین و T دوره تناوب چرخش زمین است. (ب) زاویه انحراف در کدام عرض جغرافیایی بیشینه است؟ (ج) زاویه انحراف در قطبها چقدر است؟ در استوا چقدر است؟

بخش ۵-۶ نیروهای وابسته به زمان: روش تحلیلی

۵۵. مکان ذره‌ای به جرم 2.17 kg ، که بر خط راست حرکت می کند، از رابطه

$$x = 0.179t^2 - 2.08t^3 + 17.1$$

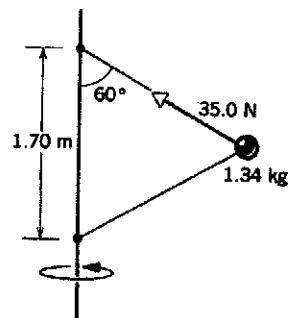
به دست می آید که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) سرعت، (ب) شتاب، و (ج) نیروی وارد بر ذره در زمان $t = 7.18 \text{ s}$ را پیدا کنید.

۱. نگاه کنید به

"The Amateur Scientist," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1985, p. 122.

پرواز می کند. زاویه بالهای او با سطح افقی حدود 25° است. 13 s طول می کشد تا این پرنده یک دور کامل بزند. (الف) سرعت این پرواز چقدر است؟ (ب) شعاع دایره مسیر چقدر است؟

۴۹. ریسمانی می تواند کششی تا حد 9.21 lb را تحمل کند و پاره نشود. کودکی سنگی به وزن 8.21 lb را به یک سر آن می بندد، سر دیگر آن را در دست می گیرد، و سنگ را در صفحه قائم در دایره‌ای به شعاع 2.9 ft می گرداند. کودک سرعت سنگ را به تدریج زیاد می کند تا اینکه ریسمان پاره شود. (الف) هنگام پاره شدن ریسمان، سنگ در کجای مسیرش بوده است؟ (ب) سرعت سنگ هنگام پاره شدن ریسمان، چقدر بوده است؟ ۵۰. یک هواپیمای مدل به جرم 75 kg به یک سر ریسمانی به طول 33 m بسته شده است و در دایره‌ای افقی در ارتفاع 18 m پرواز می کند. سر دیگر ریسمان به زمین متصل است. هواپیمای در دقیقه 4.4 دور می زند. نیروی بالابرنده بر بالها، که افقی اند، عمود است. (الف) شتاب هواپیمای چقدر است؟ (ب) کشش ریسمان چقدر است؟ (ج) نیروی بالابرنده‌ای که بر بالهای هواپیمای وارد می شود چقدر است؟ ۵۱. فرض کنید در صورتی که زمین نمی چرخید، کیلوگرم استاندارد در سطح دریا در خط استوا دقیقاً 9.80 N وزن می داشت. حالا اگر چرخش زمین را در نظر بگیرید، این جسم طی یک شبانه روز محیط دایره‌ای به شعاع 6370 km (شعاع زمین) را طی می کند. (الف) نیروی مرکزگرای لازم برای اینکه کیلوگرم استاندارد در این مسیر دایره‌ای حرکت کند چقدر است؟ (ب) نیرویی که کیلوگرم استاندارد، در استوا، بر نیروسنج فنری وارد می کند (وزن ظاهری جسم) چقدر است؟ ۵۲. توبی به جرم 34 kg با دو ریسمان "بی جرم"، هر یک به طول 1.70 m ، به میله‌ای صلب و قائم بسته شده است. ریسمانها به دو نقطه میله، به فاصله 1.70 m از یکدیگر بسته شده اند و سیستم حول میله می چرخد؛ هر دو ریسمان کاملاً کشیده اند و با میله مثالی متساوی الاضلاع می سازند (شکل ۴۵). کشش ریسمان بالایی 35.0 N است. (الف) کشش ریسمان پایینی را پیدا کنید. (ب) نیروی خالص وارد بر توبی را، در وضعیتی که در شکل ۴۵ نشان داده شده است، پیدا کنید. (ج) سرعت گلوله چقدر است؟



شکل ۴۵. مسئله ۵۲

۵۳. مکعب بسیار کوچکی به جرم m در قیفی قرار دارد که با آهنگ

۵۶. ذره‌ای به جرم m تحت اثر نیروی خالصی به شکل

$$\mathbf{F}(t) = F_0 \left(1 - \frac{t}{T}\right) \mathbf{i}$$

است؛ یعنی، $F(t)$ در $t = 0$ برابر با F_0 است و به طور خطی با زمان کم می‌شود تا در زمان T به صفر می‌رسد. ذره در زمان $t = 0$ با سرعت $v_0 \mathbf{i}$ از مبدأ $x = 0$ می‌گذرد. نشان بدهید که در زمان $t = T$ که در آن $F(t)$ صفر می‌شود، سرعت و مسافت پیموده شده عبارت‌اند از

$$v(T) = v_0 + \frac{1}{2} a_0 T$$

$$x(T) = v_0 T + \frac{1}{3} a_0 T^2$$

که در آن، $a_0 = F_0/m$ شتاب اولیه است. این نتایج را با معادلات ۱۵ و ۱۹ فصل ۲ مقایسه کنید.

۵۷. ذره‌ای به جرم m در $x = 0$ ساکن است. از زمان $t = 0$ ، نیرویی به شکل $F = F_0 e^{-t/T}$ در جهت مثبت x بر آن وارد می‌شود؛ F_0 و T ثابت‌اند. در $t = T$ نیرو حذف می‌شود. در لحظه‌ای که نیرو حذف می‌شود (الف) سرعت ذره چقدر است و (ب) مکان آن کجاست؟

بخش ۷-۶ نیروی مقاومت شاره‌ها و حرکت پرتابی

۵۸. وزنه کوچکی به جرم 150 g در عمق 3.4 km در اقیانوس است و با سرعت حد ثابت 25 m/s سقوط می‌کند. نیرویی که آب بر این وزنه وارد می‌کند چقدر است؟

۵۹. جسمی را از حالت سکون رها می‌کنیم. با فرض اینکه اصطکاک شاره به صورت $D = bv^2$ باشد، سرعت حد جسم را به دست بیاورید. ۶۰. چه مدت طول می‌کشد تا جسم مثال ۵ به نصف سرعت حد خودش برسد؟

۶۱. با استفاده از جدول ۲، مقدار b را برای قطره باران حساب کنید؛ فرض کنید که اصطکاک هوا $D = bv$ است. چگالی آب 1.0 g/cm^3 است.

۶۲. لوکوموتیوی به قطاری (روی ریل‌های افقی) که 23 واگن دارد شتاب می‌دهد. جرم هر واگن 48.6 تن متریک، و نیروی مقاومت هوا وارد بر هر واگن $f = 243v$ است که در آن v (سرعت) بر حسب m/s و f بر حسب N است. در لحظه‌ای که قطار 34.5 km/h سرعت دارد، شتاب آن 1.82 m/s^2 است. (الف) کشش در اتصال بین واگن اول و لوکوموتیو چقدر است؟ (ب) فرض کنید که این کشش بیشترین نیرویی است که لوکوموتیو می‌تواند به قطار وارد کند. در این صورت، تندترین شیبی که در آن لوکوموتیو می‌تواند قطار را با سرعت 34.5 km/h بکشد کدام است؟ (۱ تن متریک $= 1000 \text{ kg}$)

۶۳. بالونی با سرعت ثابت 1.88 m/s در هوای آرام پایین می‌آید. وزن کل بالون با محتویاتش 10.8 kN است. نیروی ارشمیدس ثابتی به اندازه 10.3 kN بر بالون وارد می‌شود. علاوه بر این، هوا بکه نهاده

مقاومت اصطکاکی به شکل $D = bv^2$ هم بر بالون وارد می‌کند؛ v سرعت بالون و b یک کمیت ثابت است. سرشتیان بالون 26.5 kg بار اضافی از بالون بیرون می‌ریزند. پس از این کار، بالون نهایتاً با چه سرعت ثابتی پایین می‌آید؟

۶۴. مسئله ۶۳ را تکرار کنید، اما نیروی اصطکاک هوا را $D = bv$ بگیرید. توجه کنید که b را باید دوباره برای این مورد محاسبه کرد.

۶۵. لنجی به جرم m با سرعت v_i در حرکت است که موتورهایش خاموش می‌شوند. نیروی اصطکاک آب به شکل $D = bv$ است. (الف) عبارتی برای زمانی که طول می‌کشد تا سرعت لنج به v_f کاهش پیدا کند به دست بیاورید. (ب) مقدار عددی این زمان را برای لنجی به جرم 970 kg که از سرعت اولیه 32 km/h به سرعت 8.3 km/h می‌رسد حساب کنید. مقدار b برابر با $68 \text{ N}\cdot\text{s/m}$ است.

۶۶. جسم افتان مثال ۵ را در نظر بگیرید. (الف) شتاب جسم را به صورت تابعی از زمان به دست بیاورید. این شتاب در t های کوچک، و در t های بزرگ چگونه است؟ (ب) مسافت سقوط جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۶۷. با فرض اینکه نیروی اصطکاک هوا به شکل $D = bv$ است، (الف) نشان بدهید که مسافت y_{15} ، یعنی مسافتی که جسم از حالت سکون تا رسیدن به 95% سرعت حدش می‌پیماید،

$$y_{15} = (v_T^2/g) \left(\ln 20 - \frac{19}{20} \right)$$

است، که در آن v_T سرعت حد است. (راهنمایی: نتیجه‌ای را که در مسئله ۶۶ برای $y(t)$ به دست آوردید به کار ببرید.) (ب) با استفاده از سرعت حد 42 m/s برای توپ بیسبال، از جدول ۲، مسافت 95% را به دست بیاورید. چرا نتیجه شما با مقداری که در جدول ۲ آمده است نمی‌خواند؟

پروژه‌های کامپیوتری

۶۸. در بخش ۶-۶ روشی عددی برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون و به دست آوردن جدولی از مکان و سرعت جسم در زمانهای متوالی ارائه شد. بازه شامل زمان اولیه t_0 تا زمان پایانی t_f را به N بازه کوچک Δt تقسیم کنید. اگر v_b, x_b, F_b ، به ترتیب، مختصه، سرعت، و نیرو در ابتدای بازه باشند، $x_e = x_b + v_b \Delta t$ و $v_e = v_b + (F_b/m) \Delta t$ به ترتیب، برابری از مختصه و سرعت در انتهای بازه‌اند. این مقادیر، به عنوان مختصه و سرعت در ابتدای بازه بعدی به کار نمی‌روند. هرچه Δt کوچکتر باشد، برابری بهتر است، اما Δt را خیلی هم نمی‌شود کوچک گرفت؛ زیرا اگر Δt خیلی کوچک باشد، طی محاسبه رقمهای با معنی از دست می‌روند. نیرو می‌تواند تابع مکان، سرعت و زمان باشد. شکل صریح این تابع را شرایط فیزیکی تعیین می‌کند؛ با داشتن این شکل می‌توان F_b را، با استفاده از مقادیر v_b, x_b و t_b به دست آورد. یک برنامه کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که این انتگرال‌گیری را انجام بدهد. ورودی برنامه $v_0, x_0, t_0, \Delta t$ ، و N است. به عنوان مثال، حالت زیر را در نظر بگیرید.

کنید که مسیر نسبت به محور قائمی که از نقطهٔ اوج می‌گذرد متقارن نیست. اگر مقاومت هوا نبود، مسیر متقارن می‌شد. با استفاده از نمودار، یا جدول مقادیر، این کمیتها را تخمین بزنید: (ب) زمانی که پرتابه به نقطهٔ اوج مسیر خود می‌رسد و مختصات نقطهٔ اوج؛ (ج) زمانی که پرتابه به زمین می‌خورد، برد پرتابه، و سرعت آن درست پیش از برخورد. (د) این کمیتها را با مقادیری که در غیاب مقاومت هوا به دست می‌آید مقایسه کنید. مقاومت هوا چه تغییری در ارتفاع اوج می‌دهد؟ در برد چگونه؟ در سرعت پیش از برخورد چگونه؟

۷۱. مقاومت هوا می‌تواند تأثیر چشمگیری در زاویهٔ پرتابی که به برد بیشینه می‌انجامد داشته باشد. برای دیدن این تأثیر، پرتابه‌ای به جرم 2.5kg را در نظر بگیرید که با سرعت 15 m/s بر فراز سطحی افقی پرتاب می‌شود، و فرض کنید که نیروی اصطکاک هوا $F_D = -0.3v$ است، که در آن F_D برحسب نیوتون و v برحسب m/s است. برای هر یک از زوایای پرتاب 25° ، 30° ، 35° ، و 40° ، به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید: اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را 0.1 s بگیرید و نتایج را هر 0.5 s ، از $t = 0$ تا $t = 2.5\text{ s}$ نمایش دهید. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. با استفاده از این نتایج برد را تخمین بزنید. برد در کدام‌یک از این زوایا بیشینه است؟

۷۲. پرتابه‌ای که تحت اثر مقاومت هوا قرار دارد به سرعت حدی‌اش می‌رسد. فرض کنید که نیروی خالص وارد بر پرتابه $-mg\mathbf{j} - b\mathbf{v}$ باشد، که در آن b ثابت مقاومت شاره است و جهت مثبت محور y به طرف بالاست. در سرعت حد v_T ، نیروی خالص صفر می‌شود. بنابراین، $v_T = -(mg/b)\mathbf{j}$ توجه کنید که این سرعت مؤلفهٔ افقی ندارد. پرتابه در نهایت مستقیماً به طرف پایین سقوط می‌کند.

می‌توانید با استفاده از یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم، "ببینید" که یک پرتابه چگونه به سرعت حد می‌گراید. پرتابه‌ای به جرم 2.5kg را در نظر بگیرید که، با سرعت اولیهٔ 15 m/s با زاویهٔ 40° بالای سطح افقی، پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک شاره را 0.5 kg/s بگیرید. به‌طور عددی از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید و نتایج را هر 0.5 s ، از $t = 0$ تا $t = 1\text{ s}$ (زمان پرتاب) تا زمانی که مؤلفهٔ y سرعت به 90% درصد v_T می‌رسد، نمایش دهید. $v_x(t)$ و $v_y(t)$ را در یک نمودار نمایش دهید. توجه کنید که با نزدیک شدن v_y به v_T ، v_x به 0 می‌گراید.

۷۳. اگر اثر مقاومت هوا را بر پرتابه در نظر بگیریم، مختصات آن با روابط زیر بیان می‌شوند:

$$x(t) = (v_{0x}/b)(1 - e^{-bt})$$

$$y(t) = (1/b^2)(g + bv_{0y})(1 - e^{-bt}) - (g/b)t$$

جهت مثبت y را به طرف بالا و مبدأ مختصات را در نقطهٔ پرتاب گرفته‌ایم. ضریب مقاومت b گرمای شدت برهم‌کنش هوا و پرتابه است. از

شخصی صندوقی به جرم 95kg را روی سطح ناهمواری هل می‌دهد. صندوق از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و نیرویی که شخص بر آن وارد می‌کند $F = 200e^{-0.15t}$ است، که در آن F برحسب نیوتون و t برحسب ثانیه است. نیرو به شکل نمایی کم می‌شود زیرا شخص خسته می‌شود. طی حرکت، یک نیروی اصطکاک ثابت 80N با حرکت صندوقی مخالفت می‌کند. (الف) صندوق چه مدت پس از شروع حرکت متوقف می‌شود؟ (ب) در این مدت چه مسافتی را می‌پیماید؟ جوابها را با دقت دو رقم بامعنی به دست بیاورید.

برای انتگرال‌گیری، زمان بین $t = 0\text{ s}$ و $t = 15\text{ s}$ را به 1500 بازه، هر یک به اندازهٔ 1 s تقسیم کنید. هدف این نیست که مکان و سرعت را در پایان هر بازه نمایش دهید. در اجرای اول، نتایج را در پایان هر 100 بازه نمایش دهید. در اجرای بعدی، قاعدتاً می‌خواهید که نتایج را، در گستره‌های کوچکتر، در پایان بازه‌های کوچکتری نمایش دهید. پس از به دست آوردن جدول نتایج، به دنبال دو نقطهٔ مجاور بگردید که $v_e = 0$ بین آنهاست. اگر مقدار x این دو نقطه تا دو رقم با معنی یکسان باشد، محاسبه تمام است. در غیر این صورت باید بازه‌هایی را که نتایج را در انتهای آنها نشان می‌دهد کوچکتر کنید، یا احتمالاً بازه‌های انتگرال‌گیری را کوچکتر بگیرید، و محاسبه را تکرار کنید.

۶۹. تویی به جرم 150g با سرعت اولیهٔ 25m/s ، از لبهٔ صخره‌ای مستقیماً به بالا پرتاب می‌شود. در بازگشت، توپ از کنار صخره می‌گذرد و 300m پایین‌تر به زمین برمی‌خورد. علاوه بر نیروی گرانش، نیروی مقاومت هوای $F_D = -0.15v$ هم بر توپ وارد می‌شود؛ F_D برحسب نیوتون و v برحسب m/s است. (الف) مدت حرکت این توپ چقدر است؟ (ب) سرعت توپ درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟ (ج) نسبت این سرعت به سرعت حد چقدر است؟

یک برنامهٔ کامپیوتری یا الگوریتم برای انتگرال‌گیری از قانون دوم نیوتون به کار ببرید. (راهنماییهای لازم را از بخش ۶-۶ و مسئلهٔ قبل بگیرید.) طول بازهٔ انتگرال‌گیری را 0.1 s بگیرید. مختصه و سرعت را، در فاصلهٔ $t = 0\text{ s}$ تا $t = 12\text{ s}$ ، هر 1 s نمایش دهید. با این مقادیر باید جوابهایی با دقت دو رقم با معنی به دست بیاورید.

۷۰. پرتابه‌ای به جرم 2.5kg از روی زمینی افقی پرتاب می‌شود. سرعت اولیهٔ پرتابه 15 m/s و زاویهٔ پرتاب 40° بالای سطح افقی است. علاوه بر نیروی گرانشی، نیروی مقاومت هوای $F_D = -0.3v$ نیز بر پرتابه وارد می‌شود؛ F_D برحسب نیوتون و v برحسب m/s است. به‌طور عددی، بین $t = 0$ (زمان پرتاب) و $t = 2.0\text{ s}$ از قانون دوم نیوتون انتگرال بگیرید. اندازهٔ بازه‌های انتگرال‌گیری را 0.1 s انتخاب کنید، اما نتایج را هر 0.5 s نمایش دهید. هم مختصات x و y و هم دو مؤلفهٔ سرعت را باید در نظر بگیرید. معادلات $a_x = -(b/m)v_x$ و $a_y = -g - (b/m)v_y$ را به کار ببرید؛ b ثابت نیروی اصطکاک هواست. به پروژه‌های کامپیوتری قبلی رجوع کنید. (الف) مسیر y برحسب x را از نقطهٔ پرتاب تا نقطهٔ برخورد به زمین رسم کنید. توجه

مشابه در حالت بدون مقاومت هواست، نقطهٔ اوج کوتاهتر و، به نقطهٔ پرتاب، نزدیکتر است، و سرعت پرتابه هم (از حالتی که اصطکاک هوا نباشد) کمتر است. (ب) برای تعیین اینکه آیا این روند ادامه می‌یابد یا نه، محاسبه را با $b = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ تکرار کنید. (ج) مقاومت هوا چگونه بر برد پرتابه اثر می‌گذارد؟ فرض کنید که $b = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ و، با استفاده از برنامه، برد را پیدا کنید (مقدار x را به‌ازای $y = 0$ به‌دست بیاورید). این کار را برای $b = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ هم تکرار کنید. (د) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد به زمین، در اثر مقاومت هوا چه تغییری می‌کند؟ برنامه را با $b = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ ، و سپس با $b = 2 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ اجرا کنید و سرعت در لحظهٔ پیش از برخورد را به‌دست بیاورید. به یاد داشته باشید که در غیاب اصطکاک هوا، اندازهٔ هر یک از مؤلفه‌های سرعت، در لحظهٔ درست پیش از برخورد پرتابه به زمین و لحظهٔ پرتاب، یکسان است. توجه کنید که از معادلات بالا چنین نتیجه می‌شود که $a_x = -bv_x$ و $a_y = -g - bv_y$ است. با استفاده از این روابط، توضیح دهید که چرا در نقطهٔ اوج $a_y = -g$ است، چرا a_x هیچگاه صفر نمی‌شود، و چرا اندازهٔ a_y ، درست پیش از برخورد به زمین با افزایش b کم می‌شود؟

عبارتهای بالا مشتق بگیریید و نشان دهید که مؤلفه‌های سرعت به شکل $v_x = v_{0x} e^{-bt}$ و $v_y = (1/b)(g + bv_{0y})e^{-bt} - g/b$ و مؤلفه‌های شتاب به شکل $a_x = -bv_{0x} e^{-bt}$ و $a_y = -(g + bv_{0y})e^{-bt}$ یک برنامهٔ کامپیوتری بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که مختصات مؤلفه‌های سرعت، و مؤلفه‌های شتاب را در پایان هر بازهٔ زمانی به اندازهٔ Δt ، از زمان t_1 تا زمان t_2 ، محاسبه کند.

اکنون این برنامه را برای بررسی اثر هوا بر پرتابه‌ای که با سرعت اولیهٔ 5 m/s با زاویهٔ پرتاب 25° بالای سطح افقی، بر فراز زمین افقی پرتاب می‌شود به‌کار ببرید. (الف) فرض کنید $b = 1 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ است و با استفاده از برنامه، مختصات نقطهٔ اوج، و سرعت و شتاب پرتابه در آن نقطه را پیدا کنید. برای شروع، با استفاده از برنامه، مختصات، سرعت، و شتاب را هر 1 s ، از $t = 0 \text{ s}$ تا $t = 4.5 \text{ s}$ ، به‌دست بیاورید. برای محاسبهٔ جوابهایی با دقت دو رقم بامعنی ممکن است لازم باشد بازه‌ها را کوچکتر کنید و برنامه را دوباره اجرا کنید. جواب را که به دست آوردید توجه کنید که زمان رسیدن پرتابه به نقطهٔ اوج، کمتر از زمان



کار و انرژی

یکی از مسائل اساسی دینامیک، پیدا کردن چگونگی حرکت ذره‌ای است که نیروهای وارد بر آن را می‌شناسیم. منظور از "ذره چگونه حرکت می‌کند" این است که مکان آن طی زمان چگونه تغییر می‌کند. در دو فصل گذشته، مسئله را در مورد خاص نیروی ثابت حل کردیم؛ در مورد نیروی ثابت می‌توان از فرمولهای حرکت با شتاب ثابت استفاده کرد و $\Gamma(t)$ را به دست آورد، و به این ترتیب مسئله به طور کامل حل می‌شود.

اما اگر نیروی وارد بر ذره و در نتیجه شتاب ذره ثابت نباشد، مسئله دشوارتر است. برای نیروهای وابسته به زمان و سرعت، می‌شود این مسئله را با روشهای انتگرال‌گیری بخشهای ۵-۶ و ۷-۶ حل کرد. در این فصل، نیروهای وابسته به مکان ذره را — مثلاً نیروی جاذبه‌ای که زمین بر اجسام نزدیک به خود وارد می‌کند، یا نیرویی که فنر کشیده شده به جسم متصل به خود وارد می‌کند — تحلیل می‌کنیم. از این تحلیل می‌رسیم به مفهوم کار و مفهوم انرژی جنبشی، و به طرح قضیه کار-انرژی، که موضوع اصلی این فصل است. در فصل ۸ انرژی را از دیدگاه وسیعتری بررسی می‌کنیم، و به قانون پایستگی انرژی می‌رسیم که نقش عمده‌ای در پیشرفت فیزیک داشته است.

جهت جابه‌جایی s زاویه ϕ می‌سازد، بر ذره وارد می‌شود. کار W که نیروی F در این جابه‌جایی انجام می‌دهد، طبق تعریف ما، برابر است با

$$W = (F \cos \phi)s \quad (۲)$$

البته ممکن است نیروهای دیگری هم بر ذره اثر کنند. معادله ۲ فقط کاری را تعیین می‌کند که نیروی مشخص F انجام می‌دهد. کاری را که نیروهای دیگر بر ذره انجام می‌دهند باید جداگانه حساب کرد. کل کاری که انجام می‌شود برابر است با مجموع کارهایی که همه نیروها انجام می‌دهند. (به طریق دیگر، چنان که در بخش ۷-۴ خواهیم دید، می‌شود اول نیروی خالص وارد بر ذره را پیدا کرد و سپس کاری را که این تک نیروی خالص انجام می‌دهد حساب کرد. این روش با روش جمع کردن کارهای تک‌تک نیروها هم‌ارز است و هر دو روش به یک نتیجه منجر می‌شوند.)

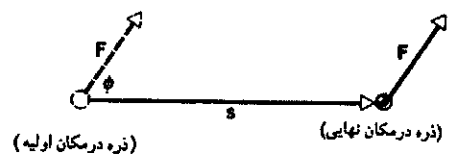
اگر ϕ صفر باشد، کاری که F انجام می‌دهد همان Fs است، که در معادله ۱ هم آمده است. بنابراین، اگر نیرویی افقی جسمی را در راستای افقی (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، یا اگر نیرویی قائم جسمی را در راستای قائم (در جهت نیرو) جابه‌جا کند، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با اندازه نیرو ضربدر مسافت پیموده شده. اگر ϕ — داد با ۹۰° باشد، نه، مؤلفه‌ای در جهت حرکت ندارد، و کاری هم

۷-۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

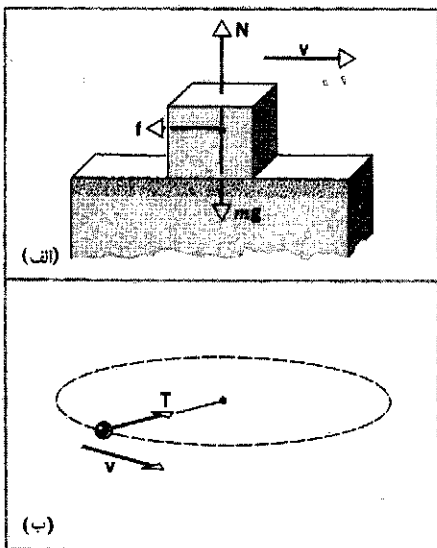
ذره‌ای را در نظر بگیرید که نیروی ثابت F بر آن وارد می‌شود، و در ساده‌ترین حالت، فرض کنید که حرکت در خط راستی در جهت نیرو انجام می‌شود. در چنین حالتی، کار W که نیروی ذره انجام می‌دهد طبق تعریف عبارت است از حاصل‌ضرب اندازه نیرو و مسافت s که نیرو در طی آن اثر می‌کند. این تعریف را به صورت زیر می‌نویسیم

$$W = Fs \quad (۱)$$

یک مورد کلی‌تر، نیروی ثابت وارد بر ذره ممکن است در جهت حرکت ذره نباشد. در این صورت، کاری را که نیرو روی ذره انجام می‌دهد به شکل حاصل‌ضرب مؤلفه نیرو در جهت حرکت، و اندازه جابه‌جایی ذره تعریف می‌کنیم (در شکل ۱). نیروی ثابت F که با

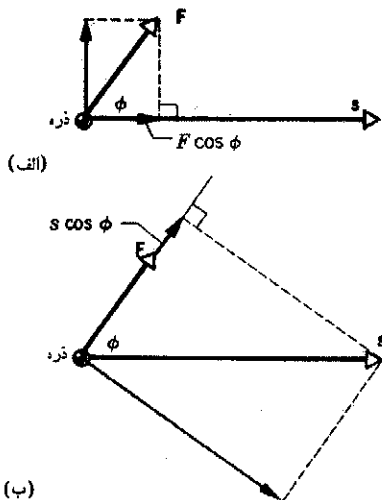


شکل ۱. نیروی F بر ذره‌ای وارد می‌شود که جابه‌جایی آن s است. مؤلفه‌ای از F که کار انجام می‌دهد، $F \cos \phi$ است. کاری که F انجام می‌دهد $Fs \cos \phi$ است، که می‌توان آن را به صورت $F \cdot s$ نوشت.



شکل ۳. هر نیرویی که بر جسمی اثر کند الزاماً روی آن کار انجام نمی‌دهد، حتی اگر جسم در حال حرکت باشد. در (الف)، وزن و نیروی عمودی کاری انجام نمی‌دهند، زیرا بر جابه‌جایی عمودند، ولی نیروی اصطکاک کار انجام می‌دهد. در (ب) جسمی داریم که به ریسمانی بسته شده است و بردایره‌ای افقی می‌گردد. کشش T ریسمان کاری روی جسم انجام نمی‌دهد، زیرا مؤلفه‌ای در جهت جابه‌جایی ندارد.

که در آن نقطه علامت حاصل ضرب اسکالر (یا نقطه‌ای) است. کار می‌تواند مثبت یا منفی باشد. نیرو اگر مؤلفه‌ای در خلاف جهت حرکت داشته باشد، کاری که انجام می‌دهد منفی است. این حالت متناظر است با زاویه منفی بین بردار نیرو و بردار جابه‌جایی. مثلاً، اگر جسمی را در دست بگیرید و تا زمین پایین بیاورید، کاری که نیروی رو به بالای دست شما روی جسم انجام می‌دهد منفی است. در این مورد ϕ برابر با 180° است، زیرا F به طرف بالا و s به طرف



شکل ۴. (الف) کار W به شکل $W = (s)(F \cos \phi)$. (ب) کار W به شکل $W = (F)(s \cos \phi)$.



شکل ۲. وزنه‌بردار نیروی بزرگی بر وزنه وارد می‌کند. اما در لحظه‌هایی که وزنه را بالای سرش نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد، زیرا وزنه ساکن است؛ نیرو هست اما جابه‌جایی نیست. البته این وزنه‌بردار قبلاً برای رساندن وزنه‌ها از زمین به این ارتفاع، کار انجام داده است.

روی ذره انجام نمی‌دهد. مثلاً، وزنه‌بردار (شکل ۲) وقتی که وزنه را از زمین بلند می‌کند کار انجام می‌دهد، ولی در حالتی که وزنه را نگه داشته است کاری انجام نمی‌دهد (چون جابه‌جایی صفر است). اگر در حالتی که وزنه بالای سرش است راه هم برود باز (بنابه تعریفی که برای کار کردیم) کاری روی وزنه انجام نمی‌دهد زیرا (با فرض آنکه جابه‌جایی در راستای قائم وجود نداشته باشد) نیروی قائمی که او وارد می‌کند بر جابه‌جایی افقی عمود است. شکل ۳ نمونه‌های دیگری از نیروهایی را نشان می‌دهد که کاری انجام نمی‌دهند.

توجه کنید که معادله ۲ را، هم به شکل $(F \cos \phi)s$ و هم به شکل $F(s \cos \phi)$ می‌شود نوشت. به عبارت دیگر کار را به دو طریق می‌توان حساب کرد، که هر دو طریق به یک نتیجه می‌رسند: یا اندازه جابه‌جایی را در مؤلفه نیرو در جهت جابه‌جایی ضرب می‌کنیم، یا اندازه نیرو را در مؤلفه جابه‌جایی در جهت نیرو ضرب می‌کنیم. هر دو روش یادآور یکی از اجزای مهم در تعریف کارند: باید s مؤلفه‌ای در جهت F داشته باشد، و باید F مؤلفه‌ای در جهت s داشته باشد (تا کار مخالف صفر شود) (شکل ۴).

کار یک کمیت اسکالر است، اگرچه دو کمیتی که در تعریف آن وارد می‌شوند، نیرو و جابه‌جایی، بردارند. در بخش ۳-۵ گفتیم که حاصل ضرب اسکالر دو بردار، بنابه تعریف، کمیتی است اسکالر که برابر است با حاصل ضرب اندازه یکی از بردارها در مؤلفه بردار دیگر روی اولی. معادله ۲ نشان می‌دهد که کار هم دقیقاً به همین ترتیب محاسبه می‌شود، پس باید آن را به شکل حاصل ضرب اسکالر تعریف کرد. از مقایسه معادله ۲ با معادله ۱۳ فصل ۳، می‌بینیم که کار را می‌شود چنین بیان کرد

$$\dot{W} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} \quad (3)$$

مثال ۱. می‌خواهیم جسمی به جرم $m = ۱۱۷\text{kg}$ را به مسافت $s = ۴۶۵\text{m}$ روی سطح شیب‌داری بالا ببریم، چنان که ارتفاع آن به اندازه $h = ۲۸۶\text{m}$ زیاد شود (شکل ۵الف). فرض کنید سطح بدون اصطکاک است. فرض اگر نیرویی موازی با سطح شیب‌دار بر جسم اعمال کنید و آن را با سرعت ثابت بالا ببرید چقدر کار انجام می‌دهید؟

حل: شکل ۵ب نمودار جسم-آزاد جسم را نشان می‌دهد. ابتدا باید P را به دست بیاوریم، یعنی اندازه نیرویی که جسم را به طرف بالای سطح شیب‌دار هل می‌دهد. چون حرکت شتاب‌دار نیست (فرض بر این بود که سرعت ثابت است)، نیروی خالص موازی با سطح شیب‌دار باید صفر باشد. محور x را موازی با سطح شیب‌دار، و جهت مثبت آن را به طرف بالای سطح می‌گیریم. از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$P - mg \sin \theta = 0 \quad \text{مؤلفه } x:$$

یا

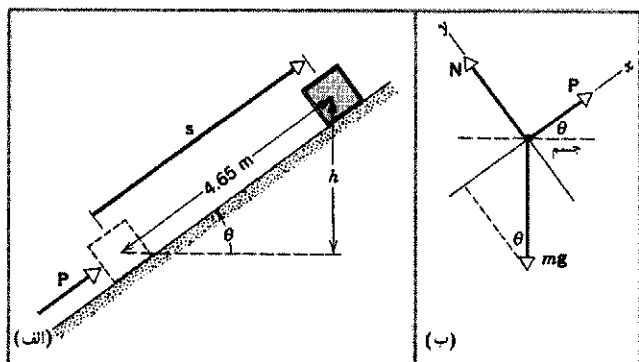
$$P = mg \sin \theta = (۱۱۷\text{kg})(۹.۸۰\text{m/s}^2) \left(\frac{۲۸۶\text{m}}{۴۶۵\text{m}} \right) \\ = ۷۰۵\text{N}$$

به این ترتیب، کاری که P انجام می‌دهد، از معادله ۳ به ازای $\phi = 0^\circ$ ، برابر است با

$$W = P \cdot s = Ps \cos 0^\circ = Ps = (۷۰۵\text{N})(۴۶۵\text{m}) \\ = ۳۲۸\text{J}$$

توجه کنید که زاویه $\phi (= 0^\circ)$ که در این عبارت به کار رفته، زاویه بین نیروی اعمال شده و جابه‌جایی جسم است، که هر دو با سطح شیب‌دار موازی‌اند. زاویه ϕ را نباید با زاویه θ سطح شیب‌دار اشتباه کرد.

اگر می‌خواستیم همین جسم را بدون استفاده از سطح شیب‌دار، با سرعت ثابت، تا همین ارتفاع بالا ببریم، کاری که انجام می‌دادیم برابر



شکل ۵. مثال ۱. (الف) نیروی P جسم را به اندازه s روی سطح شیب‌دار ر جسم-آزاد جسم.

پایین است. (همزمان، نیروی گرانشی روی جسم، که به طرف پایین حرکت می‌کند، کار مثبت انجام می‌دهد.)

نیروی F "ناوردا" است، یعنی هم جهت و هم اندازه آن مستقل از چارچوب لختی است که انتخاب می‌شود، اما s ناوردا نیست. ناظرهای گوناگون، بسته به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنند، می‌توانند عملاً هر اندازه و جهتی برای s به دست بیاورند. بنابراین، ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، که همگی نیروی وارد بر جسم را یکسان می‌سنجند، مقادیر متفاوتی برای کاری که آن نیرو بر جسم انجام می‌دهد تعیین می‌کنند. کار یک نیروی معین ممکن است برای ناظری مثبت، برای ناظری منفی، و برای ناظری دیگر حتی صفر باشد. به این نکته در بخش ۷-۶ خواهیم پرداخت.

معلوم شده است که کار ما به شکلی که ما آن را تعریف کردیم (معادله ۳)، مفهوم بسیار مفیدی در فیزیک است. تعریف خاص ما از "کار" ربطی به کاربرد رایج این واژه ندارد. کار فیزیکی را نباید با کار در مفهوم روزمره‌اش اشتباه کرد. شخصی که وزنه سنگینی را در هوا به حالت سکون نگه داشته است شاید از لحاظ فیزیولوژیکی مشغول انجام کار سختی باشد، اما از لحاظ فیزیکی هیچ کاری انجام نمی‌دهد. دلیلش این است که وزنه، که نیرو به آن وارد می‌شود، جابه‌جایی ندارد.

از طرف دیگر، اگر وزنه بردار را به شکل سیستمی از ذرات در نظر بگیریم (که در فصل ۹ به آن خواهیم پرداخت)، خواهیم دید که از دیدگاه میکروسکوپی واقعاً کار انجام می‌شود. ماهیچه یک تکیه‌گاه صلب نیست و نمی‌تواند بار را به شکل ایستا تحمل کند. تک‌تک تارهای ماهیچه مرتباً منقبض و بعد آسوده می‌شوند، و اگر وضعیت را به این شکل بررسی کنیم، می‌بینیم که در هر انقباضی کار انجام می‌شود. به همین علت است که وزنه بردار در اثر نگه‌داشتن وزنه، خسته می‌شود. در این فصل، این "کار داخلی" را در نظر نمی‌گیریم. واژه کار را تنها به معنی دقیق معادله ۳ به کار می‌بریم؛ و در این معنی، اگر ذره‌ای که نیرو بر آن وارد می‌شود جابه‌جا نشود، کار واقعاً صفر است. یکای کار از کاری که نیروی واحد بر جسمی انجام می‌دهد و آن را به اندازه فاصله واحد (در جهت نیرو) جابه‌جا می‌کند، به دست می‌آید. یکای SI کار، نیوتون-متر است، که آن را ژول (با علامت اختصاری J) می‌نامند. در سیستم بریتانیایی، یکای کار فوت-پاوند است. در سیستمهای cgs، یکای کار دین-سانتیمتر است، که آن را ارگ (erg) می‌نامند. با استفاده از روابط بین نیوتون، دین، و پاوند، و بین سانتیمتر، فوت، نتیجه می‌شود که $۱\text{J} = ۱۰^7\text{erg} = ۰.۷۳۷\text{ft}\cdot\text{lb}$ است. یکای دیگری برای کار، که در مورد ذرات اتمی و زیراتمی مناسب است، الکترون-ولت (با علامت اختصاری eV) است؛ کار لازم برای یک الکترونهای خارجی اتم از آن، نوعاً در حدود چند eV است. کار لازم برای یک پروتون یا توترون از هسته، نوعاً در حدود چند $(۱۰^6\text{eV})\text{MeV}$ است.

این سه معادله

P ، f و N را از این معادلات حذف می‌کنیم و از معادله باقی‌مانده P را به دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود (باید خودتان تحقیق کنید)

$$P = \frac{\mu_k mg}{\cos \phi + \mu_k \sin \phi}$$

بازای $\mu_k = 0.20$ ، $mg = (5.6 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 55 \text{ N}$ ، و $\phi = 45^\circ$ خواهیم داشت

$$P = \frac{(0.20)(55 \text{ N})}{\cos 45^\circ + (0.20)(\sin 45^\circ)} = 13 \text{ N}$$

پس کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد عبارت است از

$$W = Ps \cos \phi = (13 \text{ N})(12 \text{ m})(\cos 45^\circ) = 110 \text{ J}$$

مؤلفه عمودی P کاری روی سورتمه انجام نمی‌دهد. اما توجه کنید که این مؤلفه نیروی عمودی بین سورتمه و زمین را کم می‌کند ($N = mg - P \sin \phi$) و به این ترتیب، اندازه نیروی اصطکاک ($f = \mu_k N$) را کاهش می‌دهد.

اگر کودک نیروی P را به طور افقی اعمال کند (نه با زاویه 45°)، کاری که روی سورتمه انجام می‌شود بیشتر می‌شود، کمتر می‌شود، یا تغییری نمی‌کند؟ آیا نیروهای دیگر وارد بر سورتمه، روی آن کاری انجام می‌دهند؟

۲-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی اکنون کار نیرویی را که ثابت نیست بررسی می‌کنیم. فرض کنید نیرو فقط در یک جهت است که آن را جهت x می‌گیریم، و اندازه آن بر حسب x با تابع $F(x)$ بیان می‌شود. فرض کنید این نیرو بر جسمی وارد شود که در جهت x حرکت می‌کند. کاری که این نیروی متغیر انجام می‌دهد تا جسم از مکان اولیه x_i به مکان نهایی x_f برسد چقدر است؟

در شکل ۷، نمودار F بر حسب x رسم شده است. جابه‌جایی کل را به N بازه کوچک، هر یک به اندازه δx ، تقسیم می‌کنیم؛ شکل ۷ الف. بازه اول را در نظر بگیرید؛ این بازه جابه‌جایی δx ، از x_i تا $x_i + \delta x$ است. طی این جابه‌جایی کوچک، $F(x)$ تقریباً ثابت، و برابر با F_1 است؛ کار کوچکی که نیرو در این بازه انجام می‌دهد، تقریباً برابر است با

$$\delta W_1 = F_1 \delta x \quad (۴)$$

به همین ترتیب، بازه بعدی مربوط به جابه‌جایی کوچک از $x_i + \delta x$ به $x_i + 2\delta x$ است، و در این بازه نیرو تقریباً برابر است با مقدار ثابت F_2 . کاری که نیرو در این بازه انجام می‌دهد تقریباً $\delta W_2 = F_2 \delta x$ است. کل کار W که نیروی $F(x)$ در جابه‌جایی ذره از x_i تا x_f انجام

یعنی

$$W = mgh = (11.7 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(2.86 \text{ m}) = 328 \text{ J}$$

که همان مقدار قبلی است. تفاوت فقط در این است که با استفاده از سطح شیب‌دار می‌توان با نیروی کمتری ($P = 7.05 \text{ N}$) نسبت به حالت بدون سطح شیب‌دار ($mg = 115 \text{ N}$) جسم را بالا برد. در عوض، اگر از سطح شیب‌دار استفاده شود، جسم را باید به مسافت بیشتری (4.65 m) نسبت به حالت مستقیم (2.86 m) حرکت داد.

مثال ۲. کودکی سورتمه‌ای به جرم 5.6 kg را تا مسافت $s = 12 \text{ m}$ روی سطحی افقی، با سرعت ثابت جلو می‌کشد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی μ_k برابر با 0.20 ، و زاویه طناب با سطح افقی $\phi = 45^\circ$ باشد، کودک چقدر کار انجام می‌دهد؟

حل: شکل ۶ الف وضعیت مسئله، و شکل ۶ ب نمودار جسم-آزاد سورتمه را نشان می‌دهد. P کششی که کودک اعمال می‌کند، mg وزن سورتمه، f نیروی اصطکاک، و N نیروی عمودی‌ای است که زمین بر سورتمه وارد می‌کند. کاری که کودک روی سورتمه انجام می‌دهد برابر است با

$$W = P \cdot s = Ps \cos \phi$$

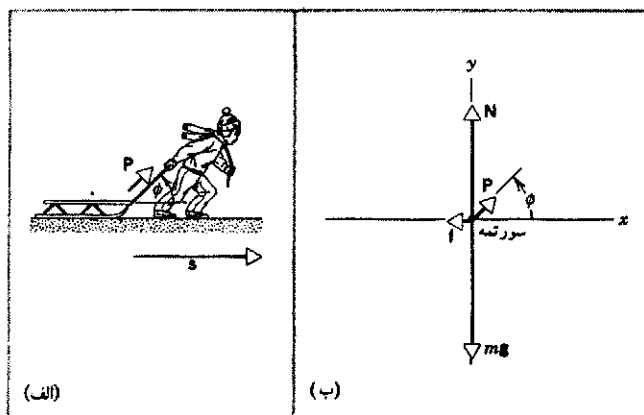
برای محاسبه این کار، اول باید P را، که مجهول است، معلوم کرد. برای به دست آوردن P به نمودار جسم-آزاد شکل ۶ ب رجوع می‌کنیم. سورتمه شتاب ندارد؛ پس، از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌شود که

$$P \cos \phi - f = 0 \quad \text{مؤلفه } x:$$

$$P \sin \phi + N - mg = 0 \quad \text{مؤلفه } y:$$

می‌دانیم که رابطه f و N به صورت زیر است

$$f = \mu_k N$$



شکل ۶. مثال ۲. الف) کودکی با وارد کردن نیروی P به ریمانی که با سطح افقی زاویه ϕ می‌سازد، سورتمه‌ای را به اندازه مسافت s می‌کشد. ب) نمودار جسم-آزاد سورتمه.

است با

$$W = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum_{n=1}^N F_n \delta x \quad (6)$$

رابطه

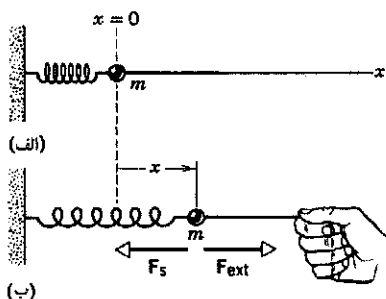
$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} \sum F_n \delta x = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx$$

که شاید آن را در درس حساب دیفرانسیل و انتگرال دیده باشید، انتگرال F نسبت به x از x_i تا x_f را تعریف می‌کند. مقدار عددی این کمیت دقیقاً برابر است با مساحت ناحیه بین منحنی نیرو و محور x ، از x_i تا x_f (شکل ۷ ج). بنابراین، انتگرال را به صورت نموداری می‌توان به مساحت تعبیر کرد. نماد \int در واقع یک S تغییر شکل یافته است و فرایند انتگرال‌گیری را نشان می‌دهد [S حرف اول واژه "جمع" در زبان انگلیسی است]. کل کاری را که نیروی F روی جسم، در جابه‌جایی از x_i به x_f ، انجام می‌دهد می‌توان به صورت زیر نوشت

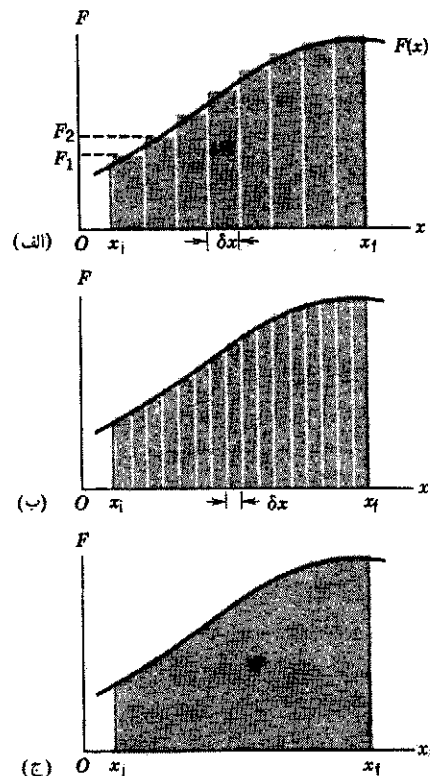
$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x) dx \quad (7)$$

چون نمایش برداری را از این معادله یک‌بعدی حذف کرده‌ایم، باید مراقب علامت F باشیم؛ علامت F مثبت است اگر F در جهت افزایش x باشد، و منفی است اگر F در جهت کاهش x باشد. به عنوان مثالی برای نیروی متغیر، فنری را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم m نیرو وارد می‌کند (شکل ۸). ذره به طور افقی حرکت می‌کند، و جهت حرکت آن را جهت x می‌گیریم؛ مبدأ ($x = 0$) نقطه‌ای است که وقتی ذره در آن باشد فنر در حالت "آسوده" است (شکل ۸ الف). نیروی خارجی، F_{ext} ، در خلاف جهت نیروی فنر بر جسم اثر می‌کند. فرض می‌کنیم که این نیروی خارجی همواره تقریباً با نیروی فنر برابر است؛ به این ترتیب، ذره همیشه تقریباً در حالت تعادل است ($a = 0$).

ذره را تا مسافت x ، از مکان اولیه‌اش در $x = 0$ ، جابه‌جا می‌کنیم (شکل ۸ ب). همراه با عامل خارجی که نیروی F_{ext} را بر ذره وارد



شکل ۸. (الف) ذره‌ای به جرم m به فنری متصل است، و فنر در حالت آسوده است (یعنی طول طبیعی‌اش را دارد). (ب) ذره به اندازه x جابه‌جا می‌شود، و در این حالت دو نیرو بر آن وارد می‌شود: نیروی بازگرداننده فنر و



شکل ۷. (الف) مساحت زیر منحنی نیروی متغیر یک‌بعدی $F(x)$ ، با ناحیه بین دو حد x_i و x_f ، که به بازه‌هایی به اندازه δx تقسیم شده است تقریب زده می‌شود. مجموع مساحت نوارهای مستطیلی تقریباً با مساحت زیر منحنی برابر است. (ب) با استفاده از تعداد بیشتری نوار باریکتر، تقریب بهتری حاصل می‌شود. (ج) در حد $\delta x \rightarrow 0$ ، مساحت واقعی به دست می‌آید.

می‌دهد، تقریباً برابر است با مجموع جملات زیادی به شکل معادله ۴، که مقدار F در هر یک از آنها فرق می‌کند. پس

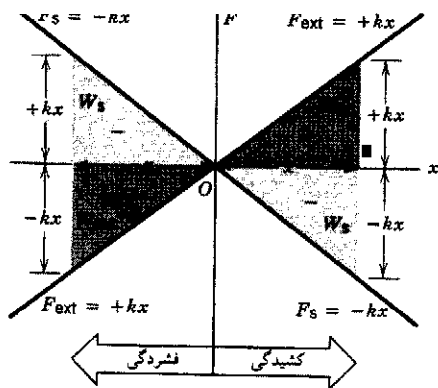
$$W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 + \dots \\ = F_1 \delta x + F_2 \delta x + F_3 \delta x + \dots$$

یا

$$W = \sum_{n=1}^N F_n \delta x \quad (5)$$

که در آن، حرف یونانی سیگما (Σ) نماد جمع روی N بازه از x_i تا x_f است.

برای اینکه تقریب بهتر شود می‌توانیم جابه‌جایی کل از x_i به x_f را به تعداد بیشتری بازه تقسیم کنیم؛ شکل ۷ ب. در این حالت δx کوچکتر می‌شود و مقدار F_n در هر بازه نمایندهٔ بهتری برای نیرو در آن بازه خواهد بود. روشن است که با کوچکتر کردن δx ، و در نتیجه زیادتر کردن تعداد بازه‌ها، تقریب بهتری به دست می‌آید. کار انجام شده توسط F را می‌توان با میل دادن δx به صفر یا میل دادن تعداد بازه‌ها (N) به بینهایت، به طور دقیق به دست آورد. بن



شکل ۹. کار W_s نیروی فنر با نواحی منفی (سایه خاکستری در شکل)، و کار W_{ext} نیروی خارجی در حالت تعادل با نیروی فنر با نواحی مثبت (سایه رنگی در شکل) مشخص شده است. فنر چه کشیده شود ($x > 0$) و چه فشرده شود ($x < 0$)، W_s منفی و W_{ext} مثبت است.

توجه کنید که این مقدار، دقیقاً منفی مقداری است که در معادله ۱۰ داشتیم.

W_{ext} و W_s را، با محاسبه مساحت بین منحنی نیرو-جابه‌جایی مورد نظر و محور x (از $x = 0$ تا مقدار دلخواه x) هم نیز می‌توان به دست آورد. در شکل ۹، دو خط راست شیب‌داری که از مبدأ می‌گذرند، نمودار نیروی خارجی بر حسب جابه‌جایی ($F_{ext} = +kx$) و نیروی فنر بر حسب جابه‌جایی ($F_s = -kx$) اند. نیمه راست نمودار ($x > 0$) متناظر با کشیدگی فنر و نیمه چپ آن ($x < 0$) متناظر با فشرده‌گی فنر است.

در کشیدن فنر، کاری که نیروی خارجی انجام می‌دهد مثبت است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست بالا، با علامت W_{ext} مشخص شده است. قاعده این مثلث $+x$ ، و ارتفاع آن $+kx$ است؛ پس مساحت آن می‌شود

$$\frac{1}{2}(+x)(+kx) = +\frac{1}{2}kx^2$$

که با معادله ۱۱ سازگار است. هنگامی که فنر کشیده می‌شود، کاری که نیروی فنر انجام می‌دهد منفی است؛ در شکل ۹، این کار با مثلث سمت راست پایین، با علامت W_s مشخص شده است. با استدلال هندسی مشابهی می‌شود نشان داد که مساحت این مثلث $-\frac{1}{2}kx^2$ است، که با معادله ۱۰ سازگار است.

در فشردن فنر، چنان که از نیمه چپ شکل ۹ پیداست، کار W_{ext} عامل خارجی همچنان مثبت، و کار W_s فنر همچنان منفی است؛ این همان چیزی است که از علامت نیروها و جابه‌جایی به دست می‌آید.

مثال ۳. فنری به طور قائم آویزان، و در حالت تعادل است. جسمی به جرم 6.40 kg به فنر می‌بندیم، اما ابتدا آن را همانجا نگه می‌داریم تا فنر کشیده نشود. سپس دستی را که جسم روی آن است به آرامی پایین می‌آوریم تا جسم با سرعت ثابت پایین بیاید و به نقطه تعادل برسد؛

می‌دهند، فنر هم نیروی معام F_s را بر دره وارد می‌کند. این نیرو، با تقریب خوبی، برابر است با

$$F_s = -kx \quad (8)$$

k یک ثابت مثبت است، که آن را ثابت نیروی فنر می‌نامند. ثابت k معیاری از مقدار نیروی لازم برای کشیدن فنر به اندازه معین است: هر چه فنر سخت‌تر باشد، مقدار k آن بزرگتر است. معادله ۸ قانون نیروی فنر است، و آن را قانون هوک می‌نامند. علامت منفی در معادله ۸ یادآوری می‌کند که نیرویی که فنر اعمال می‌کند، همواره در خلاف جهت جابه‌جایی ذره است. اگر فنر کشیده شود، $x > 0$ و F_s منفی است، اگر فنر فشرده شود، $x < 0$ و F_s مثبت است. نیروی فنر یک نیروی بازگرداننده است: این نیرو همواره می‌خواهد که ذره را به محل $x = 0$ برگرداند. بیشتر فنرهای واقعی به خوبی از معادله ۸ پیروی می‌کنند، البته به شرط اینکه بیش از حد معینی کشیده نشوند.

ابتدا می‌خواهیم کاری را که فنر روی ذره انجام می‌دهد، در جابه‌جایی ذره از مکان اولیه x_i به مکان نهایی x_f محاسبه کنیم. معادله ۷ را با F_s به کار می‌بریم

$$W_s = \int_{x_i}^{x_f} F_s(x) dx = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2}kx_f^2 - \frac{1}{2}kx_i^2 \quad (9)$$

کاری که فنر روی ذره انجام می‌دهد مثبت است اگر $x_f > x_i$ باشد (یعنی اگر اندازه جابه‌جایی اولیه از اندازه جابه‌جایی نهایی بیشتر باشد). توجه کنید که فنر، در برگرداندن ذره به $x = 0$ ، کار مثبت انجام می‌دهد. اگر اندازه جابه‌جایی اولیه از اندازه جابه‌جایی نهایی کوچکتر باشد، فنر روی ذره کار منفی انجام می‌دهد.

برای محاسبه کاری که فنر، در حرکت ذره از $x = 0$ به نقطه x روی آن انجام می‌دهد، می‌گذاریم $x_i = 0$ و $x_f = x$ ؛ نتیجه می‌شود که

$$W_s = \int_0^x (-kx) dx = -\frac{1}{2}kx^2 \quad (10)$$

توجه کنید که کاری که فنر هنگام فشرده شدن به اندازه x انجام می‌دهد، با کاری که هنگام کشیده شدن به اندازه x انجام می‌دهد یکسان است، زیرا در معادله ۱۰ مجذور جابه‌جایی ظاهر می‌شود؛ x هر علامتی که داشته باشد، علامت x^2 مثبت، و علامت W_s منفی است.

حالا ببینیم عامل خارجی، در حرکت ذره از $x_i = 0$ به $x_f = x$ ، چقدر کار انجام می‌دهد؟ برای اینکه ذره در حالت تعادل بماند، نیروی خارجی F_{ext} باید با نیروی فنر هم‌اندازه، اما در خلاف جهت آن باشد؛ پس، $F_{ext} = +kx$. با تکرار محاسبه، مانند معادله ۱۰، کار عامل خارجی به صورت زیر به دست می‌آید

$$W_{ext} = +\frac{1}{2}kx^2 \quad (11)$$

راه ساده‌تر برای به‌دست آوردن همین نتیجه این است که توجه کنیم که اگر جسم (که آن‌را ذره در نظر می‌گیریم) به آهستگی و با سرعت ثابت پایین بیاید، نیروی خالص وارد بر آن صفر است؛ بنابراین، کل کاری که همه نیروهای وارد بر ذره انجام می‌دهند باید صفر باشد

$$W_{\text{net}} = W_s + W_g + W_h = 0$$

$$W_h = -W_s - W_g = -(-3789\text{J}) - 778\text{J} = -3789\text{J}$$

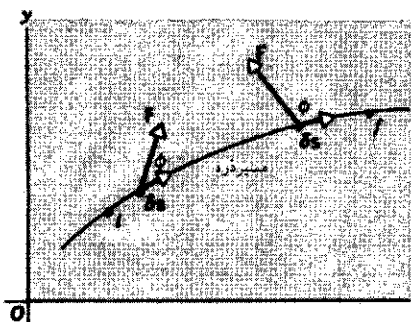
توجه کنید که کار دست برابر است با کار فنر.

۳-۷ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دوبعدی (اختیاری)

هم‌جهت، و هم اندازه نیروی \mathbf{F} که بر یک ذره اثر می‌کند می‌تواند تغییر کند، و مسیر ذره هم می‌تواند منحنی باشد. برای محاسبه کار در این حالت کلی، مسیر را به تعداد زیادی جابه‌جایی کوچک δs تقسیم می‌کنیم، که هر یک در راستای مماس بر مسیر و در جهت حرکت است. شکل ۱۰ دو تا از این جابه‌جاییها را برای مسیری خاص نشان می‌دهد؛ این شکل، همچنین نیروی \mathbf{F} و زاویه ϕ بین \mathbf{F} و δs را در هر نقطه نشان می‌دهد. کار δW را که طی جابه‌جایی δs روی ذره انجام می‌شود می‌توانیم از رابطه زیر پیدا کنیم

$$\delta W = \mathbf{F} \cdot \delta s = F \cos \phi \delta s \quad (۱۲)$$

در این معادله، \mathbf{F} نیروی وارد بر ذره در نقطه‌ای است که جابه‌جایی δs را از آنجا گرفته‌ایم. کار نیروی متغیر \mathbf{F} روی ذره، طی حرکت ذره از نقطه i به نقطه f در شکل ۱۰، به‌طور تقریبی با جمع کردن عنصرهای کار در اجزاء طولی کوچکی که مسیر i تا f را می‌سازند به‌دست می‌آید. اگر جزء طول δs بینهایت کوچک شود، می‌شود به جای آن دیفرانسیل ds گذاشت؛ در این صورت، جمع روی اجزاء مسیر به انتگرال تبدیل



شکل ۱۰. ذره‌ای، روی مسیر شکل، از نقطه i به نقطه f می‌رود. طی حرکت، نیروی \mathbf{F} بر آن وارد می‌شود، که اندازه و جهت آن هر دو متغیر است. در حد $\delta s \rightarrow 0$ ، به‌جای جزء طول ds می‌گذاریم، که در جهت سرعت لحظه‌ای بر مسیر است.

اندازه‌گیری نشان می‌دهد که فنر به‌اندازه 0.124m را $s = 0$ نسبت به طول طبیعی‌اش، کشیده شده است. کاری را که (الف) گرانش، (ب) فنر، و (ج) دست ما روی جسم انجام داده است حساب کنید.

حل: ثابت نیروی فنر را نداریم، اما می‌توانیم آن‌را به‌دست بیاوریم؛ می‌دانیم که در حالت کشیده شده، بین نیروی رو به بالای فنر و نیروی رو به پایین گرانش تعادل برقرار است:

$$\Sigma F = mg - ks = 0$$

در اینجا جهت رو به پایین را مثبت گرفته‌ایم. از این معادله k را به‌دست می‌آوریم. نتیجه می‌شود که

$$k = mg/s = (6.40\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)/(0.124\text{m}) \\ = 506\text{N/m}$$

برای پیدا کردن کار نیروی گرانش، W_g ، توجه کنید که این نیرو ثابت است، و با جابه‌جایی موازی است. پس می‌توانیم معادله ۱ را به‌کار ببریم:

$$W_g = Fs = mgs = (6.40\text{kg})(9.80\text{m/s}^2)(0.124\text{m}) \\ = +778\text{J}$$

این کار مثبت است، زیرا نیرو و جابه‌جایی هم‌جهت‌اند. برای محاسبه کار فنر، معادله ۱۰ را با $x = s$ به‌کار می‌بریم

$$W_s = -\frac{1}{2}ks^2 = -\frac{1}{2}(506\text{N/m})(0.124\text{m})^2 = -3789\text{J}$$

این کار منفی است، زیرا نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است. یک راه پیدا کردن کاری که دست انجام می‌دهد، W_h ، آن است که نیروی دست بر جسم (هنگام پایین آوردن جسم) را حساب کنیم. اگر جسم در این مدت در حالت تعادل باشد، نیروی رو به بالای F_h را که دست وارد می‌کند می‌توانیم از قانون دوم نیوتون، به‌ازای $a = 0$ ، حساب کنیم:

$$\Sigma F = -kx - F_h + mg = 0$$

یا

$$F_h = mg - kx$$

حالا کار را می‌توان با انتگرالی به شکل معادله ۷، با یک علامت منفی، به‌خاطر اینکه نیرو در خلاف جهت جابه‌جایی است، محاسبه کرد.

$$W_h = -\int_0^s F_h dx = -\int_0^s (mg - kx) dx$$

$$= -mgs + \frac{1}{2}ks^2$$

$$\left(\frac{mg}{s}\right) s^2 = -\frac{1}{2}mgs = -3789\text{J}$$

شکل ۱۱ ب است، و از قانون دوم نیوتون نتیجه می‌سود

$$P - T \sin \phi = 0 \quad \text{مؤلفه } x$$

$$T \cos \phi - mg = 0 \quad \text{مؤلفه } y$$

T را بین این دو معادله حذف می‌کنیم. خواهیم داشت

$$P = mg \tan \phi$$

چون P همیشه در جهت x است، می‌شود معادله ۱۴ را، با $F_x = P$ و $F_y = 0$ ، به‌کار برد و کار انجام شده توسط P را به‌دست آورد. به این ترتیب

$$W_P = \int P dx = \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi dx$$

برای محاسبه انتگرال، باید متغیرها را به یکی تبدیل کنیم؛ و ما اینجا x را بر حسب ϕ تعریف می‌کنیم. در یک نقطه میانی حرکت، که مختصه افقی است، داریم $x = L \sin \phi$ و از آنجا $dx = L \cos \phi d\phi$ می‌گذاریم و انتگرال می‌گیریم این را به جای dx

$$\begin{aligned} W_P &= \int_0^{\phi_m} mg \tan \phi (L \cos \phi d\phi) \\ &= mgL \int_0^{\phi_m} \sin \phi d\phi = mgL(-\cos \phi) \Big|_0^{\phi_m} \\ &= mgL(1 - \cos \phi_m) \end{aligned}$$

از شکل ۱۱ الف دیده می‌شود که $h = L(1 - \cos \phi_m)$ پس

$$W_P = mgh$$

کار نیروی (ثابت) گرانشی mg را هم می‌شود به روش مشابهی، براساس معادله ۱۴ (با $F_x = 0$ و $F_y = -mg$) پیدا کرد. نتیجه می‌شود که $W_g = -mgh$ (مسئله ۱۶). علامت منفی از اینجا می‌آید که جابه‌جایی قائم در خلاف جهت نیروی گرانشی است. کار کشش ریسمان، W_T ، صفر است. چون T در سراسر حرکت بر جابه‌جایی ds عمود است. حالا می‌توانیم ببینیم که کل کار صفر است: $W_{\text{net}} = W_P + W_g + W_T = mgh - mgh + 0 = 0$ با صفر بودن نیروی خالص وارد بر ذره، در تمام لحظات حرکت هم جور در می‌آید.

توجه کنید که در این مسئله، کار (مثبت) نیروی افقی P ، کار (منفی) نیروی قائم mg را خنثی می‌کند. علتش این است که کار اسکالر است؛ یعنی جهت یا مؤلفه ندارد. حرکت ذره بستگی به کل کاری دارد که روی آن انجام می‌شود، که برابر است با حاصل جمع اسکالر کار تک‌تک نیروها.

می‌شود، درست مثل معادله ۷. پس کار انجام شده عبارت است از

$$W = \int_i^f \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_i^f F \cos \phi ds \quad (13)$$

برای محاسبه این انتگرال، باید شکل F و ϕ در معادله ۱۳ را در همه نقاط مسیر بدانیم؛ هر دو اینها تابعی از مختصات x و y ذره در شکل ۱۱ اند.

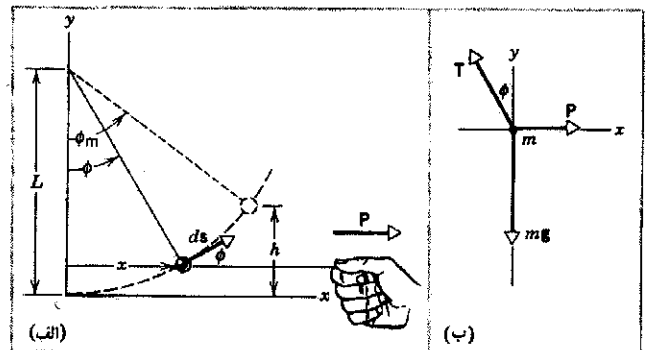
با نوشتن \mathbf{F} و $d\mathbf{s}$ بر حسب مؤلفه‌ها، می‌توانیم عبارت دیگری، هم‌ارز با معادله ۱۳، به‌دست بیاوریم. $\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}$ و $d\mathbf{s} = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ پس $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = F_x dx + F_y dy$ است. (به یاد دارید که $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1$ و $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0$). با قرار دادن این نتیجه در معادله ۱۳، خواهیم داشت

$$W = \int_i^f (F_x dx + F_y dy) \quad (14)$$

انتگرالهایی به شکل انتگرالهای معادلات ۱۳ و ۱۴ را انتگرال خط می‌نامند؛ برای محاسبه این انتگرالها باید $F \cos \phi$ یا F_x و F_y را در همه نقاط مسیر ذره، که می‌تواند خط راست یا منحنی باشد، بدانیم. تعمیم معادله ۱۴ به مورد سه‌بعدی هم کاملاً سراسر است.

مثال ۴. جسم کوچکی به جرم m از ریسمانی به طول L آویزان است. جسم را با نیروی افقی P به یک طرف می‌کشیم تا زاویه ریسمان، با راستای قائم ϕ_m شود (شکل ۱۱ الف). جابه‌جایی چنان آهسته انجام می‌شود که می‌توانیم سیستم را در هر لحظه در حالت تعادل فرض کنیم. کار هر یک از نیروهای وارد بر جسم را پیدا کنید.

حل: حرکت در راستای کمانی به شعاع L است، و جابه‌جایی ds همواره بر کمان مماس است. در یک نقطه میانی حرکت، که ریسمان با راستای قائم زاویه ϕ می‌سازد. نمودار جسم-آزاد ذره به صورت



شکل ۱۱. مثال ۴. (الف) ذره‌ای از ریسمانی به طول L آویزان است و با نیروی افقی P کشیده می‌شود. بیشترین زاویه ریسمان با راستای قائم ϕ_m است. (ب) نمودار جسم-آزاد ذره.

یعنی، نتیجه کار خالص انجام شده روی ذره آن است که مقدار کمیت $\frac{1}{2}mv^2$ ، از نقطه i تا f تغییر کند. این کمیت را انرژی جنبشی (K) ذره می‌نامند و چنین تعریف می‌کنند

$$K = \frac{1}{2}mv^2 \quad (18)$$

برحسب انرژی جنبشی K ، معادله ۱۷ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$W_{\text{net}} = K_f - K_i = \Delta K \quad (19)$$

معادله ۱۹ نمایش ریاضی نتیجه مهمی است به نام قضیه کار-انرژی، که می‌شود آن را چنین بیان کرد:

کار خالص نیروهای وارد بر هر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن ذره.

ما این نتیجه را برای حالتی به دست آورده‌ایم که نیرو ثابت باشد، اما قضیه کار-انرژی در حالت کلی برای نیروهای متغیر هم درست است. کمی بعد، در همین بخش، اثبات کلی قضیه در مورد نیروی متغیر را هم ارائه خواهیم کرد.

انرژی جنبشی هم، مانند کار، کمیتی اسکالر است؛ بر خلاف کار، انرژی جنبشی هیچگاه منفی نمی‌شود، قبلاً دیده بودیم که کار به چارچوب مرجعی که انتخاب می‌کنیم بستگی دارد. پس تعجبی ندارد که انرژی جنبشی هم چنین باشد. می‌دانیم که ناظرهای چارچوبهای لخت متفاوت، سرعت یک ذره را متفاوت می‌سنجند؛ بنابراین، مقادیری که به انرژی جنبشی ذره نسبت می‌دهند هم متفاوت است. اگر چه مقدارهایی که ناظرهای مختلف برای کار و انرژی جنبشی به دست می‌آورند متفاوت است، اما رابطه میان این کمیتها، یعنی رابطه $W_{\text{net}} = \Delta K$ در تمام چارچوبهای لخت برقرار است.

برای اینکه معادله ۱۹ از نظر ابعادی درست باشد، یکای انرژی جنبشی هم باید همان یکای کار باشد؛ یعنی انرژی جنبشی هم برحسب یکاهایی مثل ژول، ارگ، فوت، پاوند، و الکترون ولت بیان می‌شود. اگر اندازه سرعت ذره‌ای ثابت باشد انرژی جنبشی آن هم ثابت است؛ پس کار نیروی برآیند باید صفر باشد. مثلاً در حرکت دایره‌ای یکنواخت، نیروی برآیند به طرف مرکز دایره است، و همواره بر راستای حرکت عمود است. چنین نیرویی روی ذره کار انجام نمی‌دهد؛ این نیرو جهت سرعت را تغییر می‌دهد اما اندازه آن را تغییر نمی‌دهد. نیروی برآیند، تنها اگر در جهت حرکت مؤلفه داشته باشد کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی ذره را عوض می‌کند.

قضیه کار-انرژی یک قانون جدید و مستقل در مکانیک کلاسیک نیست. ما کار را (مثلاً با معادله ۷) و انرژی جنبشی را (با معادله ۱۸) صرفاً تعریف کرده‌ایم و رابطه بین این دو را از قانون دوم نیوتون به دست آورده‌ایم. به هر حال، قضیه کار-انرژی در حل مسائلی که در آنها کار ی روی ذره به سادگی قابل محاسبه باشد، و

۷-۴ انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی

در این بخش، اثر کار را بر حرکت ذره بررسی می‌کنیم. اگر نیرویی بر ذره‌ای وارد شود، و با نیروهای دیگر خنثی نشود، البته وضعیت حرکت جسم تغییر می‌کند. قانون دوم نیوتون، یک روش برای تحلیل این تغییر حرکت است. اکنون روش دیگری را بررسی می‌کنیم که در نهایت به همان نتایج حاصل از قانون دوم نیوتون می‌انجامد، اما به کار بردن آن خیلی وقتها آسانتر است. این روش به یکی از قوانین پایستگی هم منجر می‌شود؛ قوانین پایستگی نقش مهمی در تعبیر فرایندهای فیزیکی دارند.

در اینجا فقط کار یک نیرو بر ذره را در نظر نمی‌گیریم، بلکه کل کار W_{net} حاصل از همه نیروهای وارد بر ذره را در نظر می‌گیریم. برای یافتن این کار خالص دو راه وجود دارد. اول اینکه نیروی خالص، یعنی حاصل جمع برداری نیروهای وارد بر ذره را پیدا کنیم

$$\mathbf{F}_{\text{net}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \dots \quad (15)$$

و بعد این نیرو را به عنوان یک تک نیرو در نظر بگیریم و کار را، طبق معادله ۷ در حالت یک‌بعدی یا طبق معادله ۱۳ در حالت چندبعدی، محاسبه کنیم. در روش دوم، کار حاصل از هر یک از نیروهای وارد بر ذره را پیدا می‌کنیم

$$W_1 = \int \mathbf{F}_1 \cdot d\mathbf{s}, \quad W_2 = \int \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{s}$$

$$W_3 = \int \mathbf{F}_3 \cdot d\mathbf{s}, \dots$$

و چون کار اسکالر است، کارهای حاصل از تک تک نیروها را با هم جمع می‌کنیم و کل کار را به دست می‌آوریم

$$W_{\text{net}} = W_1 + W_2 + W_3 + \dots \quad (16)$$

نتیجه حاصل از این دو روش یکسان است، و انتخاب یکی از آنها فقط بستگی به این دارد که کدام یک ساده‌تر یا راحت‌تر است. می‌دانیم که اگر نیروی خالص غیرصفری به ذره‌ای وارد شود، ذره شتاب می‌گیرد و به این ترتیب وضعیت حرکتش عوض می‌شود؛ مثلاً، از سرعت اولیه v_i به سرعت نهایی v_f می‌رسد. اثر کار حاصل از این نیروی خالص غیرصفری که بر ذره وارد می‌شود چیست؟

ابتدا در مورد نیروی ثابت یک‌بعدی به‌این پرسش جواب می‌دهیم. ذره از x_i به x_f می‌رود، در اثر چنین نیرویی، به‌طور یکنواخت از v_i تا v_f شتاب می‌گیرد. کار این نیرو برابر است با

$$W_{\text{net}} = F_{\text{net}}(x_f - x_i) = ma(x_f - x_i)$$

چون شتاب a ثابت است، می‌توانیم معادله ۲۰ فصل ۲ را، به شکل

$$v_f^2 = v_i^2 + 2a(x_f - x_i)$$

$$W_{\text{net}} = \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 \quad (17)$$

در رآکتورهای هسته‌ای، نوترون در اثر شکافت هسته‌ای تولید می‌شود و انرژی جنبشی چنین نوترونی، نوعاً در حدود چند MeV است. روی نوترونی‌های این مثال، توسط یک عامل خارجی (به نام کندکننده) کار منفی انجام شده و در نتیجه انرژی جنبشی این نوترونها با ضریب قابل توجهی، از چند MeV به چند eV، کاهش یافته است.

مثال ۶. جسمی به جرم $m = ۴۵g$ از ارتفاع $h = ۱۰۵m$ بالاتر از سطح زمین، از حالت سکون، سقوط می‌کند، سرعت این جسم، درست پیش از برخورد به زمین، چقدر است؟

حل: فرض می‌کنیم بتوانیم جسم را مثل ذره در نظر بگیریم. این مسئله را البته مستقیماً با قوانین نیوتون هم می‌شود حل کرد (فصل ۵)، اما این بار می‌خواهیم از قضیه کار-انرژی استفاده کنیم. نیرو ثابت، و در جهت حرکت است. پس کار نیروی گرانش برابر است با

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{s} = mgh$$

سرعت جسم، در ابتدا $v_0 = 0$ ، و در پایان v است. تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

طبق قضیه کار-انرژی، $W = \Delta K$ است، پس

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2$$

بنابراین، سرعت جسم، درست پیش از برخورد، برابر است با

$$v = \sqrt{2gh} = \sqrt{2(۹.۸۰ \text{ m/s}^2)(۱۰.۵ \text{ m})} = ۱۴.۳ \text{ m/s}$$

توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم جسم است، همان‌طور که قبلاً با استفاده از قوانین نیوتون هم دیده بودیم.

مثال ۷. جسمی به جرم $m = ۳.۶۳ \text{ kg}$ ، با سرعت $v = ۱.۲۲ \text{ m/s}$ روی میز افقی بدون اصطکاک می‌لغزد. این جسم به فنری برخورد می‌کند و آن را می‌فشارد تا به حالت سکون برسد. فنر، در این حالت چقدر فشرده شده است؟ ثابت نیروی فنر $k = ۱۳۵ \text{ N/m}$ است.

حل: تغییر انرژی جنبشی جسم برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2$$

کار فنر روی جسم، طی فشرده شدن فنر از حالت تعادل به اندازه d ، طبق معادله ۱۰، برابر است با

$$W = -\frac{1}{2}kd^2$$

بخواهیم سرعت ذره را در نقطه‌ای معین پیدا کنیم، قضیه مفیدی است. هم اینکه قضیه کار-انرژی نقطه آغازی برای تعمیم کلی، مفهوم انرژی و بررسی چگونگی ذخیره شدن و تقسیم آن در اجزای سیستم‌های پیچیده است. اصل پایستگی انرژی، موضوع فصل بعدی است.

اثبات کلی قضیه کار-انرژی

آنچه می‌آید اثبات معادله ۱۹ در مورد نیروهای متغیر در یک بعد است، محاسبات مربوط به موارد دوبعدی و سه‌بعدی را به عنوان تمرین به عهده خواننده گذاشته‌ایم (مسئله ۳۴). فرض کنید F_{net} نیروی خالص وارد بر ذره باشد. کار خالص نیروهای خارجی وارد بر ذره $W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} dx$ است. با کمی عملیات ریاضی می‌توانیم این انتگرال را تغییرمتغیر بدهیم و آن را به شکل مفیدتری در بیاوریم

$$F_{\text{net}} = ma = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = m \frac{dv}{dx} v = mv \frac{dv}{dx}$$

به این ترتیب

$$W_{\text{net}} = \int F_{\text{net}} dx = \int mv \frac{dv}{dx} dx = \int mv dv$$

حالا متغیر انتگرال‌گیری سرعت است. از سرعت اولیه v_i تا سرعت نهایی v_f انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} W_{\text{net}} &= \int_{v_i}^{v_f} mv dv = m \int_{v_i}^{v_f} v dv = \frac{1}{2}m(v_f^2 - v_i^2) \\ &= \frac{1}{2}mv_f^2 - \frac{1}{2}mv_i^2 = \Delta K \end{aligned}$$

این نتیجه همان معادله ۱۹ است و نشان می‌دهد که قضیه کار-انرژی در مورد نیروهای متغیر هم صدق می‌کند.

مثال ۵. یکی از روشهای سنجش انرژی جنبشی نوترونی‌های یک باریکه، که مثلاً از یک رآکتور هسته‌ای می‌آید، اندازه‌گیری مدتی است که طول می‌کشد تا یکی از ذرات باریکه مسافت بین دو نقطه ثابت به فاصله معین از هم را بپیماید. این روش را روش زمان پرواز می‌نامند. فرض کنید که نوترونی مسافت $d = ۶.۲ \text{ m}$ را در زمان $t = ۱۶۰ \mu\text{s}$ می‌پیماید. انرژی جنبشی این نوترون چقدر است؟ جرم نوترون را $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ بگیرید.

حل: سرعت نوترون برابر است با

$$v = \frac{d}{t} = \frac{۶.۲ \text{ m}}{۱۶۰ \times ۱۰^{-۶} \text{ s}} = ۳.۸۸ \times ۱۰^۲ \text{ m/s}$$

و انرژی جنبشی آن از معادله ۱۸، برابر است با

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})(3.88 \times 10^2 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.26 \times 10^{-18} \text{ J} = 7.9 \text{ eV} \end{aligned}$$

از قضیه کار-انرژی نتیجه می‌شود که

$$-\frac{1}{2}kd^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

یا

$$d = v\sqrt{\frac{m}{k}} = (1.22 \text{ m/s})\sqrt{\frac{3.63 \text{ kg}}{135 \text{ N/m}}} = 0.200 \text{ m}$$

محدودیت‌های قضیه کار-انرژی

قضیه کار-انرژی (معادله ۱۹) را مستقیماً از قانون دوم نیوتون به دست آوردیم، و این قانون، در شکلی که ما بیانش کردیم، تنها در مورد ذرات صادق است. پس قضیه کار-انرژی هم، به صورتی که ما گفتیم، فقط برای ذرات معتبر است. این قضیه مهم را در مورد اجسام واقعی فقط وقتی می‌شود به کار برد که این اجسام مثل ذره رفتار کنند، یعنی همان‌طور که قبلاً دیدیم همه نقاطشان دقیقاً مثل هم حرکت کنند. در استفاده از قضیه کار-انرژی هم، فقط زمانی می‌توان اجسام گسترده را ذره در نظر گرفت که انرژی آنها صرفاً از نوع جنبشی انتقالی باشد.

مثلاً، یک اتومبیل آزمایشی را در نظر بگیرید که مستقیماً از جلو به یک مانع سخت بتونی برخورد می‌کند و متلاشی می‌شود. روشن است که انرژی جنبشی انتقالی اتومبیل، در اثر برخورد به مانع، مجاله شدن و توقف آن، کم می‌شود. اما در این مسئله انواع دیگری از انرژی، جز انرژی جنبشی انتقالی هم دخیل‌اند، مثلاً انرژی داخلی مربوط به خم شدن و مجاله شدن اتومبیل؛ بخشی از این انرژی داخلی ممکن است به شکل افزایش دمای اتومبیل بروز کند، و بخشی از آن می‌تواند، به شکل گرما به محیط اطراف منتقل شود. توجه کنید که اگرچه ممکن است مانع طی برخورد، نیروی بزرگی بر اتومبیل وارد کند، اما این نیرو کاری انجام نمی‌دهد زیرا نقطه اثر نیرو بر اتومبیل حرکت نمی‌کند. (تعریف اولیه کار - معادله ۱ و شکل ۱- را به خاطر بیاورید. نقطه اثر نیرو باید حرکت کند تا کار انجام شود.) بنابراین، در این مورد $\Delta K \neq 0$ ، اما $W = 0$ است؛ روشن است که معادله ۱۹ برقرار نیست. اتومبیل مثل ذره رفتار نمی‌کند؛ همه نقاط آن دقیقاً یک نوع حرکت ندارند.

به دلایل مشابه، نمی‌شود جسمی را که روی سطحی می‌لغزد و تحت تأثیر نیروی اصطکاک قرار می‌گیرد، از لحاظ کار-انرژی، ذره فرض کرد (اگرچه در تحلیل حرکت جسم با استفاده از قوانین نیوتون باز هم می‌توانیم، مثل فصل ۶، آن را ذره در نظر بگیریم). نیروی اصطکاک، که آن را یک نیروی ثابت معرفی کردیم، در واقع بسیار پیچیده است؛ در فرایند اصطکاک دائماً جوشهای میکروسکوپی تشکیل می‌شوند و می‌شکنند (بخش ۲-۶). این امر موجب تغییر شکل سطح می‌شود و انرژی داخلی آن را تغییر می‌دهد که بخشی از این انرژی می‌تواند به شکل افزایش دمای سطح ظاهر شود. چون د

دیگر انرژی دشوار است و چون این اجسام مثل ذره رفتار نمی‌کنند، در حالت کلی درست نیست که قضیه کار-انرژی را برای اجسامی که نیروی اصطکاک به آنها وارد می‌شود به کار ببریم.

در این‌گونه موارد، نباید اتومبیل برخوردکننده یا جسم لغزان را ذره تلقی کنیم، بلکه باید آنها را مثل سیستمهای بزرگی که تعداد زیادی ذره دارند در نظر بگیریم. به کار بردن قضیه کار-انرژی برای تک‌تک ذرات این سیستم البته کار درستی است، اما فوق‌العاده دشوار است. در فصل ۹، روش ساده‌تری برای بررسی این سیستمهای پیچیده ذرات ارائه می‌کنیم، و نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان قضیه کار-انرژی را تعمیم داد تا در این موارد هم قابل استفاده باشد.

۷-۵ توان

در طراحی سیستمهای مکانیکی، اغلب نه تنها باید مقدار کاری را که انجام می‌شود در نظر بگیریم، بلکه لازم است به آهنگ انجام این کار هم توجه کنیم. برای اینکه جسمی را تا ارتفاع معینی بالا ببریم مقدار معینی کار لازم است و این کار، چه انجام آن ۱ ثانیه طول بکشد چه ۱ سال، یکسان است. اما آهنگ انجام کار در این دو مورد متفاوت است.

توان را آهنگ انجام کار تعریف می‌کنیم. (در اینجا فقط توان مکانیکی را بررسی می‌کنیم. که مربوط به کار مکانیکی است. با تعریف کلی‌تر به عنوان انرژی منتقل شده در واحد زمان، می‌شود مفهوم توان را به توان الکتریکی، توان خورشیدی، و مانند آن تعمیم داد.) توان متوسط \bar{P} حاصل از عاملی که نیروی معینی بر جسم وارد می‌کند، عبارت است از کار آن نیرو تقسیم بر کل مدتی که انجام کار طول می‌کشد، یعنی

$$\bar{P} = \frac{W}{t} \quad (20)$$

توان لحظه‌ای یک عامل در انجام کار، عبارت است از

$$P = \frac{dW}{dt} \quad (21)$$

که در آن dW جزء کار کوچکی است که در بازه زمانی بینهایت کوچک dt انجام شده است. اگر توان در طی زمان ثابت باشد، P با \bar{P} برابر است و خواهیم داشت

$$W = Pt \quad (22)$$

یکای SI توان ژول بر ثانیه است، که آن را وات می‌نامند (با علامت اختصاری W). این نامگذاری به افتخار جیمز وات (۱۷۳۶ تا ۱۸۱۹) است، که نقش مهمی در توسعه ماشینهای بخار زمان خود داشت، و راه پیشرفت به سوی ماشینهای کارتر امروزی را هموار کرد. در سیستم بریتانیایی، یکای توان $\text{ft} \cdot \text{lb/s}$ است، اما اغلب از یکای رایجتری است: که اسب بخار (hp) نام دارد. این یکا را

که معادل ۱۲۶hp است، در حدود توان موتور بعضی اتومبیل‌های سواری. البته به علت اتلاف ناشی از اصطکاک و اتلاف‌های دیگر، حداقل توانی که موتور برای بالا بردن آسانسور تأمین می‌کند باید از این بیشتر باشد. در عمل آسانسور معمولاً یک وزنهٔ مقابله هم دارد که با بالا رفتن اتاقک آسانسور پایین می‌آید. موتور باید به اتاقک توان مثبت و به وزنه پایین‌رونده توان منفی تحویل بدهد. به این ترتیب، توان خالصی که موتور باید تأمین کند، به مقدار زیادی کمتر از آن است که محاسبه شد.

۶-۷ چارچوب‌های مرجع (اختیاری)

قوانین نیوتون فقط در چارچوب‌های مرجع لخت برقرارند (بخش ۶-۸)، و اگر در چارچوب خاصی برقرار باشند، در هر چارچوب دیگری که با سرعت ثابت نسبت به آن حرکت کند هم برقرارند، کمیتهای فیزیکی خاصی هستند که نتیجهٔ اندازه‌گیری آنها در چارچوب‌های لخت متفاوت همواره یکسان است. در مکانیک نیوتونی، این کمیتهای ناورد عبارت‌اند از نیرو، جرم، شتاب، و زمان. کمیتهای دیگر، مثلاً جابه‌جایی یا سرعت، ناوردا نیستند و از سنجش آنها در چارچوب‌های لخت متفاوت، نتایج متفاوتی به دست می‌آید. مثلاً در بخش ۴-۶ دیدیم که مقادیری که ناظرهای دو چارچوب لخت مختلف برای یک سرعت اندازه می‌گیرند، چه ارتباطی با هم دارند.

ناظرهای دو چارچوب لخت متفاوت، از سنجش شتاب یک ذره نتیجهٔ یکسانی به دست می‌آورند، بنابراین، باید تغییر سرعت Δv ذره هم برای آنها یکسان باشد. اما این دو ناظر، در حالت کلی برای انرژی جنبشی ذره مقدار یکسانی به دست نمی‌آورند. ناظرهای در حال حرکت نسبت به هم، مقادیر متفاوتی برای جابه‌جایی یک ذره می‌سنجند؛ بنابراین (اگرچه نیروی وارد بر ذره را یکسان می‌سنجند، چون نیرو ناورداست) مقادیر متفاوتی برای کار انجام شده روی ذره به دست می‌آورند. در این بخش، به کمک یک مثال عددی خاص، این مسائل را روشن می‌کنیم و نشان می‌دهیم که قضیهٔ کار-انرژی برای ناظرهای همهٔ چارچوب‌های لخت معتبر است.

مثال زیر را در نظر بگیرید. کارگری صندوقی را در قسمت بار قطاری که روی ریل‌های افقی است هل می‌دهد. قطار با سرعت ثابت 15.0 m/s در حرکت است صندوق 12 kg جرم دارد و کارگر آن را به اندازهٔ 2.4 m (نسبت به قطار) به جلو می‌برد، و در این مدت سرعت صندوق با شتاب ثابت زیاد می‌شود و (نسبت به قطار) از صفر به 1.5 m/s می‌رسد. شکل ۱۲ الف وضعیت شروع و پایان را از دید ناظری که سوار قطار است نشان می‌دهد. از دید این ناظر، تغییر انرژی جنبشی برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}(12 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s})^2 - 0 = 13.5 \text{ J}$$

شتاب صندوق را (که ثابت فرض شده است) می‌توانیم از معادلهٔ ۲۰

عموماً برای بیان توان موتورهای الکتریکی، موتور اتومبیلها، و مانند آن به کار می‌برند. یک اسب بخار، بنا بر تعریف، $550 \text{ ft} \cdot \text{lb/s}$ است که تقریباً معادل است با 746 W .

کار را بر حسب یکای توان \times زمان هم می‌توان بیان کرد. نمونه‌اش یکای کیلووات-ساعت است، که شرکت برق برای سنجش مقدار کاری که (به شکل انرژی الکتریکی) به خانهٔ شما تحویل داده است به کار می‌برد. یک کیلووات ساعت، کاری است که عاملی با توان ثابت 1 kW در طی ۱ ساعت تحویل می‌دهد.

توانی را که به جسم داده می‌شود، بر حسب سرعت جسم و نیروی وارد بر آن هم می‌توانیم بیان کنیم. به طور کلی، معادلهٔ ۲۱ را می‌شود چنین نوشت

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{s}}{dt}$$

با گذاشتن \mathbf{v} به جای $d\mathbf{s}/dt$ نتیجه می‌شود که

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \quad (23)$$

اگر \mathbf{F} و \mathbf{v} با هم موازی باشند، رابطهٔ بالا به صورت زیر در می‌آید

$$P = Fv \quad (24)$$

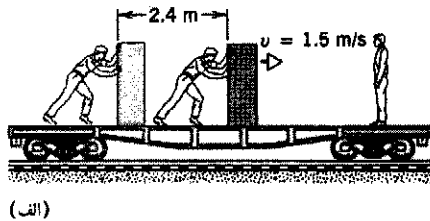
توجه کنید که اگر \mathbf{F} و \mathbf{v} موازی و در خلاف جهت هم باشند، توان منفی می‌شود. تحویل توان منفی به جسم، به معنی انجام کار منفی روی آن است، در این حالت، نیرویی که عامل خارجی به جسم وارد می‌کند در خلاف جهت جابه‌جایی $d\mathbf{s}$ ، و در نتیجه در خلاف جهت \mathbf{v} است.

مثال ۸. وزن یک آسانسور خالی 5160 N (1160 lb) است. این آسانسور چنان طراحی شده است که می‌تواند حداکثر 20 مسافر را طی 18 ثانیه از طبقهٔ هم‌کف به طبقهٔ بیست‌وپنجم ساختمان ببرد. اگر فرض کنیم وزن هر مسافر به طور متوسط 710 N (160 lb)، و فاصلهٔ بین دو طبقهٔ مجاور 3.5 m (11 ft) است، توان ثابت موتور آسانسور حداقل چقدر باید باشد؟ (فرض بر آن است که همهٔ کاری که آسانسور را حرکت می‌دهد از موتور می‌آید، و آسانسور وزنهٔ مقابله ندارد.)
حل: حداقل نیروی لازم برابر با مجموع وزن آسانسور خالی و وزن مسافران است، $F = 5160 \text{ N} + 20(710 \text{ N}) = 19400 \text{ N}$. کاری که باید انجام شود برابر است با

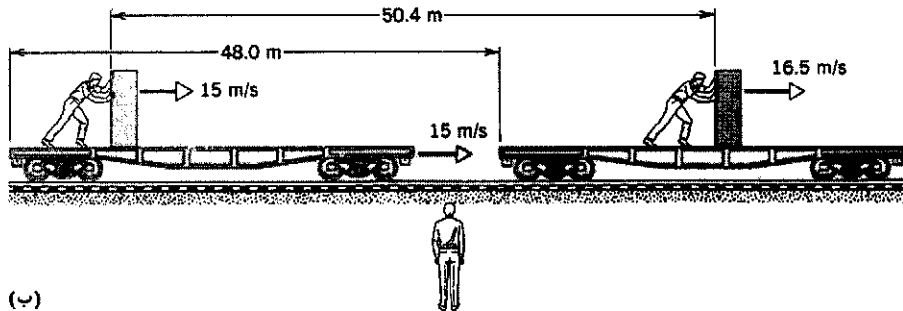
$$W = Fs = (19400 \text{ N})(25 \times 3.5 \text{ m}) = 1.7 \times 10^6 \text{ J}$$

بنابراین، حداقل توان لازم برابر خواهد بود با

$$P = \frac{W}{\Delta t} = \frac{1.7 \times 10^6 \text{ J}}{18 \text{ s}} = 94 \text{ kW}$$



(الف)



(ب)

شکل ۱۲. کارگری صندوقی را در قطاری به جلو هل می‌دهد، (الف) وضعیت از دید ناظر قطار و (ب) وضعیت از دید ناظر ساکن بر زمین.

فصل ۲ پیدا کنیم

شکل ۱۲ ب نشان می‌دهد، مقدار جابه‌جایی صندوق هم به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد. از دید ناظر زمینی، نیرو تنها در طی مسافت $۲٫۴\text{m}$ وارد نشده بلکه در طی مسافت بزرگتر $۵۰٫۴\text{m}$ عمل کرده است؛ قطار با سرعت $۱۵٫۰\text{m/s}$ در مدت $۳٫۲\text{s}$ ($\Delta v/a = ۳٫۲\text{s}$) یا $\Delta v/a'$ ؛ شتاب و زمان هر دو در مکانیک نیوتونی ناوردا هستند که صندوق در حرکت است، $۴۸٫۰\text{m}$ می‌پیماید. بنابراین، جابه‌جایی $\Delta x'$ صندوق در این مدت برابر است با $۵۰٫۴\text{m} = ۴۸٫۰\text{m} + ۲٫۴\text{m}$. اما نیرو ناورداست؛ از دید ناظر زمینی، $F' = F = ۵۶۳\text{N}$. بنابراین، ناظر زمینی نتیجه می‌گیرد که

$$W' = F' \Delta x' = (۵۶۳\text{N})(۵۰٫۴\text{m}) = ۲۸۴\text{J}$$

پس قضیه کار-انرژی برای ناظر زمینی هم درست است! اگرچه این دو ناظر، مقادیر جابه‌جایی و سرعت را متفاوت مشاهده می‌کنند، و مقادیر کار و انرژی جنبشی را هم متفاوت به دست می‌آورند، اما هر دو نتیجه می‌گیرند که مقدار کار با تغییر انرژی جنبشی مساوی است.

قانون ناوردا در فیزیک قانونی است که شکل آن در همه چارچوبهای مرجع لخت یکسان باشد. یک مثال خوب، همین قضیه کار-انرژی است، که ناوردا بودنش را دیدیم. در چارچوب لخت ناظر S ، که در فرایند خاصی کار را W و تغییر انرژی جنبشی را ΔK می‌سنجد، قضیه کار و انرژی به شکل $W = \Delta K$ است. ناظر S' که با سرعت ثابت نسبت به S حرکت می‌کند، در همان فرایند کار را W' و تغییر انرژی جنبشی را $\Delta K'$ می‌سنجد. در حالت کلی $W \neq W'$ و $\Delta K \neq \Delta K'$ است، اما ناظر S' هم نتیجه می‌گیرد که $W' = \Delta K'$ است. یک ناظر لخت دیگر، S'' ، هم می‌تواند نتیجه بگیرد که $W'' = \Delta K''$ است. شکل قضیه کار-انرژی از دید ناظرهای همه چارچوبهای لخت یکسان است. اصول ناوردایی، خیلی وقتها سرنخی از کارکرد جهان طبیعی به دست می‌دهند؛ این اصول حاکی از آن هستند که فلان رابطه خاص، تصادفی و ناشی از موقعیت

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2(x_f - x_i)} = \frac{(۱٫۵\text{m/s})^2 - 0}{2(۲٫۴\text{m})} = ۰٫۴۶۹\text{m/s}^2$$

این شتاب ناشی از نیروی خالصی است که آن هم ثابت و برابر است با $F = ma = (۱۲\text{kg})(۰٫۴۶۹\text{m/s}^2) = ۵٫۶۳\text{N}$ کاری که این نیرو در حین جابه‌جایی $\Delta x = ۲٫۴\text{m}$ روی صندوق انجام می‌دهد برابر است با

$$W = F \Delta x = (۵٫۶۳\text{N})(۲٫۴\text{m}) = ۱۳٫۵\text{J}$$

بنابراین، ناظر قطار نتیجه می‌گیرد که $W = \Delta K$ است، یعنی قضیه کار-انرژی صدق می‌کند.

حالا ببینیم ناظری که نسبت به زمین ساکن است از همین نوع اندازه‌گیریها، چه نتیجه‌ای به دست می‌آورد؟ (مقادیری را که این ناظر می‌سنجد با پریم نشان می‌دهیم.) وقتی صندوق نسبت به قطار ساکن است، از دید ناظر زمینی دارد با سرعت $v_i' = ۱۵٫۰\text{m/s}$ به جلو حرکت می‌کند. پس از هل دادن صندوق، ناظر زمینی مشاهده می‌کند که سرعت آن به $v_f' = ۱۵٫۰\text{m/s} + ۱٫۵\text{m/s} = ۱۶٫۵\text{m/s}$ می‌رسد، و نتیجه می‌گیرد که تغییر انرژی جنبشی آن برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K' &= K_f' - K_i' = \frac{1}{2}mv_f'^2 - \frac{1}{2}mv_i'^2 \\ &= \frac{1}{2}(۱۲\text{kg})(۱۶٫۵\text{m/s})^2 - \frac{1}{2}(۱۲\text{kg})(۱۵٫۰\text{m/s})^2 \\ &= ۲۸۴\text{J} \end{aligned}$$

این مقدار، با آنچه ناظر سوار بر قطار سنجیده بود ($\Delta K = ۱۳٫۵\text{J}$) تفاوت زیادی دارد.

اما پیش از آنکه به صحت قضیه کار-انرژی شک کنیم، کار انجام شده بر صندوق را از دید ناظر زمینی حساب می‌کنیم. چنانکه

مرجع فلان ناظر خاص نیست، بلکه اثر یک تقارن بنیادی طبیعت است.

در چارچوب هوپیمای ۲، ذابل دار مثبت انجام می‌دهد. از دید خلبان این هوپیمای، نیروی فنروار در خلاف جهت هوپیمای خودش است، و جابه‌جایی هوپیمای ۱ هم در همان جهت نیروست. پس در چارچوب مرجع هوپیمای ۲ هم قضیه کار-انرژی درست است، و این بار W و ΔK هر دو مثبت‌اند.

از این مثال نتیجه می‌گیریم که هم علامت کاری که نیرو انجام می‌دهد و هم علامت تغییر انرژی جنبشی یک ذره معین، می‌تواند به چارچوب مرجع ناظر بستگی داشته باشد. اما با وجود این اختلاف در تعبیر، هر دو ناظر در اعتبار قضیه کار-انرژی توافق دارند (پرسش ۲۲ را هم ببینید، که در آن این فرایند از دیدگاه خلبان هوپیمای ۱ هم بررسی می‌شود).

مثال ۹. دو هوپیمای یکسان، هر یک به جرم m ، با سرعت ثابت v نسبت به آب، بر فراز آب ساکن پرواز می‌کنند. هوپیمای ۱ بر یک ناو هوپیمابر، که نسبت به آب ساکن است، فرود می‌آید. قلابی که در بدنه این هوپیماست به کابلی در عرشه وصل می‌شود، و کابل نیرویی از نوع نیروی فنر به هوپیمای وارد می‌کند تا هوپیمای متوقف شود. ناظری که در ناو ایستاده است، مسافت بین نقطه آغاز اتصال هوپیمای به کابل تا سکون کامل هوپیمای را برابر با d می‌سنجد. با چشمپوشی از نیروهای دیگر وارد بر هوپیمای (مثلاً اصطکاک)، درستی قضیه کار-انرژی را از دید (الف) ناظر همراه با ناو و (ب) خلبان هوپیمای ۲، که همچنان با همان سرعت اولیه در همان جهت اولیه پرواز می‌کند بررسی کنید. حل: (الف) تغییر انرژی جنبشی برای ناظر سوار بر ناو برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

این ناظر مشاهده می‌کند که هوپیمای متوقف می‌شود، پس طبیعی است که تغییر انرژی جنبشی آن را منفی بسنجد.

کابل یک نیروی فنروار بر هوپیمای وارد می‌کند؛ اگر ثابت نیروی مؤثر را k بگیریم، این نیرو روی هوپیمای کاری به مقدار

$$W_s = -\frac{1}{2}kd^2$$

انجام می‌دهد. طبیعی است که این کار، از دید این ناظر، منفی است، زیرا هنگام فرود هوپیمای، نیروی فنروار و جابه‌جایی هوپیمای روی عرشه در خلاف جهت یکدیگرند. اگر از نیروهای دیگر (از جمله اصطکاک) صرف‌نظر کنیم، مطمئناً می‌توانیم هوپیمای را مثل ذره در نظر بگیریم، و برای این ناظر قضیه کار-انرژی درست است. و دیگر اینکه در این چارچوب مرجع، W و ΔK هر دو منفی‌اند.

(ب) از دید خلبان هوپیمای ۲، انرژی جنبشی اولیه هوپیمای ۱ صفر است؛ دو هوپیمای کنار هم پرواز می‌کنند و نسبت به هم حرکتی ندارند. هنگامی که هوپیمای ۱ روی ناو هوپیمابر متوقف می‌شود، سرعت آن نسبت به هوپیمای ۲ برابر با $-v$ است؛ پس تغییر انرژی جنبشی آن به صورت زیر است

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = +\frac{1}{2}mv^2$$

ممکن است عجیب به نظر برسد که از دیدگاه خلبان هوپیمای ۲، انرژی جنبشی هوپیمای ۱ زیاد می‌شود، اما در چارچوب مرجع هوپیمای ۲، هوپیمای ۱ در ابتدا ساکن بود و نهایتاً با سرعت v حرکت می‌کرده است.

۷-۷ انرژی جنبشی در سرعت‌های زیاد^۱ (اختیاری)

در بخش قبل، برای تبدیل سرعت از یک چارچوب مرجع به چارچوب مرجع دیگر، فرمول گالیله‌ای نیوتونی را به‌کار بردیم: $v = v' + u$. این فرمول را در بخش ۴-۶ به‌دست آوردیم و گفتیم که در سرعت‌های زیاد معتبر نیست؛ در چنین سرعت‌هایی، باید رابطه صحیح را، که از نسبیت خاص حاصل می‌شود (معادله ۴۶ فصل ۴) به‌کار برد. اگر به این فکر افتاده باشید که فرمول $\frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی هم در سرعت‌های زیاد نادرست از آب در می‌آید، درست فکر کرده‌اید.

فرمول کلی انرژی جنبشی، که می‌شود آن را در هر سرعتی به‌کار برد، چنین است

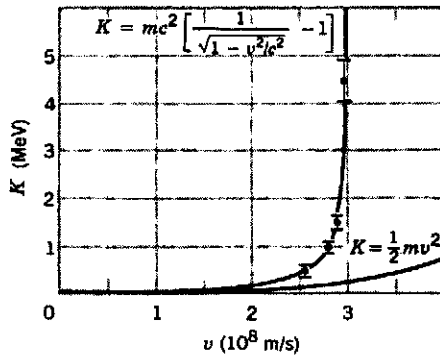
$$K = mc^2 \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right] \quad (25)$$

(این نتیجه را در فصل ۲۱ به‌دست خواهیم آورد.) فرمول ۲۵ آیا معنی‌اش این است که $\frac{1}{2}mv^2$ غلط است؟ در سرعت‌های زیاد حتماً چنین است، اما می‌توان نشان داد که معادله ۲۵، در سرعت‌های کم واقعاً به $\frac{1}{2}mv^2$ تبدیل می‌شود. برای این کار، به عبارت بسط دو جمله‌ای $(1+x)^p$ نیاز داریم

$$(1+x)^p = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!}x^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{3!}x^3 + \dots$$

در این رابطه $n!$ (بخوانید "n فاکتوریل") به معنی حاصل ضرب همه اعداد صحیح از ۱ تا n است. پس، $3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$ است. بسط دو جمله‌ای رابطه مفیدی است، به خصوص وقتی که x در مقایسه با ۱ کوچک باشد. مثلاً فرض کنید x ، در حدود 10^{-6} باشد.

۱. این بخش را می‌شود حذف کرد، یا تا بحث نسبیت در فصل ۲۱ به تعویق



شکل ۱۳. مقایسه فرمولهای کلاسیک و نسبیتی انرژی جنبشی الکترون. در سرعتهای کم، دو فرمول یک نتیجه می‌دهد، اما داده‌ها به روشنی نشان می‌دهند که در سرعتهای نزدیک به سرعت نور، فرمول نسبیتی درست است.

شکل ۱۳ نتایج آزمون تجربی معادله ۲۵ را نشان می‌دهد. در این آزمایش، الکترونها را تا انرژی جنبشی معینی شتاب می‌دهند و سپس سرعتشان را، از طریق سنجش زمان لازم برای طی یک مسافت معین، به دست می‌آورند. روشن است که در سرعتهای زیاد، داده‌ها به نفع نتایج حاصل از نظریه نسبیت‌اند. به این هم توجه کنید که در سرعتهای کم، دو منحنی از هم قابل تشخیص نیستند.

مثال ۱۰. شتابدهنده تواترون آزمایشگاه شتابدهنده فرمی، پروتون را تا انرژی جنبشی‌ای در حدود ۱ TeV (یعنی 10^{12} eV، که هر eV برابر با 1.6×10^{-19} J است) شتاب می‌دهد. سرعت یک پروتون ۱ TeV چقدر است؟ جرم پروتون 1.67×10^{-27} kg است. حل: انرژی جنبشی پروتون ۱ TeV، برحسب یکای SI برابر است با

$$K = 1 \text{ TeV} = 1.6 \times 10^{-7} \text{ J}$$

بنابراین، با استفاده از معادله ۲۵

$$1.6 \times 10^{-7} \text{ J} = (1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}) \times (3.0 \times 10^8 \text{ m/s})^2 \times \left[\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right]$$

از حل این معادله معلوم می‌شود که

$$v/c = 0.999999956$$

یعنی v البته از c کوچکتر است ولی بسیار به آن نزدیک است؛ تنها 132 m/s با c اختلاف دارد.

در این صورت، جمله دوم بسط، بسیار کوچکتر از جمله اول است. جمله سوم از جمله اول است. جمله دوم هم کوچکتر است، و به همین ترتیب. اگر جملات به همین ترتیب کوچک و کوچکتر شوند، ممکن است برای محاسبه‌ای خاص کافی باشد که فقط چند جمله را نگه داریم و از بقیه صرف‌نظر کنیم.

در معادله ۲۵ برای انرژی جنبشی، عبارت داخل کروشه شامل جمله $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ است. این عامل را می‌شود طبق فرمول دو جمله‌ای؛ با $x = -v^2/c^2$ و $p = -1/2$ بسط داد. فرض می‌کنیم کافی است که مثلاً سه جمله بسط را نگه داریم

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-1/2} &\approx 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{v^2}{c^2}\right) \\ &+ \frac{\left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right)}{2} \left(-\frac{v^2}{c^2}\right)^2 \quad (26) \\ &= 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} \end{aligned}$$

حالا معادله ۲۶ را در معادله ۲۵ می‌گذاریم

$$\begin{aligned} K &\approx mc^2 \left[1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} + \frac{3}{8} \frac{v^4}{c^4} - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} mv^2 \left[1 + \frac{3}{4} \frac{v^2}{c^2} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

می‌توانید ببینید که خطای نسبی انرژی جنبشی، اگر از $\frac{1}{2} mv^2$ استفاده کنیم، در حدود $\frac{3}{4} (v^2/c^2)$ است. حتی اگر سرعت ذره به ۱٪ سرعت نور هم برسد، این خطا کمتر از ۱ قسمت در 10^4 است. سرعتهای معمولی آزمایشگاهی، به ندرت از 10^{-6} برابر سرعت نور بیشترند؛ بنابراین، خطای استفاده از $\frac{1}{2} mv^2$ به مراتب کمتر از دقت ما در اندازه‌گیری انرژی است، و $\frac{1}{2} mv^2$ تقریب بسیار خوبی است.

معادله ۲۵ همیشه درست است، چه در سرعتهای زیاد و چه در سرعتهای کم. پس چرا همیشه آنرا به کار نبریم و $\frac{1}{2} mv^2$ را به کلی کنار نگذاریم؟ اگر این کار را بکنیم در عمل با مشکل روبرو می‌شویم. معادله ۲۵ را به ازای $v = 300 \text{ m/s}$ امتحان کنید؛ این سرعت، با بیشتر معیارها سرعت معقولی است (تقریباً برابر با سرعت صوت در هوا)، اما در مقایسه با سرعت نور بسیار کوچک است ($v/c = 10^{-6}$ و $v^2/c^2 = 10^{-12}$). اگر عبارت داخل کروشه معادله ۲۵ را با ماشین حسابتان محاسبه کنید، احتمالاً صفر به دست خواهید آورد. علتش این است که ماشین حساب شما فقط ۸ یا ۹ رقم به کار می‌برد. عبارت $1 - 10^{-12}$ را "دقیقاً" برابر با ۱ برآورد خواهد کرد. در عمل، اگر v کمتر از ۱٪ سرعت نور باشد، عبارت $\frac{1}{2} mv^2$ را به کار می‌بریم که دقت کافی دارد و محاسبه آن هم ساده‌تر است؛ و معادله ۲۵ را برای سرعتهای زیادتر نگه می‌داریم.

پرسشها

۱۳. آیا در مورد جسمی که تحت اثر نیروی اصطکاک باشد هم قضیه کارانرژی درست است؟ توضیح دهید.
۱۴. کار نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی آن. آیا ممکن است که کار یکی از مؤلفه‌های نیرو بزرگتر از تغییر انرژی جنبشی باشد؟ اگر چنین است، مثال بیاورید.
۱۵. چرا یک اتومبیل سواری در سربالایی به راحتی می‌تواند از یک کامیون پر از بار جلو بزند؟ البته کامیون سنگین‌تر هست اما موتورس هم به همان نسبت قویتر است. (آیا واقعاً چنین است؟) چه ملاحظاتی در طراحی توان موتور کامیون و موتور اتومبیل سواری دخالت دارد؟
۱۶. آیا توان لازم برای بالا بردن یک جعبه و گذاشتن آن روی سکو، به سرعت انجام این کار بستگی دارد؟
۱۷. چند تا از کتابهای کتابخانه را، طی زمان Δt ، از یک قفسه به قفسه بالاتر می‌برید. آیا کاری که انجام می‌دهید (الف) به جرم کتابها، (ب) به وزن کتابها، (ج) به ارتفاع قفسه بالایی نسبت به زمین، (د) به زمان Δt و (ه) به این که کتابها را زیگزاگ بالا ببرید یا مستقیم، بستگی دارد؟
۱۸. رکورد جهانی پرش با نیزه در حدود 5.05m است. آیا می‌شود با استفاده از نیزه‌ای بلندتر، این رکورد را، مثلاً به 8m رساند؟ اگر نه چرا؟ یک قهرمان پرش اصولاً تا حدود چه ارتفاعی امکان دارد بالا ببرد؟
۱۹. امروزه از "بحران انرژی" زیاد صحبت می‌شود. به نظر شما صحبت از "بحران توان" درست‌تر نیست؟
۲۰. آیا کار حاصل از نیروی خالص وارد بر یک ذره به چارچوب مرجع (لخت) ناظر بستگی دارد؟ تغییر انرژی جنبشی چطور؟ اگر چنین است، چند مثال بزنید.
۲۱. مردی سوار بر قایق، برخلاف جهت جریان آب پارو می‌زند و نسبت به ساحل ساکن است. (الف) آیا این مرد کاری انجام می‌دهد؟ (ب) اگر پارو زدن را متوقف کند و همراه با جریان آب جلو برود، آیا کاری روی او انجام می‌شود؟
۲۲. قضیه کارانرژی را از دیدگاه چارچوب مرجع خلبان هواپیمای ۱ در مثال ۹ بررسی کنید. آیا قضیه در این حالت نقض می‌شود؟ توضیح دهید.
۲۳. می‌گوییم که الکترون 1keV ذره‌ای "کلاسیک" است، الکترون 1MeV ذره‌ای "نسبیتی" است، و الکترون 1GeV ذره‌ای "فوق نسبیتی" است. منظور از این اصطلاحات چیست؟

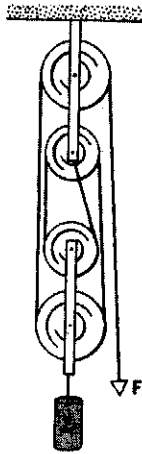
مسئله‌ها

بخش ۷-۱ کاری که نیروی ثابت انجام می‌دهد

۱. کارگری برای هل دادن صندوقی به جرم 52kg ، نیرویی برابر با 190N در جهت 22° زیر سطح افقی بر آن وارد می‌کند. صندوق
۱. نگاه کنید

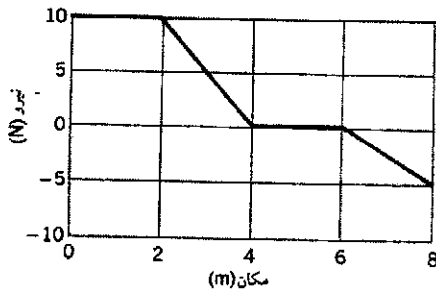
۱. آیا می‌توانید کلمات دیگری، مثل کار، نام ببرید که معنی آنها در زبان روزمره عموماً با معنی علمی‌شان متفاوت باشد؟
۲. توضیح دهید که چرا هنگامی که دیواری را فشار می‌دهید، و البته نمی‌توانید آن را حرکت دهید، بدن شما خسته می‌شود، مگر نه اینکه کاری روی دیوار انجام نمی‌شود؟
۳. سه نیروی ثابت بر ذره‌ای وارد می‌شوند و ذره از نقطه‌ای به نقطه‌ای دیگر می‌رود ثابت کنید که کار حاصل از برآیند این سه نیرو برابر است با مجموع کارهای حاصل از تک‌تک نیروها که جداگانه حساب شده باشد.
۴. سطح شیبدار (مثال ۱) یک "ماشین" ساده است که به کمک آن می‌توانیم با نیروی کوچکتر (از آنچه بدون استفاده از ماشین لازم است) کار انجام بدهیم. در مورد گوه، اهرم، پیچ، چرخ‌دنده، و ترکیباتی از قرقره‌ها (مسئله ۹) هم همین‌طور است. اما این ماشینها نه تنها کار را کم نمی‌کنند بلکه عملاً قدری هم زیاد می‌کنند. چرا؟ چرا این ماشینها را به کار می‌بریم؟
۵. در یک مسابقه طناب‌کشی، یک تیم به آهستگی و آمی‌دهد و به طرف تیم حریف کشیده می‌شود. چه کاری انجام می‌شود و توسط چه تیمی؟
۶. چرا یک کیلومتر دوچرخه‌سواری در یک مسیر افقی، خیلی آسانتر از دویدن در همین مسافت است؟ در هر مورد باید وزن خودتان را یک کیلومتر منتقل کنید، و در مورد اول باید دوچرخه را هم با خودتان ببرید و تازه طی زمان کوتاهتری هم این مسافت را طی کنید؟
۷. فرض کنید مدارگردش زمین به دور خورشید دقیقاً دایره باشد. در این صورت آیا خورشید روی زمین کاری انجام می‌دهد؟
۸. توپ بولینگ را به آرامی از زمین بلند می‌کنید و روی میز می‌گذارید. دو نیرو به توپ وارد می‌شود: وزن توپ، mg ، و نیروی رو به بالای شما، $-mg$. این دو نیرو یکدیگر را خنثی می‌کنند، چنانکه کار کاری انجام نمی‌شود. از طرف دیگر، می‌دانید که دست شما کار انجام می‌دهد. اشکال در کجاست؟
۹. فزری را نصف می‌کنیم. ثابت نیروی فز اولیه، k ، با ثابت نیروی هر یک از دو نیمه حاصل چه رابطه‌ای دارد؟
۱۰. فزهای A و B یکسان‌اند جز آنکه A سخت‌تر از B است؛ یعنی، $k_A > k_B$. اگر دو فز را (الف) به یک اندازه و (ب) با یک نیرو بکشیم، روی کدام یک کار بیشتری انجام می‌شود؟
۱۱. آیا انرژی جنبشی به جهت حرکت جسم مورد نظر بستگی دارد؟ آیا می‌تواند منفی باشد؟ آیا مقدار آن به چارچوب مرجع ناظر بستگی دارد؟
۱۲. کتابی را از زمین برمی‌دارید و روی میز می‌گذارید؛ در این حالت کار انجام می‌دهید، اما انرژی جنبشی کتاب تغییر نمی‌کند. آیا قضیه کارانرژی در این مورد نقض شده است؟ اگر جوابتان مثبت است چرا، و اگر نه باز هم چرا؟

اصطکاک در همه‌جای سیسم پچیر است، و ورس سو سررسوی را که بار به آنها وصل است 20°lb بگیرید. می‌خواهیم باری به وزن 84°lb را 12°ft بالا ببریم. (الف) حداقل نیروی F لازم برای این کار چقدر است؟ (ب) چقدر کار باید در برابر گرانش انجام داد تا بار تا این ارتفاع بالا برود؟ (ج) نقطه اثر نیروی اعمال شده را به چه مسافتی باید حرکت داد تا بار 12°ft بالا برود؟ (د) نیروی F چقدر کار باید انجام بدهد تا بار به اندازه مورد نظر بالا برود؟



شکل ۱۴. مسئله ۹

بخش ۷-۲ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد یک بعدی
 ۱۰. جسمی به جرم 5°kg روی خط راستی بر سطح افقی بدون اصطکاک حرکت می‌کند. طی حرکت نیرویی وابسته به مکان بر آن وارد می‌شود، که به صورت شکل ۱۵ است. این نیرو، طی تغییر مکان ذره از مبدأ تا $x = 8^\circ \text{m}$ چقدر کار انجام می‌دهد؟



شکل ۱۵. مسئله ۱۰

۱۱. جسمی به جرم 1°kg در راستای محور x حرکت می‌کند. تابع شتاب جسم بر حسب مکان، به صورت شکل ۱۶ است. کارخالص انجام شده روی ذره، طی حرکت آن از $x = 0$ تا $x = 8^\circ \text{m}$ چقدر

به اندازه 3.2m جابه‌جا می‌شود. (الف) دایره، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمودی وارد بر صندوق از سطح زمین، هر یک چقدر کار روی صندوق انجام می‌دهند؟

۲. جسمی به جرم 106kg با سرعت 51.3m/s روی خطی راست حرکت می‌کند. (الف) این جسم را با شتاب کندکننده 1.97m/s^2 متوقف می‌کنیم. چه نیرویی لازم است، جسم طی چه مسافتی متوقف می‌شود، و این نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) اگر شتاب کندکننده 4.82m/s^2 باشد، جواب این پرسشها چه می‌شود؟

۳. کارگری صندوقی به جرم 25kg را روی سطح شیب‌داری با زاویه شیب 27° به بالا هل می‌دهد؛ این کارگر نیرویی برابر با 120N ، موازی با سطح شیب‌دار، به صندوق وارد می‌کند. صندوق 3.6m جابه‌جا می‌شود. (الف) کارگر، (ب) نیروی گرانش، و (ج) نیروی عمود بر سطح شیب‌دار، هر یک چقدر کار انجام می‌دهند؟

۴. با استفاده از میدان الکتریکی می‌شود از فلزات الکترون خارج کرد. برای اینکه یک الکترون از تنگستن جدا کنیم، میدان الکتریکی باید 4.5eV کار انجام بدهد. فرض کنید که میدان الکتریکی در طی مسافت 3.4nm اثر می‌کند. حداقل نیرویی که میدان باید بر الکترون وارد کند تا الکترون از فلز کنده شود، چقدر است؟

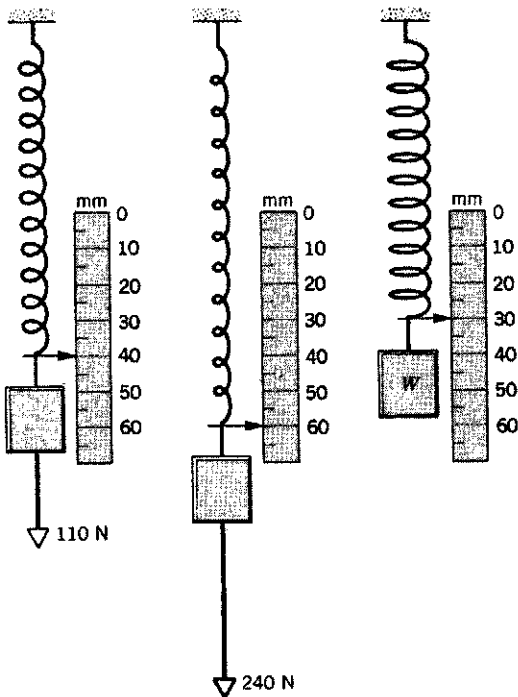
۵. با استفاده از یک طناب، جسمی به جرم M را با شتاب ثابت رو به پایین $g/4$ ، به اندازه مسافت d در امتداد قائم پایین می‌آوریم. (الف) طناب چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟ (ب) نیروی گرانش چقدر کار انجام می‌دهد؟

۶. کارگری جسمی به وزن 587lb ($m = 266 \text{kg}$) را روی سطح افقی تا مسافت 313ft (یعنی 95.4m) منتقل می‌کند. جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند و نیروی کارگر در جهت 32° زیر سطح افقی به جسم وارد می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی 0.21 است. کارگر چقدر کار روی جسم انجام می‌دهد؟

۷. الواری به جرم 523kg به اندازه 595m ، با سرعت ثابت، روی سطح شیب‌داری با زاویه 28° به طرف بالا هل می‌دهیم. برای این کار، یک نیروی ثابت افقی به الوار وارد می‌کنیم. ضریب اصطکاک جنبشی بین الوار و سطح شیب‌دار 0.19 است. (الف) کار نیروی اعمال شده و (ب) کار نیروی گرانشی را حساب کنید.

۸. قطعه یخی به جرم 472kg روی سطح شیب‌داری به طول 1.62m و ارتفاع 0.2m به طرف پایین می‌لغزد. کارگری به این قطعه یخ در راستای موازی سطح شیب‌دار طوری به طرف بالا نیرو وارد می‌کند که یخ با سرعت ثابت پایین بیاید. ضریب اصطکاک جنبشی میان یخ و سطح شیب‌دار 0.11 است. (الف) نیرویی را که کارگر وارد می‌کند و (ب) کاری را که کارگر روی قطعه یخ انجام می‌دهد، و (ج) کاری را که گرانش روی قطعه یخ انجام می‌دهد پیدا کنید.

۹. شکل ۱۴ آرایه‌ای از قرقره‌ها را نشان می‌دهد که به کمک آن کشیدن بار سنگین L به طرف بالا آسانتر می‌شود. فرض کنید

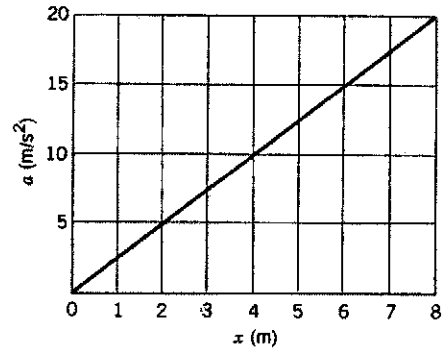


شکل ۱۸. مسئله ۱۵

بخش ۷-۳ کاری که نیروی متغیر انجام می‌دهد: مورد دوبعدی
 ۱۶. با انتگرال‌گیری در امتداد قوس، نشان بدهید که کارگرانش، در مثال ۴ برابر با $-mgh$ است.
 ۱۷. جسمی به جرم 675 kg روی میز بدون اصطکاک قرار دارد و به ریسمانی متصل است که از سوراخی در میز می‌گذرد؛ جسم با سرعت ثابت روی دایره‌ای افقی به مرکز این سوراخ حرکت می‌کند. (الف) اگر شعاع دایره 500 m و سرعت جسم 100 m/s باشد، کشش ریسمان چقدر است؟ (ب) مشاهده می‌شود که اگر 200 m دیگر از ریسمان را به درون سوراخ بکشیم، و در نتیجه شعاع دایره را به 300 m برسانیم، کشش ریسمان 463 برابر می‌شود. کل کاری که ریسمان، طی این کاهش شعاع، روی جسم گردان انجام می‌دهد چقدر است؟

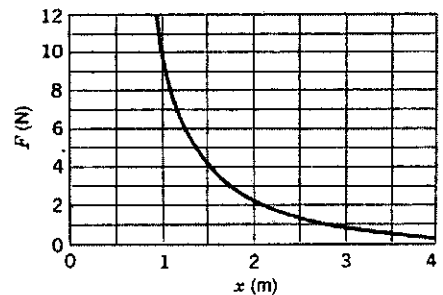
بخش ۷-۴ انرژی جنبشی و قضیه کار-انرژی

۱۸. انرژی جنبشی هر یک از این اجسام را در سرعت‌های مشخص شده حساب کنید. (الف) یک بازیکن فوتبال به جرم 110 kg و با سرعت 1 m/s ؛ (ب) گلوله‌ای به جرم 42 g و با سرعت 950 m/s ؛ ناو هواپیمابر نیمیتس به جرم 91400 تن و با سرعت 320 گره.
 ۱۹. یک الکترون رسانش در مس، در دمای نزدیک به صفر مطلق، 42 eV انرژی جنبشی دارد. سرعت آن چقدر است؟
 ۲۰. پروتونی در یک شتابدهنده خطی شتاب می‌گیرد، در هر مرحله دستگاه، سه‌هزار و سیصد و پنجاه و دو، حرکت حرکتش شتاب $10^{15} \text{ m/s}^2 \times 360$



شکل ۱۶. مسئله ۱۱

۱۲. ثابت نیروی فنری 150 N/cm است. (الف) چقدر کار لازم است تا فنر، از حالت آزاد، به اندازه 7.6 mm کشیده شود؟ (ب) چقدر کار لازم است تا فنر را، از این حالت، 7.6 mm دیگر بکشیم؟
 ۱۳. نیروی وارد بر جسمی، $F = F_0(x/x_0 - 1)$ است. کار انجام شده طی حرکت جسم از $x = 0$ تا $x = 3x_0$ را (الف) با رسم منحنی $F(x)$ و حساب کردن مساحت زیرمنحنی و (ب) با محاسبه تحلیلی انتگرال به دست بیاورید.
 ۱۴. (الف) کار انجام شده توسط نیروی شکل ۱۷ را، طی تغییر مکان ذره از $x = 1 \text{ m}$ تا $x = 3 \text{ m}$ ، تخمین بزنید. بازه‌ها را کوچکتر کنید و ببینید که تا چه حد می‌توانید به جواب دقیق 6 J نزدیک شوید. (ب) معادله تحلیلی این منحنی، $F = A/x^2$ است که در آن $A = 9 \text{ Nm}^2$. کار را با انتگرال‌گیری به دست بیاورید.



شکل ۱۷. مسئله ۱۴

۱۵. شکل ۱۸ فنری را نشان می‌دهد که یک شاخص به انتهای آن متصل است، مجاور فنر، خط‌کشی که برحسب میلی‌متر مدرج شده، آویزان است. مطابق شکل. سه وزنه متفاوت را به نوبت از فنر می‌آویزیم. (الف) اگر هیچ وزنه‌ای به فنر آویزان نباشد، شاخص چه عددی را نشان می‌دهد؟ (ب) وزن W چقدر است؟

۲۷. پدر و پسری در حال دویدن اند. جرم پسر نصف جرم پدر اما انرژی جنبشی اش دو برابر انرژی جنبشی پدر است. پدر به اندازه 1.0 m/s به سرعت خودش اضافه می کند و انرژی جنبشی اش با انرژی جنبشی پسر برابر می شود. سرعت پسر و سرعت اولیه پدر چقدر بوده است؟

۲۸. پرتابه ای به جرم 0.55 kg با انرژی جنبشی اولیه 155 J از لبه صخره ای پرتاب می شود؛ نقطه اوج پرتابه 14 m بالاتر از نقطه پرتاب است. (الف) مؤلفه افقی سرعت پرتابه چقدر است؟ (ب) مؤلفه عمودی سرعت پرتابه، درست پس از پرتاب، چقدر بوده است؟ (ج) در لحظه ای در حین پرواز، مؤلفه عمودی سرعت پرتابه 65 m/s می شود. در این لحظه، پرتابه چقدر بالاتر، یا پایین تر، از نقطه پرتاب است؟

۲۹. دنباله داری به جرم $8.38 \times 10^{11} \text{ kg}$ ، با سرعت نسبی 3.0 km/s به زمین برخورد می کند. (الف) انرژی جنبشی دنباله دار را برحسب "مگاتن TNT" حساب کنید؛ انفجار 1 میلیون تن TNT انرژی ای برابر با $4.2 \times 10^{15} \text{ J}$ آزاد می کند. (ب) قطر حفره ای که در اثر یک انفجار بزرگ ایجاد می شود، با توان یک سوم انرژی آزاد شده متناسب است، و قطر حفره حاصل از انفجار 1 مگاتن TNT برابر با 1 km است. قطر حفره حاصل از برخورد این دنباله دار چقدر است؟ (ممکن است که در گذشته، آثار جوی حاصل از برخورد دنباله دارها به زمین، موجب انقراض بسیاری از گونه های جانوران و گیاهان شده باشد؛ گمان می رود که داینوسورها هم در اثر پیامدهای چنین برخوردی منقرض شده باشند.)

۳۰. یک "بشقاب" پلاستیکی چرخان [فریزی] به جرم 125 g ، با سرعت 12.3 m/s ، از ارتفاع 1.6 m بالای سطح زمین پرتاب می شود. هنگامی که بشقاب به ارتفاع 2.32 m می رسد، سرعت آن 9.57 m/s می شود. (الف) گرانش چقدر کار روی بشقاب انجام داده است؟ (ب) چقدر انرژی جنبشی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ چرخش بشقاب را در نظر نگیرید.

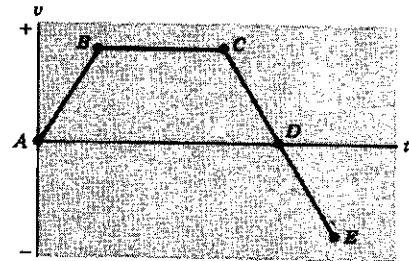
۳۱. توپی موقع واجهیدن از یک پیاده روی بتونی، 15% از انرژی جنبشی اش را از دست می دهد. این توپ را باید با چه سرعت اولیه ای در امتداد قائم از ارتفاع 12.4 m به طرف پایین پرتاب کرد تا، پس از واجهیدن، دوباره به همان ارتفاع برگردد؟ فرض کنید مقاومت هوا ناچیز است.

۳۲. یک توپ لاستیکی که از ارتفاع 6 ft رها شده است چندین بار به زمین می خورد و از آن وامی جهد؛ در هر برخورد، 10% انرژی توپ از دست می رود. چند برخورد باید انجام شود تا توپ دیگر نتواند به ارتفاع بالاتر از 3 ft برسد؟

۳۳. جسمی به جرم 263 g روی فنری قائم که ثابت آن $k = 252 \text{ N/cm}$ است می افتد (شکل ۲۰). جسم به فنر می چسبد و آن را 11.8 cm فشرده می کند تا خودش به حالت سکون لحظه ای برسد. در طی فشرده شدن فنر (الف) نیروی گرانش و (ب) فنر چقدر کار انجام می دهند؟ (ج) سرعت جسم، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر بوده است؟ (د) اگر سرعت اولیه جسم دو برابر شود، بیشترین مقدار فشردگی فنر چقدر می شود؟

می گیرد. اگر پروتون با سرعت اولیه $1.0 \times 10^7 \text{ m/s}$ به یکی از این مراحل، که طول آن 3.5 cm است وارد شود (الف) سرعت پروتون در پایان این مرحله و (ب) مقدار انرژی جنبشی ای که در اثر این شتاب به انرژی قبلی اش افزوده می شود. چقدر است؟ جرم پروتون $1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ است. انرژی را برحسب الکترون ولت بیان کنید.

۲۱. نیرویی بر ذره ای، که روی خط راست حرکت می کند، وارد می شود. نمودار سرعت-زمان ذره در شکل ۱۹ نشان داده شده است. علامت (مثبت یا منفی) کاری را که نیرو، در هر یک از بازه های AB ، BC ، CD و DE ، روی ذره انجام می دهد پیدا کنید.



شکل ۱۹. مسئله ۲۱

۲۲. برای سفر به ماه، یک موشک ساترن V به جرم $2.9 \times 10^6 \text{ kg}$ که حامل یک فضاییمای آپولو است، باید به سرعت گریز 11.2 km/s (یعنی 25000 mi/h) در نزدیکی سطح زمین برسد. سوخت موشک باید حاوی چقدر انرژی باشد؟ آیا عملاً سیستم به همین مقدار انرژی نیاز دارد یا کمتر یا بیشتر؟ چرا؟

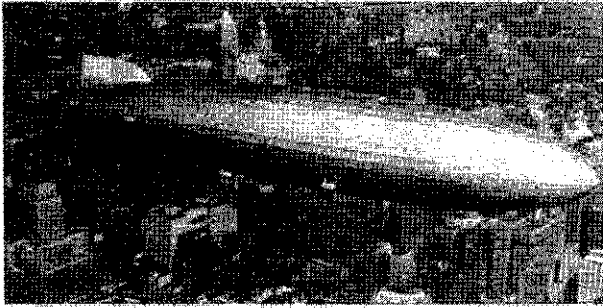
۲۳. اتومبیلی به وزن 2800 lb را در نظر بگیرید. این اتومبیل از چه ارتفاعی باید سقوط کند تا انرژی جنبشی آن برابر با همین انرژی در زمانی باشد که با سرعت 55 mi/h حرکت می کند؟ آیا جواب به وزن اتومبیل بستگی دارد؟

۲۴. اتومبیلی به جرم 1100 kg ، با سرعت 46 km/h در جاده ای افقی حرکت می کند. راننده طوری ترمز می کند که اتومبیل 51 kJ انرژی جنبشی از دست می دهد. (الف) سرعت اتومبیل در این حالت چقدر است؟ (ب) ترمز باید چقدر دیگر از انرژی جنبشی اتومبیل را بگیرد تا اتومبیل کاملاً متوقف شود؟

۲۵. بازیکنی توپ بیسبال را با سرعت 120 ft/s (یعنی 36.6 m/s) پرتاب می کند. درست پیش از آنکه بازیکن دیگری توپ را، در همان ارتفاع بگیرد، سرعت توپ به 110 ft/s (یعنی 33.5 m/s) کاهش یافته است. چقدر انرژی در اثر مقاومت هوا از دست رفته است؟ وزن توپ بیسبال 9 oz است ($m = 255 \text{ g}$).

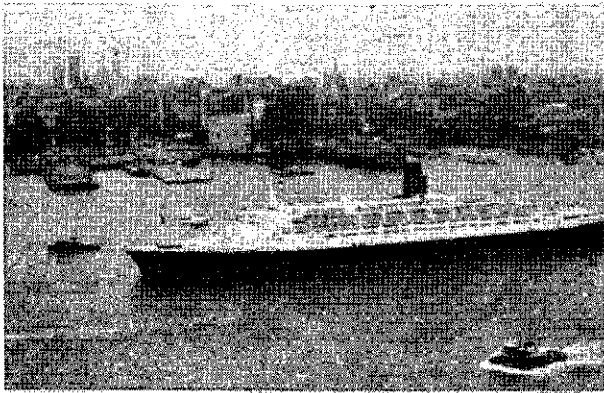
۲۶. زمین سالی یک بار به دور خورشید می گردد. چقدر کار باید بر زمین انجام داد تا نسبت به خورشید ساکن شود؟ برای به دست آوردن داده های عددی به پیوست ج رجوع کنید، و چرخش زمین به دور محور خودش را در نظر نگیرید.

در این سرعت چقدر است؟



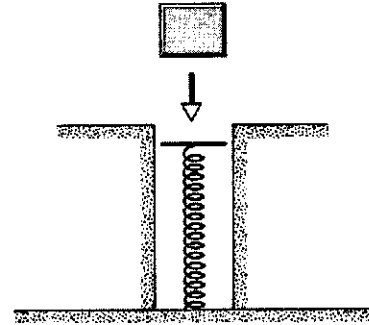
شکل ۲۱. مسئله ۴۱

۴۲. توان کشتی مجلل "ملکه الیزابت دوم" (شکل ۲۲) از یک نیروگاه الکتریکی دیزلی جدید تأمین می‌شود، که جایگزین ماشینهای بخار اولیه آن شده است. بیشینه توان خروجی ۹۲MW است که در این توان، کشتی با سرعت ۳۲٫۵ گره حرکت می‌کند. در این بیشترین سرعت کشتی، پروانه‌های کشتی چه نیرویی بر آب وارد می‌کنند؟



شکل ۲۲. مسئله ۴۲

۴۳. اتومبیلی به جرم 1600 kg ، با سرعت 26 m/s (یعنی 94 km/h) در جاده‌ای افقی حرکت می‌کند. اگر کل نیروهای مقاوم 720 N باشد، توان خروجی موتور چند اسب بخار است؟
 ۴۴. در هر دقیقه، 73800 m^3 آب از آبهاری به ارتفاع 96.3 m به پایین می‌ریزد. فرض کنید 58% انرژی جنبشی‌ای که آب در طی سقوط کسب می‌کند، به کمک یک مولد هیدروالکتریکی، به انرژی الکتریکی تبدیل شود. توان خروجی مولد را حساب کنید. (چگالی آب 1000 kg/m^3 است).
 ۴۵. فرض کنید میزان مصرف بنزین اتومبیل شما 30 mi/gal است. (الف) با 1 kWh انرژی، اتومبیل شما چه مسافتی را می‌پیماید؟ (ب) اگر سرعت اتومبیل 55 mi/h باشد، آهنگ مصرف انرژی چقدر است؟
 ۴۶. 140 MJ/l است.



شکل ۲۰. مسئله ۳۳

۳۴. با تعمیم اثبات حالت یک‌بعدی معادله ۱۹، نشان بدهید که این معادله در حالت‌های دو و سه‌بعدی هم درست است.

بخش ۵-۷ توان

۳۵. زنی به جرم 57 kg از پلکانی به ارتفاع 4.5 m در مدت 3.5 s بالا می‌رود. توان متوسطی که باید مصرف کند چقدر است؟
 ۳۶. یک دستگاه بالابر، 100 نفر اسکی‌باز به وزن متوسط 667 N را طی 55 s ، با سرعت ثابت تا ارتفاع 152 m بالا می‌برد. توان خروجی موتور بالابر، به فرض اینکه هیچ اتلاف ناشی از اصطکاک در کار نباشد، چقدر است؟
 ۳۷. شناگری با سرعت 2.2 m/s در آب شنا می‌کند. نیروی مقاومت آب، که با حرکت او مخالفت می‌کند، 110 N است. شناگر با چه توانی شنا می‌کند؟
 ۳۸. دونده‌ای به جرم 682 kg مسافت 7.4 m ابتدای مسابقه را در مدت 1.6 s می‌دود. دونده از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند و شتاب او در این مدت ثابت است. سرعت او در پایان 1.6 s چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی‌اش چقدر است؟ (ج) توان متوسط او، طی این 1.6 s ، چقدر است؟
 ۳۹. اسبی گاری‌ای را با نیروی 420 lb که با زاویه 27° بالای سطح افقی اعمال می‌شود می‌کشد و با سرعت 6.2 mi/h حرکت می‌کند. (الف) اسب در مدت 12 min چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) توان خروجی اسب را، برحسب hp حساب کنید.
 ۴۰. یک شرکت سازنده اتومبیل می‌گوید که حداکثر توانی که موتور اتومبیلی به جرم 1230 kg می‌تواند تحویل بدهد، 92.4 kW است. حداقل زمان لازم برای اینکه این اتومبیل از حالت سکون به سرعت 29.1 m/s (یعنی 65 mi/h) برسد چقدر است؟ در یک آزمون، این زمان برابر با 12.3 s اندازه‌گیری شده است. علت اختلاف بین این دو زمان چه می‌تواند باشد؟
 ۴۱. کشتی هوایی هیدنورگ، شکل ۲۱ بالونی بود محتوی گاز هیدروژن که می‌توانست با استفاده از 480 hp توان موتورهایش، با سرعت 77 گره حرکت کند. نیروی مقاومت هوا (برحسب

نشان بدهید که v از رابطه زیر به دست می آید

$$v = \left(\frac{3xP}{m} \right)^{1/2}$$

۵۳. (الف) نشان بدهید که توان خروجی هواپیمایی که با سرعت ثابت v به طور افقی پرواز می کند متناسب با v^3 است. نیروی اصطکاک آئرو دینامیکی را $D = bv^2$ بگیرید. (ب) توان موتورها را به چه نسبتی زیاد کنیم تا سرعت هواپیما نسبت به هوا ۲۵٪ زیاد شود؟

۵۴. یک ماشین تیزکن، چرخشی به شعاع 20.7 cm دارد و در هر ثانیه 2.53 دور می زند. ابزاری را که باید تیز شود با نیروی 180 N بر لبه چرخ می فشاریم. این ماشین چه توانی دارد؟ ضریب اصطکاک بین ابزار و چرخ 0.32 است.

۵۵. یک پله برقی، دو طبقه را که فاصله شان از هم 8.20 m است به هم مرتبط می کند. طول پله برقی 13.3 m و سرعت حرکت آن در راستای خودش 62.0 cm/s است. (الف) فرض کنید پله باید هر دقیقه 10° نر، به جرم متوسط 750 kg را جابه جا کند. در این صورت، موتور آن چقدر توان باید تحویل بدهد؟ (ب) مردی به جرم 83.5 kg از پله برقی متحرک بالا می رود و طی 9.5 s به طبقه بالا می رسد. موتور پله برقی چقدر کار روی او انجام می دهد؟ (ج) اگر همین مرد، وسط راه برگردد و به طرف پایین حرکت کند، چنانکه در ارتفاع ثابتی باقی بماند، آیا موتور روی او کار انجام می دهد؟ اگر می دهد، چقدر توان برای این کار مصرف می شود؟ (د) آیا راهی (دیگر) به نظرتان می رسد که مرد بتواند روی پله برقی راه برود، بی آنکه توانی از موتور را مصرف کند؟

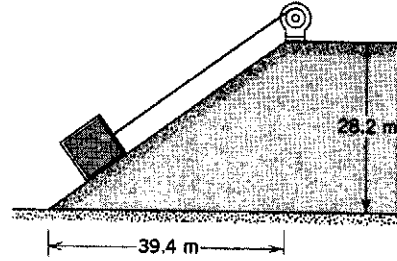
۵۶. یک لوکوموتیو 1.5 MW ، هنگامی که با توان کامل کار می کند، قطار را طی 6.0 min از سرعت 10 m/s به سرعت 25 m/s می رساند. (الف) با چشمپوشی از اصطکاک، جرم قطار را محاسبه کنید. (ب) سرعت قطار را در این بازه به صورت تابعی از زمان (برحسب ثانیه) به دست بیاورید. (ج) نیروی شتاب دهنده به قطار را به صورت تابعی از زمان، در این بازه، به دست بیاورید (د) مسافتی را که قطار در این مدت می پیماید حساب کنید.

۵۷. نیروی مقاوم در برابر حرکت اتومبیل ناشی از دو عامل است: اصطکاک جاده، که تقریباً مستقل از سرعت v است، و مقاومت آئرو دینامیک، که متناسب با v^2 است. برای اتومبیل خاصی به وزن 12000 N ، کل نیروی مقاوم F برابر است با $F = 300 + 18v^2$ ، که در آن F برحسب نیوتون و v برحسب متر بر ثانیه است. موتور چه توانی باید داشته باشد تا بتواند، در سرعت 80 km/h ، به اتومبیل 92 m/s^2 شتاب بدهد؟

۵۸. یک تنظیم کننده سرعت شامل دو گلوله، هر یک به جرم 200 g است که با میله های صلب و سبک به طول 10 cm به محور قائم چرخانی متصل اند (شکل ۲۴). میله ها به محور لولای شده اند، چنانکه با چرخش محور، گلوله ها هم با آن می چرخند و از محور فاصله می گیرند. 4 برسد، کره ها به دیواره استوانه ای که سیستم

۴۶. توان موتور تلمبه آبی 66 hp است. با این تلمبه از چه عمقی می توان آب را با آهنگ 220 gal/min بیرون کشید؟

۴۷. یک جرثقیل قطعه بزرگی از گرانیت به جرم 1380 kg را با سرعت ثابت 1.34 m/s ، از سطح شیب داری بالا می کشد (شکل ۲۳). ضریب اصطکاک جنبشی بین گرانیت و سطح شیب دار 0.41 است. توان جرثقیل چقدر است؟



شکل ۲۳. مسئله ۴۷

۴۸. اتومبیلی به وزن 3700 lb ($m = 1680 \text{ kg}$) از حالت سکون شروع به حرکت در جاده ای افقی می کند و طی 33 s ، به سرعت 45 mi/h (یعنی 72 km/h) می رسد. (الف) انرژی جنبشی اتومبیل در پایان این 33 s چقدر است؟ (ب) توان خالص متوسطی که اتومبیل طی این 33 s دریافت کرده است چقدر است؟ (ج) با فرض اینکه شتاب اتومبیل ثابت بوده باشد، توان لحظه ای آن در پایان این 33 s چقدر است؟

۴۹. جسمی به جرم m از حالت سکون به طور یکنواخت شتاب می گیرد و طی زمان t_f به سرعت v_f می رسد. (الف) نشان بدهید که کار انجام شده روی جسم، به صورت تابعی از زمان، برحسب v_f و t_f برابر است با

$$W = \frac{1}{2} m \frac{v_f^2}{t_f} t_f^2$$

(ب) توان مصرفی جسم را به صورت تابعی از زمان پیدا کنید.

۵۰. نیرویی بر ذره ای به جرم 280 kg اثر می کند؛ مکان ذره، برحسب زمان، $x = t^3 - 4t^2 + 3t$ است، که در آن x برحسب متر و t برحسب ثانیه است. (الف) کار این نیرو، طی 4 s اول چقدر است؟ (ب) این نیرو در لحظه $t = 3 \text{ s}$ با چه آهنگی روی ذره کار انجام می دهد؟

۵۱. جرم یک آسانسور باری، وقتی کاملاً بار شده باشد، 1220 kg است. این آسانسور باید طی 43 s ، به اندازه 54.5 m به طرف پایین برود. جرم وزنه مقابله 1380 kg است. توان خروجی موتور آسانسور، برحسب hp ، چقدر است؟ از کار لازم برای راه انداختن و متوقف کردن آسانسور صرف نظر کنید، یعنی فرض کنید سرعت آسانسور ثابت است.

۵۲. اتومبیلی به جرم m ، که توان موتور آن مقدار ثابت P است، می تواند پس از پیمودن مسافت x از حالت

از دید هر دو ناظر، کاری که نیرو انجام می‌دهد برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره، اما یکی از ناظرها این کمیت را $\frac{1}{2}ma^2t^2$ می‌سنجد و دیگری $\frac{1}{2}ma^2t^2 + maut$. در اینجا m جرم، و a شتاب ذره است، که از دید هر دو ناظر یکی است. (ب) اختلاف کار انجام شده توسط نیروی یکسان از دید دو ناظر را، برحسب اختلاف مسافت اثر این نیرو از دید این دو ناظر توضیح بدهید. اختلاف انرژی جنبشی پایانی ذره از دید دو ناظر را برحسب کاری که ذره می‌تواند انجام بدهد تا، نسبت به چارچوب هر ناظر، به حالت سکون برسد توضیح بدهید.

بخش ۷-۷ انرژی جنبشی در سرعتهای زیاد

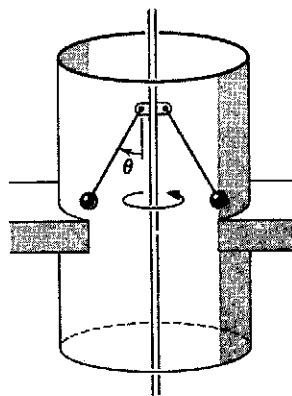
۶۰. انرژی جنبشی پروتونی را حساب کنید که سرعت آن $2.94 \times 10^8 \text{ m/s}$ است. جواب خود را هم برحسب ژول و هم برحسب MeV بیان کنید.

۶۱. الکترونی با چنان سرعتی حرکت می‌کند که با آن می‌شود کمربند استوای زمین را طی 10^8 s دور زد. (الف) سرعت این الکترون را، برحسب سرعت نور، بیان کنید. (ب) انرژی جنبشی آن را برحسب الکترون‌ولت حساب کنید. (ج) اگر از فرمول کلاسیک برای محاسبه انرژی جنبشی استفاده کنیم، چند درصد خطا خواهیم داشت؟

۶۲. سرعت الکترونی $0.999c$ است. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ (ب) اگر سرعت آن $0.5c$ زیاد شود، انرژی جنبشی آن چند درصد زیاد می‌شود؟

۶۳. قضیه کار-انرژی در هر سرعتی درست است. چقدر کار باید انجام داد تا سرعت الکترونی از صفر به (الف) $0.5c$ ، (ب) $0.99c$ ، و (ج) $0.999c$ برسد؟

درون آن می‌چرخد می‌رسند (الف) حداقل آهنگ دوران، برحسب دور بر دقیقه، برای اینکه گلوله‌ها به دیواره برسند چقدر است؟ (ب) اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره‌ها و دیواره 0.35 باشد، هنگامی که سیستم با سرعت 300 rev/min می‌چرخد، چقدر توان در اثر مالش گلوله‌ها بر دیواره اتلاف می‌شود؟



شکل ۲۴. مسئله ۵۸

بخش ۶-۷ چارچوبهای مرجع

۵۹. دو ناظر را در نظر بگیرید که چارچوب یکی به زمین متصل است و چارچوب دیگری، مثلاً به قطاری که با سرعت ثابت u نسبت به زمین حرکت می‌کند. هر دو ناظر مشاهده می‌کنند که ذره‌ای، که در ابتدا نسبت به قطار ساکن است، با نیروی ثابتی که در مدت زمان t بر آن وارد می‌شود، به طرف جلو شتاب می‌گیرد. (الف) نشان بدهید که



پایستگی انرژی

در فصل ۷ قضیه کار-انرژی را بررسی کردیم؛ طبق این قضیه، کار نیروهای وارد بر ذره برابر است با تغییر انرژی جنبشی ذره. در این فصل خواهیم دید که کار رده خاصی از نیروها بر یک سیستم (که می‌تواند پیچیده‌تر از یک ذره ساده باشد) تنها به حالت اولیه و نهایی سیستم بستگی دارد، نه به مسیر میان حالت اولیه و نهایی. چنین نیروهایی، که نیروهای پایستار نامیده می‌شوند، این خاصیت را دارند که می‌توانند در پیکربندی سیستم انرژی ذخیره کنند. انرژی ذخیره شده را انرژی پتانسیل می‌نامند. نیروهای دیگر، یعنی نیروهای ناپایستار، نمی‌توانند به این طریق انرژی ذخیره کنند.

موضوع اصلی این فصل پایستگی انرژی است، که یکی از اصول مهم راهنما در فیزیک است. نشان می‌دهیم که در ذخیره‌سازی، تبدیل، یا انتقال انرژی سیستمهای مکانیکی، کل انرژی ثابت می‌ماند. مطالعه را از سیستمهای مکانیکی بی‌اصطکاک ساده، که در آنها فقط انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نقش دارند، شروع می‌کنیم. بعد سیستمهای شامل اصطکاک و دیگر نیروهای اتلافی را هم وارد می‌کنیم. با تعمیم بیشتر، می‌شود شکلهای دیگر انرژی مثل گرما و انرژی الکترومغناطیسی را هم وارد همین چارچوب کرد و به اصل پایستگی انرژی رسید، که یکی از فراگیرترین و کلی‌ترین قوانین فیزیک است.

۸-۱ نیروهای پایستار

برای نشان دادن رفتار سیستمهای پایستار، حرکت جسمی را، تحت تأثیر سه نیروی مجزا، بررسی می‌کنیم: نیروی فنر، $F = -kx$ ؛ نیروی گرانشی، $F = mg$ ؛ و نیروی اصطکاک، $F = \mu N$.

۱. نیروی فنر. شکل ۱ جسمی به جرم m را نشان می‌دهد که به فنری با ثابت نیروی k متصل است؛ جسم، بدون اصطکاک، روی سطحی افقی می‌لغزد. در ابتدا، شکل ۱ الف، عاملی خارجی فنر را فشرده است، چنانکه جسم از نقطه $x = 0$ در حالت فنر آزاد، به نقطه $x = +d$ جابه‌جا شده است. عامل خارجی در $t = 0$ یکباره برداشته می‌شود و از آن پس فنر بر جسم کار انجام می‌دهد. با حرکت جسم از $x = +d$ به $x = 0$ ، فنر، طبق معادله ۹ فصل ۷، به اندازه $\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد. طبق قضیه کار-انرژی، این کار به شکل انرژی جنبشی جسم ظاهر می‌شود.

با گذشتن جسم از نقطه $x = 0$ ، شکل ۱ ب، علامت نیروی فنر عوض می‌شود؛ از این پس فنر سرعت جسم را کم می‌کند، و بر آن کار منفی انجام می‌دهد. هنگامی که جسم به سکون لحظه‌ای می‌رسد، شکل ۱ ج، مقدار کار منفی‌ای که نیروی فنر بین $x = 0$ و $x = -d$ انجام داده برابر با $-\frac{1}{2}kd^2$ است. به همین

تا $x = 0$ نیروی فنر $\frac{1}{2}kd^2$ کار انجام می‌دهد، و از $x = 0$ تا $x = +d$ به اندازه $-\frac{1}{2}kd^2$. در این لحظه جسم در وضعیت اولیه است (شکلهای ۱ الف و ۱ هـ را با هم مقایسه کنید)، و اگر کارهای انجام شده در چهار بخش جداگانه را با هم جمع کنیم، می‌بینیم که کل کاری که فنر، در یک چرخه کامل روی جسم انجام می‌دهد صفر است.

۲. نیروی گرانش. شکل ۲ سیستمی متشکل از یک توپ را نشان می‌دهد که تحت اثر گرانش زمین قرار دارد. جسم توسط عاملی خارجی به بالا پرتاب می‌شود. این عامل به آن سرعت v_0 و در نتیجه انرژی جنبشی $\frac{1}{2}mv_0^2$ می‌دهد. با بالا رفتن توپ، زمین روی آن کار انجام می‌دهد و سرانجام توپ را، در $y = h$ ، به حالت سکون لحظه‌ای در می‌آورد. کار زمین بر این توپ، هنگام صعود از $y = 0$ تا $y = h$ برابر با $-mgh$ است (نیروی ثابت mg ضربدر مسافت h علامت منفی به خاطر آن است که هنگام صعود توپ، نیرو و جابه‌جایی در خلاف جهت یکدیگرند). قضیه کار-انرژی، تغییر انرژی جنبشی، $-\frac{1}{2}mv_0^2$ ، را به کار خالص تنها نیروی موجود (گرانش)، $-mgh$ ، مربوط می‌کند. با سقوط توپ از $y = h$ به $y = 0$ ، نیروی گرانش به اندازه $+mgh$ کار انجام می‌دهد. مشابه با بخش بالا رونده مسیر، انرژی باید

۳. نیروی اصطکاک. به عنوان سومین مثال، قرصی به جرم m را در نظر بگیرید که به سر ریسمانی به طول R متصل است. به قرص سرعت اولیه v_0 داده می‌شود، و ریسمان قرص را مقید می‌کند که بر دایره‌ای به شعاع R روی سطحی افقی حرکت کند (شکل ۳). این سطح بر قرص نیروی اصطکاک وارد می‌کند. تنها نیرویی که روی قرص کار انجام می‌دهد همین نیروی اصطکاک است، که از سطح وارد می‌شود. این نیرو همواره در خلاف جهت سرعت قرص است؛ بنابراین، کار نیروی اصطکاک روی قرص همواره منفی است. هنگامی که قرص به نقطه شروع حرکتش برمی‌گردد، کار نیروی اصطکاک در این مسیر بسته مطلقاً غیر صفر است؛ کل کار در این مسیر بسته، یک مقدار منفی است. در پایان مسیر بسته، قرص با انرژی جنبشی کمتری به نقطه شروع برمی‌گردد.

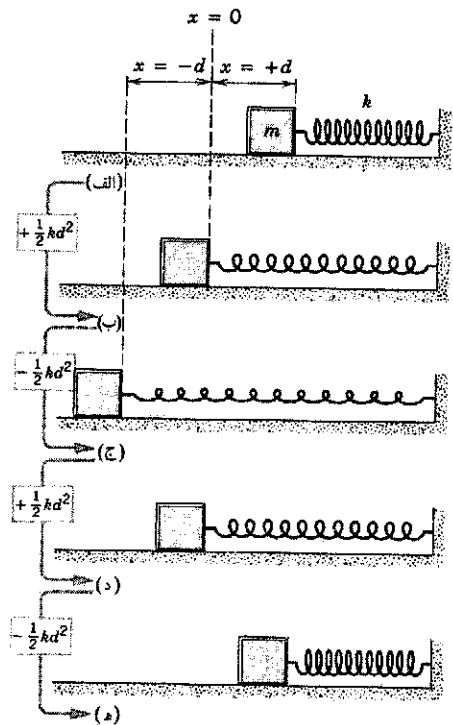
به تفاوت میان این سه مثال توجه کنید. در دو مثال اول (نیروی فنر و نیروی گرانش) هنگامی که جسم، پس از یک رفت و برگشت به نقطه شروع بازمی‌گردد، کل کار انجام شده بر آن صفر است (و بنابراین انرژی جنبشی آن تغییر نمی‌کند). در مثال سوم، کل کار نیروی اصطکاک در مسیر بسته مخالف صفر است، و انرژی جنبشی کم می‌شود. این تفاوت اساسی در رفتار این دو نوع نیرو، اولین راه برای تشخیص نیروهای پایدار را به ما نشان می‌دهد:

اگر نیرویی که جسمی را حرکت می‌دهد در یک مسیر بسته (رفت و برگشت) هیچ کار خالصی روی جسم انجام ندهد، آن نیرو پایدار است؛ در غیر این صورت ناپایدار است.

نیروی بازگرداننده کشسان (نیروی فنر) و نیروی گرانش، دو نمونه از نیروهای پایدارند، و اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایدار است.^۱

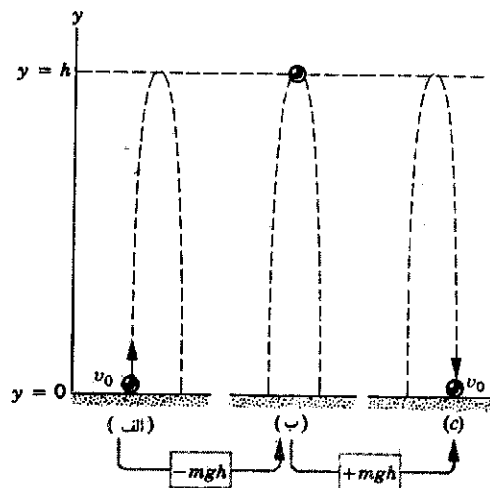
راه دیگر تشخیص نیروهای پایدار از نیروهای ناپایدار، بررسی کاری است که نیرو در مسیرهای مختلف، با نقاط شروع و پایان یکسان، روی ذره انجام می‌دهد. مثلاً کار نیروی فنر بر جسم شکل ۱ را، هنگامی که جسم از $x = +d$ به $x = -d/2$ می‌رود، در راستای دو مسیر (شکل ۴)، به دست می‌آوریم: مسیر ۱ به طور مستقیم، مسیر ۲ از $x = +d$ تا $x = -d$ ، و سپس از $x = -d$ تا $x = -d/2$. کار فنر در راستای مسیرهای ۱ و ۲ را، به ترتیب، W_1 و W_2 می‌نامیم.

۱. هنگامی که جسمی تحت اثر نیروی اصطکاک حرکت می‌کند، دائماً جوشهای میکروسکوپی تشکیل و شکسته می‌شوند (بخش ۶-۲). وقتی جسم مسیری را که آمده است برمی‌گردد، تغییرات سطح معکوس نمی‌شود؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپی مسلماً ناپایدار است. اما نیروهای بین اتمی سطح، که عامل اصطکاک اند، نیروهای الکترواستاتیکی‌اند، که پایدار هستند (فصل ۳۰). اگر هنگام بازگشت، همه اتمهای جابه‌جا شده را به جای اولشان برمی‌گردانیم، درمی‌یابیم که نیروی اصطکاک از دیدگاه ماکروسکوپی هم پایدار است. چنین فرایندی فوق‌العاده نامحتمل است (در واقع، در برگشت، جوشهای جدیدی تشکیل می‌شود و تعداد دیگری از اتمها هم جابه‌جا می‌شوند)؛ بنابراین، نیروی اصطکاک از لحاظ ماکروسکوپی ناپایدار است.

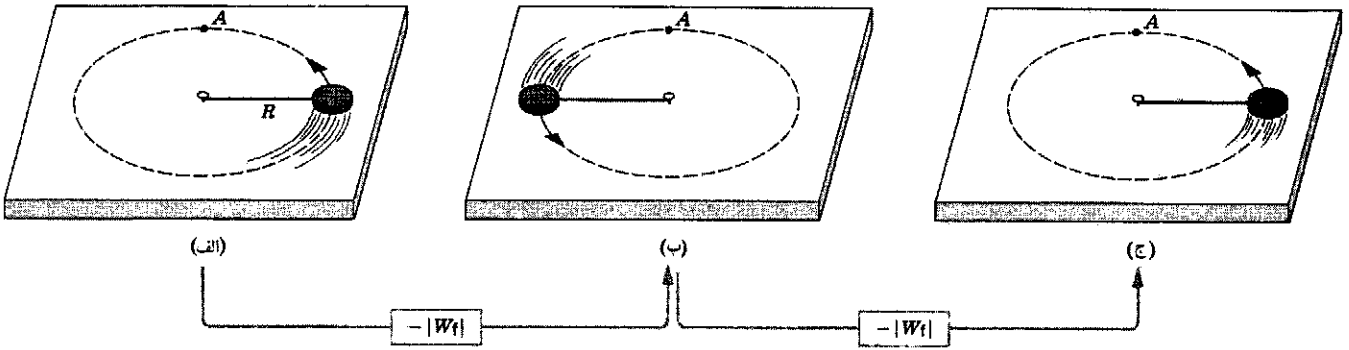


شکل ۱. جسمی در اثر نیروی فنر به طرف چپ حرکت می‌کند و از (الف) $x = +d$ به (ب) $x = 0$ ، و سپس (ج) $x = -d$ می‌رود. بعد به طرف راست حرکت می‌کند و به (د) $x = 0$ ، و سپس (ه) $x = +d$ می‌رود. کار نیروی فنر بین هر دو موقعیت متوالی، در طرف چپ نشان داده شده است. توجه کنید که کل کار نیروی فنر، در یک رفت و برگشت صفر است.

از $\frac{1}{2}mv_0^2$ افزایش پیدا کند و به $\frac{1}{2}mv_0^2$ برسد. کل کار نیروی گرانش، در این رفت و برگشت، صفر است.



شکل ۲. تویی در خلاف جهت گرانش زمین، به بالا پرتاب می‌شود. در (الف) توپ در لحظه پرتاب است؛ در (ب) به نقطه اوج مسیرش رسیده است؛ و در (ج) به ارتفاع اولیه بازگشته است. کار نیروی گرانشی زمین، بین هر دو موقعیت متوالی، در پایین شکل مشخص شده است. توجه کنید که کل کار نیروی گرانش روی توپ، در یک رفت و برگشت صفر است.



شکل ۳. قرصی روی دایره‌ای در سطح افقی حرکت می‌کند، و سطح اصطکاک دارد. موقعیتهای نشان داده شده در شکل: (الف) یک نقطه شروع دلخواه، (ب) نیم دور بعد، و (ج) نیم دور دیگر. کار نیروی اصطکاک بین هر دو موقعیت متوالی در پایین شکل مشخص است. توجه کنید که کل کار نیروی اصطکاک روی قرص در یک دور کامل صفر نیست، بلکه برابر با مقدار منفی $-2|W_f|$ است.

اگر کار نیرویی بر جسمی، از نقطه شروع حرکت تا نقطه پایان، مستقل از مسیر طی شده بین دو نقطه باشد، آن نیرو پایستار است؛ در غیر این صورت، نیرو ناپایستار است.

به کمک شکل ۵ می‌شود نشان داد که دو شرط پایستار بودن نیرو با یکدیگر هم‌ارزند. در شکل ۵ الف، ذره یک مسیر بسته را می‌پیماید؛ از a به b می‌رود و برمی‌گردد. اگر فقط نیروی پایستار F بر ذره اثر کند، کل کار انجام شده بر ذره طی این چرخه باید صفر باشد. یعنی

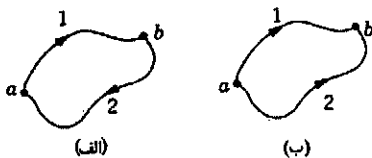
$$W_{ab,1} + W_{ba,2} = 0$$

یا

$$\int_{\text{مسیر ۱}}^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{\text{مسیر ۲}}^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1)$$

که در آن، $W_{ab,1}$ "کار نیروی طی حرکت ذره از a به b در امتداد مسیر ۱" و $W_{ba,2}$ "کار نیروی طی حرکت ذره از b به a در امتداد مسیر ۲" است. معادله ۱ بیان راضی اولین شرط پایستاری نیروست. با تغییر جهت حرکت ذره در هر مسیر، جای حدود بالا و پایین انتگرال‌گیری (برای تعیین کار) عوض می‌شود، و جابه‌جایی تغییر علامت می‌دهد؛ بنابراین، کار انجام شده بر ذره از a تا b ، با کاری که از b تا a انجام می‌شود رابطه‌ای دارد به صورت

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_b^a \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{برای هر مسیری})$$

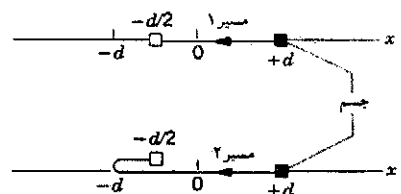


شکل ۵. (الف) ذره‌ای، تحت اثر یک نیروی پایستار، مسیر بسته‌ای را می‌پیماید؛ از نقطه a شروع می‌کند، به نقطه b می‌رود، و دوباره به نقطه a برمی‌گردد. مسیر مختلف، از نقطه a به نقطه b می‌رود.

$$W_1 = \int_{+d}^{-d/2} (-kx) dx = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{+d}^{-d/2} \\ = -\frac{1}{2} k [(-d/2)^2 - d^2] = \frac{3}{8} kd^2$$

$$W_2 = \int_{+d}^{-d} (-kx) dx + \int_{-d}^{-d/2} (-kx) dx \\ = -\frac{1}{2} kx^2 \Big|_{+d}^{-d} - \frac{1}{2} kx^2 \Big|_{-d}^{-d/2} \\ = 0 - \frac{1}{2} k [(-d/2)^2 - (-d)^2] = \frac{3}{8} kd^2$$

بنابراین، $W_1 = W_2$ ، و کار انجام شده در دو مسیر یکسان است. اما حالا رفتار نیروی اصطکاک ناپایستار سیستم شکل ۳ را در نظر بگیرید. فرض کنید که سیستم از نقطه A شروع به حرکت کند، یک‌بار یک چهارم دور بزند، و یک‌بار $5/4$ دور (و هر دو بار دقیقاً به یک نقطه برسد). اندازه کار (منفی) نیروی اصطکاک، در مسیر دوم پنج برابر مسیر اول است. بنابراین، در مورد نیروی اصطکاک، کار به مسیر بین نقطه شروع و نقطه پایان بستگی دارد. بدین ترتیب، به دومین روش تشخیص نیروهای پایستار می‌رسیم:



شکل ۴. جسمی که در سیستم شکل ۱ داشتیم (و اینجا با مربع مشخص شده است)، از طریق دو مسیر متفاوت، از $x = +d$

یا، در مورد مسبر ۲، به صورت

$$W_{ab,2} = -W_{ba,2} \quad (2)$$

از مقایسه معادلات ۱ و ۲ نتیجه می شود که

$$W_{ab,1} = W_{ab,2}$$

یا

$$\int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \quad (3)$$

و این بیان ریاضی دومین تعریف نیروی پایستار است: کار نیرو برای همه مسیرهای بین a و b یکسان است. بنابراین، تعریف اول مستقیماً به تعریف دوم منجر می شود و (با استدلالی مشابه) تعریف دوم هم به تعریف اول می انجامد؛ یعنی این دو تعریف با یکدیگر هم ارزند.

۸-۲ انرژی پتانسیل

با معرفی یک مفهوم جدید، انرژی پتانسیل، درک تازه ای از تحلیل سیستمهای شامل نیروهای پایستار حاصل می شود. چنان که خواهیم دید، انرژی پتانسیل را تنها برای نیروهای پایستار، مثلاً نیروی فنر با نیروی گرانش، می توان تعریف کرد؛ انرژی پتانسیل برای نیروهای ناپایستار، مثل نیروی اصطکاک، وجود ندارد.

انرژی پتانسیل که آن را با U نشان می دهیم، انرژی پیکربندی سیستم است. این انرژی، انرژی ذخیره شده در سیستم به خاطر وضعیت یا جهت گیری خاص اجزای سیستم است (مثلاً انرژی ناشی از فشردن سیستم جسم-فنر یا جداکردن اجزای سیستم توپ-زمین از هم). سیستمی را در نظر بگیرید که در آن فقط یک نیرو وجود دارد، و فرض کنید آن نیرو پایستار باشد. هنگامی که پیکربندی سیستم عوض می شود، مثلاً با حرکت اجزای آن، نیروی پایستار کار W انجام می دهد. تغییر انرژی پتانسیل، ΔU ، متناظر با این تغییر پیکربندی را

$$\Delta U = -W \quad (4)$$

تعریف می کنیم: تغییر انرژی پتانسیل در این فرایند برابر است با منفی کاری که نیروی پایستار انجام می دهد.

هنگامی که پیکربندی سیستم جسم-فنر در شکل ۱، از شکل ۱د (که در آن فنر در حالت آزاد است) به شکل ۱ه (که در آن جسم در حالت سکون لحظه ای است) تبدیل می شود، نیروی فنر به اندازه $W = -\frac{1}{2}kd^2$ روی جسم کار انجام می دهد. بنابراین، تغییر انرژی پتانسیل سیستم $\Delta U = -W = +\frac{1}{2}kd^2$ است. اما از قضیه کار-انرژی می دانیم که تغییر انرژی جنبشی جسم $\Delta K = W = -\frac{1}{2}kd^2$ است.

پس برای سیستم جسم-فنر نتیجه می شود که

$$\Delta U + \Delta K = 0 \quad (5)$$

معادله ۵ را برای سیستم جسم-فنر به دست آوردیم؛ اما این معادله، در واقع، نتیجه ای کلی است که مستقیماً از معادله ۴ و قضیه کار-انرژی، $W = \Delta K$ ، به دست می آید. این نتیجه می گوید که در سیستمی که همه نیروهای آن پایستار باشند، هر تغییری در انرژی پتانسیل باید با تغییر مخالفی در انرژی جنبشی خنثی شود.

مثلاً، فرض کنید جسم را از $d = +d$ ، که فنر فشرده شده است، رها می کنیم (شکل ۱الف) فنر جسم را می راند و به آن شتاب می دهد. جابه جایی از حالت تعادل کم می شود. فنر روی جسم کار مثبت انجام می دهد و بنابراین، طبق معادله ۴، تغییر انرژی پتانسیل منفی می شود. با کاهش انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی زیاد می شود.

معادله ۵ را این طور هم می توان نوشت

$$\Delta(U + K) = 0 \quad (6)$$

تغییر $U + K$ ، در مجموع، طی این فرایندها صفر است. اگر تغییر حاصل جمع $U + K$ صفر باشد، مقدار این حاصل جمع باید طی حرکت ثابت بماند. این ثابت را انرژی مکانیکی سیستم پایستار می نامیم و آن را با E نشان می دهیم

$$U + K = E \quad (7)$$

معادله ۷ نمایش ریاضی قانون پایستگی انرژی مکانیکی است. در هر سیستم بسته ای که اجزای آن تنها از طریق نیروهای پایستار برهم کنش داشته باشند (مثل سیستم جسم-فنر) انرژی می تواند از شکل جنبشی به پتانسیل و برعکس تبدیل شود، اما تغییر کل انرژی صفر است: حاصل جمع انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل ثابت می ماند. شکل ۶ نمایشی از تقسیم انرژی بین انرژیهای جنبشی و پتانسیل را برای سیستم جسم و فنر، طی نوسان آزاد آن، نشان می دهد.

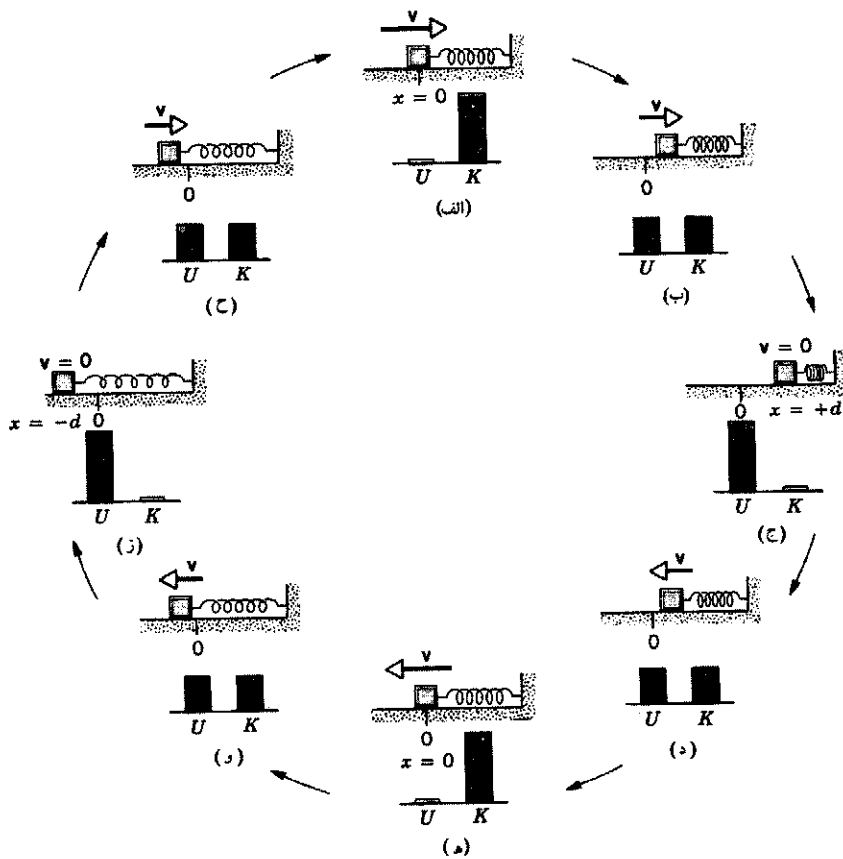
فرض کنید که بیش از یک نیروی پایستار بر جسمی اثر کند. مثلاً در شکل ۷، جسم تحت تأثیر دو نیرو، \mathbf{F}_1 و \mathbf{F}_2 ، قرار دارد، که هر یک از آنها روی جسم کار انجام می دهد. قضیه کار-انرژی، که در استنتاج معادله ۵ به کار رفت، همیشه مربوط به کل کاری است که همه نیروهای وارد بر جسم، در این مورد $W_{\text{نتیجه}} = W_1 + W_2$ ، انجام می دهند. با استفاده از معادله ۴ ($\Delta U = -W$)، به کار هر نیرو می توانیم یک انرژی پتانسیل وابسته کنیم. بنابراین، معادله ۵ به این شکل در می آید

$$\Delta U_{\text{نتیجه}} + \Delta U_{\text{گراش}} + \Delta K = 0$$

و معادله ۷ به این شکل

$$U_{\text{نتیجه}} + U_{\text{گراش}} + K = E \quad (8)$$

انرژی پتانسیل، خاصیتی مربوط به کل سیستم است نه مربوط به بخش خاصی از سیستم. مثلاً این توپ شکل ۲ نیست که انرژی پتانسیل دارد، بلکه سیستم متشکل از زمین+توپ است که چنین



شکل ۶. جسمی که به فنری متصل است. روی سطح افقی بدون اصطکاک می‌نوسان می‌کند. انرژی مکانیکی E سیستم ثابت می‌ماند. اما، طی حرکت سیستم، نحوه تقسیم آن بین انرژی جنبشی و پتانسیل تغییر می‌کند. در زمانهای معینی (الف، ه) تمام انرژی به شکل جنبشی است؛ در زمانهای دیگری (ج، ز) تمام انرژی به شکل پتانسیل است؛ و در زمانهایی دیگر (ب، د، و، ح) انرژی به تساوی میان این دو تقسیم شده است.

با هم برابر باشد، هر دو ذره می‌توانند، در اثر تغییر انرژی پتانسیل، مقدار قابل ملاحظه‌ای انرژی جنبشی به دست بیاورند. روش محاسبه چگونگی تقسیم انرژی جنبشی بین دو جسم را در فصل ۹ بررسی خواهیم کرد.

۳-۸ سیستمهای پایستار یک‌بعدی

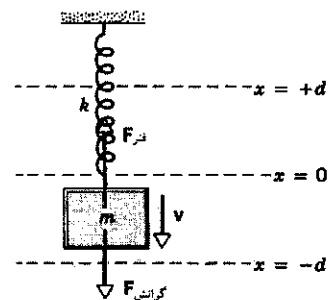
با استفاده از معادله ۴، می‌توانیم تغییر انرژی پتانسیل ذره‌ای را که حرکت آن یک‌بعدی است و فقط یک نیروی پایستار $F(x)$ بر آن وارد می‌شود به دست بیاوریم

$$\Delta U = -W = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (9)$$

ذره از مختصه اولیه x_0 به مختصه نهایی x می‌رود. چون انرژی پتانسیل فقط به مکان بستگی دارد، تغییر انرژی پتانسیل بین x_0 و x برابر با $\Delta U = U(x) - U(x_0)$ است. نتیجه می‌شود که

$$U(x) - U(x_0) = - \int_{x_0}^x F(x) dx \quad (10)$$

اگر x_0 را یک نقطه مرجع دلخواه بگیریم، می‌توانیم تابع انرژی پتانسیل را پیدا کنیم. انرژی پتانسیل نقطه مرجع را هر مقداری می‌شود گرفت، چون فقط تغییرات انرژی پتانسیل است که معنی دارد. با انتخاب $U(x_0) = 0$ می‌توانیم با استفاده



شکل ۷. جسمی به جرم m ، که از فنری آویزان است، در راستای قائم بین $x = -d$ و $x = +d$ نوسان می‌کند. جسم تحت تأثیر دو نیروی پایستار حرکت می‌کند، نیروی فنر $F_{\text{فنر}}$ و نیروی گرانش زمین $F_{\text{گرانش}}$.

خاصیتی دارد. هنگامی که توپ تا ارتفاع h بالا می‌رود، انرژی پتانسیل سیستم به اندازه mgh زیاد می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه کم می‌شود. هنگامی که توپ سقوط آزاد می‌کند و به اندازه همین h پایین می‌آید، انرژی پتانسیل سیستم به اندازه mgh کم می‌شود، و انرژی جنبشی سیستم به همین اندازه زیاد می‌شود.

چون جرم توپ خیلی کمتر از زمین است، تقریباً همه افزایش انرژی جنبشی سیستم توپ + زمین به توپ می‌رسد. به همین علت است که گاهی می‌گوییم انرژی پتانسیل توپ، در حالی که "انرژی پتانسیل سیستم توپ + زمین" دقیقتر است. در سیستمهای دیگر - ک...

انرژی پتانسیل تابعی است از مکان که نیرو منفی مشتق آن است. در اینجا نیروی F توسط سیستمی اعمال می‌شود که انرژی پتانسیل آن U است.

حالا طرز محاسبه انرژی پتانسیل را با دو مثال از نیروهای پایستار که در بخش ۸-۱ بررسی کردیم، یعنی سیستم جسم-فنر و سیستم توبه-زمین، نشان می‌دهیم.

نیروی فنر

نقطه مرجع x_0 جسم در سیستم جسم-فنر شکل ۱ را جایی می‌گیریم که در آن فنر به حالت آزاد است ($x_0 = 0$)؛ انرژی پتانسیل سیستم را هم در این وضعیت برابر با صفر انتخاب می‌کنیم [$U(x_0) = 0$]. انرژی پتانسیل سیستم جسم-فنر را می‌توانیم با جایگذاری این مقادیر در معادله ۱۰، و محاسبه انتگرال به ازای نیروی فنر، $F(x) = -kx$ به دست بیاوریم

$$U(x) - 0 = - \int_0^x (-kx) dx$$

یا

$$U(x) = \frac{1}{2} kx^2 \quad (14)$$

اگر جسم به اندازه x از مکان مرجع جابه‌جا شده باشد، انرژی پتانسیل سیستم $\frac{1}{2} kx^2$ می‌شود. x چه مثبت باشد چه منفی، یعنی فنر چه به اندازه x کشیده شود و چه به همین اندازه فشرده، انرژی ذخیره شده یکسان است.

اگر از معادله ۱۴ مشتق بگیریم، می‌بینیم که معادله ۱۳ صادق است

$$-\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{2} kx^2 \right) = -kx = F$$

فرض کنید سیستم جسم-فنر را تا فاصله x_m از نقطه مرجع می‌کشیم؛ در این حالت، انرژی پتانسیل $\frac{1}{2} kx_m^2$ است. اگر فنر را از این وضعیت، و از حالت سکون، رها کنیم، انرژی مکانیکی سیستم هم $\frac{1}{2} kx_m^2$ می‌شود، زیرا در لحظه رها شدن فنر انرژی جنبشی صفر است. در این مورد، معادله ۱۲ به شکل زیر نوشته می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2 &= E \\ &= \frac{1}{2} kx_m^2 \end{aligned} \quad (15)$$

با این رابطه می‌شود سرعت را به ازای هر مقدار جابه‌جایی محاسبه کرد

$$v = \sqrt{\frac{k}{m}(x_m^2 - x^2)} \quad (16)$$

چنان‌که انتظار می‌رود، از معادله ۱۶ نتیجه می‌شود که سرعت، به ازای $x = \pm x_m$ صفر است. در لحظه‌ای که جسم از نقطه مرجع

از آن، مقدار انرژی پتانسیل را در هر نقطه، مثلاً x_1 یا x_2 ، حساب کنیم. با تغییر $U(x_0)$ ، مقادیر $U(x_1)$ و $U(x_2)$ هم به یک اندازه تغییر می‌کنند، اما اختلاف انرژی پتانسیل، $U(x_2) - U(x_1)$ ، تغییر نمی‌کند. بنابراین، تحلیل رفتار دینامیکی سیستم مستقل از مقداری است که برای $U(x_0)$ انتخاب می‌کنیم.

انتخاب نقطه مرجع برای $U(x)$ ، از یک نظر شبیه به انتخاب چارچوب مرجع برای انرژی جنبشی است. چنان‌که در بخش ۷-۶ دیدیم، ناظرهایی که نسبت به هم حرکت می‌کنند ممکن است مقادیر متفاوتی برای انرژی جنبشی یک جسم به دست بیاورند. مقادیری هم که ناظرهای مختلف برای U و K ، و انرژی مکانیکی E اندازه می‌گیرند ممکن است متفاوت باشند، اما از دیدگاه همه آنها E ثابت، یعنی انرژی مکانیکی پایسته است.

سرعت ذره، طی حرکت آن از x_0 به x ، از v_0 به v تغییر می‌کند و طبق قضیه کار-انرژی، کار نیروی F برابر است با

$$W = \Delta K = \frac{1}{2} mv^2 - \frac{1}{2} mv_0^2 \quad (11)$$

از ترکیب معادلات ۹، ۱۰، و ۱۱ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} mv^2 + U(x) &= \frac{1}{2} mv_0^2 + U(x_0) \\ &= E \end{aligned} \quad (12)$$

کمیت طرف راست معادله ۱۲ تنها به مکان اولیه x_0 و سرعت اولیه v_0 بستگی دارد، که مقادیری معین‌اند؛ پس این مقدار طی حرکت ثابت است. این ثابت، همان انرژی مکانیکی E است. توجه کنید که در این معادله نیرو و شتاب ظاهر نمی‌شوند، و معادله فقط شامل مکان و سرعت است. معادله ۱۲ شکل دیگری از قانون پایستگی انرژی برای نیروهای پایستار است.

در حل مسائلی که در آنها تنها با نیروهای پایستار سروکار داریم می‌توانیم با استفاده از معادله ۱۲ به جای قوانین نیوتون، کار را ساده‌تر کنیم. البته این معادله هم از قوانین نیوتون به دست آمده است، اما یک قدم به جواب نزدیکتر است (به اصطلاح، یک انتگرال اول حرکت است). در خیلی از موارد در حل مسائل، بی‌آنکه نیروها را تحلیل کنیم یا قوانین نیوتون را بنویسیم، به دنبال کمیتی می‌گردیم که طی حرکت ثابت بماند؛ در این مورد، آنچه ثابت می‌ماند انرژی مکانیکی است و می‌توانیم از معادله ۱۲ استفاده کنیم.

در مورد حرکت یک‌بعدی، رابطه بین نیرو و انرژی پتانسیل، معادله ۹، را می‌شود چنین نوشت

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx} \quad (13)$$

برای نشان دادن صحت این رابطه، کافی است $F(x)$ را به همین شکل بالا در معادله ۹ بگذارید تا ببینید که به یک اتحاد می‌رسید. رابطه ۱۳ دیدگاه دیگری برای توصیف انرژی پتانسیل به دست می‌دهد:

فراهم می‌کند. همچنین، مواردی وجود دارد که کار کردن با انرژی، که اسکالر است، از کار کردن با نیرو، که بردار است، ساده‌تر است.

$(x = x_0 = 0)$ می‌گذرد، سرعت v_0 برابر است با

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m} x_m} \quad (17)$$

مثال ۱. اتاقک آسانسوری به جرم $m = 920 \text{ kg}$ از سطح خیابان به بالاترین طبقه مرکز تجارت جهانی در نیویورک، به ارتفاع $h = 412 \text{ m}$ بالاتر از سطح زمین، حرکت می‌کند. تغییر انرژی پتانسیل اتاقک چقدر است؟

حل: دقیقتر گفته باشیم، البته منظورمان تغییر انرژی پتانسیل سیستم اتاقک-زمین است. از معادله ۱۸ داریم

$$\Delta U = mg \Delta y = mgh = (920 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(412 \text{ m}) \\ = 3.7 \times 10^6 \text{ J} = 3.7 \text{ MJ}$$

این مقدار تقریباً 1 kWh است؛ شرکت برق بهای انرژی الکتریکی را برحسب همین "واحد" با مشتریانش حساب می‌کند.

مثال ۲. فنر یک تفنگ فنی به اندازه $d = 3.2 \text{ cm}$ از حالت آزاد خود فشرده شده است؛ گویی به جرم $m = 12 \text{ g}$ در لوله قرار دارد. اگر تفنگ شلیک شود، گوی با چه سرعتی از لوله خارج می‌شود؟ ثابت نیروی فنر، k ، برابر با 7.5 N/cm است. اصطکاک ناچیز است و لوله تفنگ افقی است.

حل: می‌توانیم مستقیماً معادله ۱۲ را به کار ببریم؛ مکان اولیه فنر $x_0 = d$ ، و سرعت اولیه گوی $v_0 = 0$ است. در حالت نهایی فنر در حالت آزاد است ($x = 0$) و گوی با سرعت v حرکت می‌کند.

پس

$$\frac{1}{2}mv^2 + 0 = 0 + \frac{1}{2}kd^2$$

از این معادله v را به دست می‌آوریم

$$v = d\sqrt{\frac{k}{m}} = (0.032 \text{ m})\sqrt{\frac{750 \text{ N/m}}{12 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 8.0 \text{ m/s}$$

مثال ۳. یک واگن تفریحی (شکل ۸) پر از مسافر، به آرامی به ارتفاع $y = 25 \text{ m}$ می‌رود، و از آنجا به طرف پایین شتاب می‌گیرد. با چشمپوشی از اصطکاک سیستم، حساب کنید که این واگن با چه سرعتی به پایین مسیر می‌رسد؟

حل: در نگاه اول، به نظر می‌رسد حل مسئله غیرممکن باشد، زیرا هیچ چیزی درباره شکل مسیر واگن نمی‌دانیم. اما در غیاب اصطکاک، ریل کاری روی واگن انجام نمی‌دهد؛ تنها نیرویی که روی واگن کار انجام می‌دهد گرانش است. انرژی مکانیکی در بالاترین نقطه مسیر، که آن را با E_t نشان می‌دهیم

$$E_t = U_t + K_t = mgy + 0$$

انرژی مکانیکی را، هم برحسب سرعت v_0 در نقطه مرجع $(E = 1/2mv_0^2)$ و هم برحسب حداکثر جابه‌جایی از نقطه مرجع $(E = 1/2kx_m^2)$ می‌توان بیان کرد.

نیروی گرانش

برای سیستم توپ-زمین، مختصه قائم را به جای x با y نشان می‌دهیم. نقطه مرجع $y_0 = 0$ را سطح زمین می‌گیریم، و تعریف می‌کنیم $U(y_0) = 0$. حالا می‌توانیم انرژی پتانسیل $U(y)$ سیستم را از معادله ۱۰، با $F(y) = -mg$ ، محاسبه کنیم

$$U(y) - 0 = -\int_0^y -mg \, dy \\ U(y) = mgy \quad (18)$$

توجه کنید که این انرژی پتانسیل، در معادله ۱۳ صدق می‌کند: $-dU/dy = -mg = F$. سرعت اولیه توپ در نقطه مرجع v_0 است، و از معادله ۱۲ نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgy = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad (19)$$

به کمک این معادله، که با معادله ۲۵ فصل ۲ هم‌ارز است، می‌توانیم سرعت را به‌ازای هر ارتفاع y به دست بیاوریم. این مثال نشان می‌دهد که تحلیل سیستم‌های دینامیکی با رهیافت انرژی و رهیافت نیرو، یعنی به دو زبان کمی متفاوت، چگونه است. رهیافت نیرو برای تحلیل سیستم چنین است: "توپ با سرعت اولیه v_0 شروع به حرکت می‌کند. زمین نیروی $-mg$ بر آن وارد می‌کند و به آن شتاب $-g$ می‌دهد. شتاب رو به پایین موجب می‌شود که سرعت کم شود، و سرانجام در ارتفاع h به صفر برسد. از اینجا به بعد، توپ در گرانش رو به پایین زمین شروع به حرکت به طرف پایین می‌کند، و با سرعت v به زمین می‌رسد."

رهیافت انرژی چنین است: "توپ با انرژی جنبشی $1/2mv_0^2$ شروع به حرکت می‌کند. با بالا رفتن توپ، انرژی پتانسیل سیستم توپ-زمین زیاد می‌شود، پس انرژی جنبشی باید کم شود تا انرژی مکانیکی E ثابت بماند. در نقطه اوج حرکت، همه انرژی جنبشی به انرژی پتانسیل گرانشی تبدیل شده است. در سقوط توپ، این فرایند معکوس می‌شود، یعنی انرژی پتانسیل دوباره به انرژی جنبشی تبدیل می‌شود، و هنگامی که توپ به زمین می‌خورد همه انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی تبدیل شده است." البته نتیجه هر دو رهیافت یکی است، در اغلب موارد، رهیافت انرژی مفیدتر است و بصیرت بیشتری

۴-۸ سیستمهای پیوسته یک بعدی. حل ۳

هدف از تحلیل سیستمهای مکانیکی، معمولاً این است که حرکت ذرات را برحسب زمان توصیف کنیم. در فصلهای ۵ و ۶ نحوه حل این مسئله، با استفاده از قوانین نیوتون، را نشان دادیم؛ این روش را روش دینامیکی می‌نامیم. روش دیگری وجود دارد، که گاه مفیدتر هم هست. این روش، روش انرژی است که در این بخش در باره‌اش صحبت می‌کنیم.

معادله ۱۲ رابطه میان مختصه و سرعت یک حرکت یک بعدی است در حالتی که نیرو فقط به مکان بستگی داشته باشد. (در یک بعد، هر نیرویی که فقط به مکان بستگی داشته باشد حتماً پایستار است؛ در دو یا سه بعد، چنانکه در بخش ۵-۸ خواهیم دید، الزاماً چنین نیست.) در طی وصول به معادله ۱۲، نیرو و شتاب حذف شده‌اند. برای اینکه این تحلیل کامل شود، باید سرعت را هم حذف کنیم تا مکان به صورت تابعی از زمان به دست بیاید.

برای انجام این کار، از معادله ۱۲ شروع می‌کنیم

$$U(x) + \frac{1}{2}mv^2 = E$$

از این رابطه v را به دست می‌آوریم

$$v = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]} \quad (20)$$

در این رابطه، $U(x)$ انرژی پتانسیل متناظر با نیرویی است که در سیستم عمل می‌کند، و E انرژی مکانیکی (ثابت) ای است که به سیستم داده می‌شود. از معادله ۲۰ معلوم می‌شود که، به ازای یک مقدار معین E ، حرکت به ناحیه‌هایی از محور x محدود می‌شود که در آنها $E \geq U(x)$ باشد. یعنی، سرعت نمی‌تواند موهومی باشد و انرژی جنبشی نمی‌تواند منفی باشد، پس $[E - U(x)]$ باید بزرگتر از یا مساوی با صفر باشد. به علاوه، با رسم منحنی $U(x)$ برحسب x می‌توانیم توصیف کیفی خوبی از انواع ممکن حرکت به دست بیاوریم. این توصیف مبتنی است بر اینکه سرعت متناسب با جذر تفاضل E و U است.

به عنوان مثال، تابع انرژی پتانسیل شکل ۹ الف را در نظر بگیرید. (اگرچه این تابع شبیه به مقطع مسیر واگن تفریحی است، اما به یاد داشته باشید که نماینده انرژی پتانسیل سیستم پایستاری است که حرکت در آن منحصر به یک بعد است. واگن تفریحی‌ای که روی ریل حرکت می‌کند، حرکتی دوبعدی یا سه بعدی دارد.) لازمه واقعی بودن حرکت این است که $E \geq U(x)$ باشد؛ پس کمترین انرژی مکانیکی ممکن E_0 است. به ازای این مقدار انرژی $E = E_0 = U$ است، و انرژی جنبشی باید صفر باشد. یعنی ذره باید در نقطه x_0 ساکن باشد. اگر انرژی سیستم را کمی بیشتر کنیم، و به E_1 برسانیم، ذره فقط می‌تواند بین x_1 و x_2 حرکت کند. با حرکت ذره از x_0 ، به سوی x_1 یا x_2 ، سرعت آن کم می‌شود. در x_1 یا x_2 ، ذره می‌ایستد و جهت حرکت آن



شکل ۸. وسیله‌ای برای تبدیل انرژی پتانسیل گرانشی به انرژی جنبشی.

که در آن $y = 0$ را پایین‌ترین نقطه مسیر گرفته‌ایم. هنگامی که واگن به پایین‌ترین نقطه مسیر می‌رسد، انرژی مکانیکی، E_b ، برابر است با

$$E_b = U_b + K_b = 0 + \frac{1}{2}mv^2$$

مرجع U را چنان گرفته‌ایم که در $y = 0$ داشته باشیم $U = 0$ پایستگی انرژی ایجاب می‌کند که $E_t = E_b$ باشد. پس

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2$$

از این معادله v را به دست می‌آوریم:

$$v = \sqrt{2gy} = \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(25 \text{ m})} = 22 \text{ m/s}$$

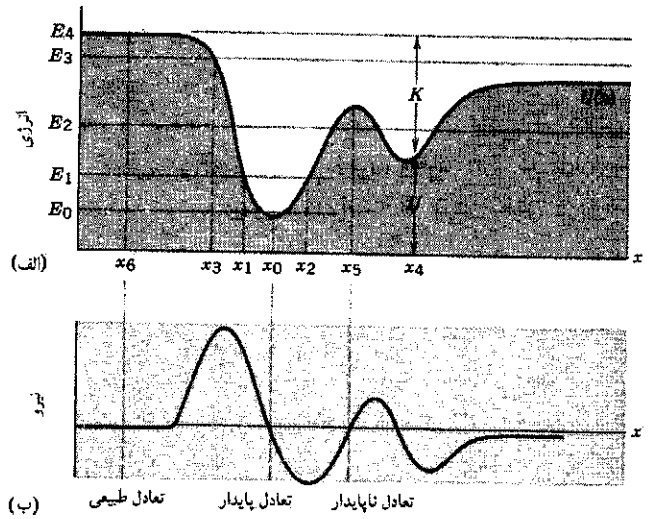
اگر جسمی از ارتفاع ۲۵m رها شود و در راستای قائم سقوط کند هم با همین سرعت به زمین می‌رسد. ریل اندازه سرعت واگن "افتادن" را تغییر نمی‌دهد؛ فقط جهت حرکت را تغییر می‌دهد. توجه کنید که این نتیجه مستقل از جرم واگن و محتویات آن است. با گذشتن واگن از نقاط پست و بلند مسیر، سرعت آن زیاد و کم می‌شود. تا آنجا که هیچ نقطه‌ای از مسیر از نقطه اولیه بلندتر نباشد، سیستم انرژی مکانیکی کافی دارد که از تپه‌های بین راه بگذرد و به نقطه پایان برسد.

مزیت روش انرژی بر روش نیرو در این مسئله، کاملاً روشن است. برای استفاده از قوانین نیوتون باید شکل دقیق مسیر را بدانیم و تازه باید مؤلفه‌های نیرو و شتاب را در هر نقطه‌ای حساب کنیم. این کار می‌تواند کار بسیار مشکلی باشد. در عوض، با استفاده از قوانین نیوتون، اطلاعات بیشتری نسبت به روش انرژی به دست می‌آید، از جمله مدتی که طول می‌کشد تا واگن به پایین مسیر برسد.

نقطه ساکن باشد، ساکن می‌ماند. اما اگر ذره، حتی خیلی کم، از این نقطه جابه‌جا شود، نیروی $F(x)$ آن را از نقطه تعادل دورتر می‌کند به همین دلیل، چنین نقطه تعادلی را نقطه تعادل ناپایدار می‌نامند. اگر ذره، در شکل ۹ ب، از نقطه متناظر با x_5 به طرف راست برود (به طرف x های بزرگتر) نیروی مثبتی ایجاد می‌شود که آن را به طرف x های باز هم بزرگتر می‌راند.

در بازه‌ای که $U(x)$ در آن ثابت باشد، مثلاً در اطراف $x = x_6$ ، شیب منحنی صفر است، پس نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی، $F(x_6) = -(dU/dx)_{x=x_6} = 0$. چنین بازه‌ای را بازه تعادل خنثی می‌نامند، زیرا اگر ذره را کمی جابه‌جا کنیم، هیچ نیروی دافعه یا بازگرداننده‌ای بر آن وارد نمی‌شود.

از این بحث روشن می‌شود که با دانستن تابع انرژی پتانسیل در ناحیه‌ای از محور x که ذره در آن حرکت می‌کند، می‌توانیم اطلاعات زیادی درباره حرکت جسم به دست بیاوریم.

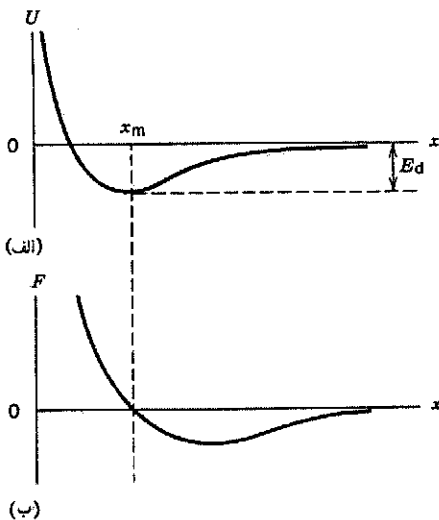


شکل ۹. الف) یک تابع انرژی پتانسیل $U(x)$. ب) نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل.

مثال ۴. تابع انرژی پتانسیل نیروی بین اتمهای یک مولکول دو اتمی را (تقریباً) می‌توان چنین نوشت

$$U(x) = \frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6}$$

در این رابطه، a و b دو ثابت مثبت‌اند و x فاصله بین دو اتم است. الف) فاصله دو اتم در حالت تعادل، ب) نیروی بین دو اتم، و ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول (یعنی برای اینکه اتمها از حالت تعادل به موقعیت $x = \infty$ بروند) چقدر است؟ حل: الف) شکل ۱۰ الف) $U(x)$ را به صورت تابعی از x نشان



شکل ۱۰. مثال ۴. الف) انرژی پتانسیل و ب) نیروی بین اتمهای یک مولکول دو اتمی به صورت تابعی از فاصله x بین دو اتم. توجه کنید که انرژی پتانسیل را به ازای فاصله بر نهات اتمها از هم صفر گرفته‌ایم.

معکوس می‌شود. به همین دلیل، دو نقطه x_1 و x_2 را نقاط بازگشت حرکت می‌نامند. در انرژی E_2 ، چهار نقطه بازگشت وجود دارد و ذره در یکی از دو ذره پتانسیل نوسان می‌کند. در انرژی E_3 ، فقط یک نقطه بازگشت وجود دارد، که x_2 است. اگر ذره در ابتدا در حال حرکت در جهت منفی x باشد، در نقطه x_2 می‌ایستد و از آن پس در جهت مثبت x حرکت خواهد کرد. به ازای انرژیهای بیش از E_4 ، نقطه بازگشتی وجود ندارد، جهت حرکت ذره همواره ثابت می‌ماند. اندازه سرعت ذره، با توجه به مقدار انرژی پتانسیل در هر نقطه، تغییر می‌کند؛ چنانکه در شکل برای نقطه x_2 نشان داده شده است، انرژی جنبشی در هر نقطه عبارت است از اختلاف انرژی مکانیکی (مثلاً E_4 در شکل ۹ الف) با انرژی پتانسیل $U(x)$ در آن نقطه.

در نقطه‌ای که $U(x)$ کمینه باشد، مثلاً در $x = x_0$ ، شیب منحنی صفر است، بنابراین نیرو هم صفر می‌شود؛ یعنی $F(x_0) = -(dU/dx)_{x=x_0} = 0$. ذره‌ای که در ابتدا در این نقطه ساکن باشد، ساکن باقی خواهد ماند. علاوه بر این، اگر ذره را کمی، به هر طرف، جابه‌جا کنیم، نیرو، $F(x) = -dU/dx$ ، می‌خواهد که آن را برگرداند؛ بنابراین، ذره حول نقطه تعادل نوسان خواهد کرد. به همین دلیل، این نقطه تعادل را نقطه تعادل پایدار می‌نامند. شکل ۹ ب نیروی $F(x)$ متناظر با انرژی پتانسیل $U(x)$ را نشان می‌دهد. اگر ذره کمی به طرف چپ x_0 برود (یعنی به x های کوچکتر)، نیرو مثبت می‌شود و ذره را به سوی x های بزرگتر می‌راند (یعنی دوباره به طرف x_0 برمی‌گرداند). اگر ذره به طرف راست x_0 برود، نیروی وارد بر ذره منفی می‌شود و باز هم آن را به طرف x_0 می‌راند.

در نقطه‌ای که $U(x)$ بیشینه باشد هم، مثلاً در $x = x_5$ ، شیب منحنی صفر است و نیرو صفر است.

جواب تحلیلی برای $x(t)$ (اختیاری)

تابع $x(t)$ می‌تواند توصیف کاملی از حرکت یک‌بعدی ذره به دست بدهد. این تابع، مکان x ذره را در همهٔ زمانهای t تعیین می‌کند. برای پیدا کردن $x(t)$ ، کار را از معادلهٔ ۲۰ شروع می‌کنیم. این معادله را چنین می‌نویسیم

$$\frac{dx}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}$$

یا

$$\frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = dt \quad (21)$$

از دو طرف این معادله، بین مکان اولیه ($x = x_0$ در $t = t_0$) تا مکان دلخواه x در زمان t ، انتگرال می‌گیریم. نتیجه می‌شود که

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{\frac{2}{m}[E - U(x)]}} = \int_{t_0}^t dt = t - t_0 \quad (22)$$

با محاسبهٔ انتگرال طرف چپ معادلهٔ ۲۲، علی‌الاصول می‌توانیم معادلهٔ حاصل را حل کنیم و $x(t)$ را به دست بیاوریم.

در معادلهٔ ۲۲، علامت جلوی رادیکال بستگی به این دارد که v در جهت مثبت x است یا در جهت منفی x . با تغییر v در طی حرکت، ممکن است لازم شود که انتگرال‌گیری را برای بخشهای مختلف حرکت جداگانه انجام بدهیم.

در بعضی موارد، می‌شود انتگرال معادلهٔ ۲۲ را محاسبه کرد و یک جواب تحلیلی برای $x(t)$ به دست آورد. در موارد دیگر، ممکن است راحت‌تر باشد که با استفاده از کامپیوتر مسئله را به صورت عددی حل کنیم؛ این را در بخش بعد نشان می‌دهیم. در اینجا جواب تحلیلی را برای ذره‌ای به جرم m که در یک بعد حرکت می‌کند، و فزنی با ثابت نیروی k بر آن نیرو وارد می‌کند، به دست می‌آوریم. در چنین مواردی، $U(x) = \frac{1}{2}kx^2$ است. فرض کنید که در $t = 0$ ، ذره در $x = x_0$ است، و سرعت آن $v = 0$ است. پس انرژی مکانیکی E ، طبق معادلهٔ ۱۲ برابر با $\frac{1}{2}kx_0^2$ است. در این مورد، معادلهٔ ۲۲ به صورت زیر در می‌آید

$$\sqrt{\frac{m}{k}} \int_{x_0}^x \frac{dx}{\pm \sqrt{x_0^2 - x^2}} = t$$

این انتگرال، به شکل استاندارد است که جواب آن در جدولهای انتگرال یافت می‌شود

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\cos^{-1} \left(\frac{x}{a} \right)$$

می‌دهد. تعادل در نقطهٔ x_m حاصل می‌شود، که در آن $U(x)$ کمینه می‌شود. این نقطه از رابطهٔ زیر به دست می‌آید

$$\left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=x_m} = 0$$

یعنی

$$\frac{-12a}{x_m^{12}} + \frac{6b}{x_m^6} = 0$$

یا

$$x_m = \left(\frac{2a}{b} \right)^{1/6}$$

(ب) با استفاده از معادلهٔ ۱۳، نیروی متناظر با این انرژی پتانسیل

به دست می‌آید

$$F(x) = -\frac{dU}{dx} = -\frac{d}{dx} \left(\frac{a}{x^{12}} - \frac{b}{x^6} \right) = \frac{12a}{x^{13}} - \frac{6b}{x^7}$$

شکل ۱۰ ب نمودار نیرو را برحسب فاصلهٔ بین آنها نشان می‌دهد. در جایی که نیرو مثبت باشد (از $x = 0$ تا $x = x_m$)، آنها یکدیگر را دفع می‌کنند (نیرو در جهت افزایش x است). در جایی که نیرو منفی باشد (از $x = x_m$ تا $x = \infty$)، آنها یکدیگر را جذب می‌کنند (نیرو در جهت کاهش x است). در $x = x_m$ ، نیرو صفر است؛ این یک نقطهٔ تعادل است، این تعادل پایدار است.

(ج) حداقل انرژی لازم برای شکستن مولکول به اتمهایش را انرژی تفکیک، E_d ، می‌نامند. از منحنی انرژی پتانسیل در شکل ۱۰ الف، نتیجه می‌شود که اگر $E \geq 0$ باشد، آنها را می‌توان تا $x = \infty$ متناظر با $U = 0$ ، از هم جدا کرد. حداقل انرژی لازم $E = 0$ است، یعنی حالتی که آنها در حالت نهایی شان بینهایت از هم دور ($U = 0$) و ساکن هستند ($K = 0$). در حالت تعادل مولکول، همهٔ انرژی به شکل پتانسیل است، پس (شکل ۱۰ الف) خواهیم داشت $E_d = U(x_m)$ که کمیتی منفی است. مقدار انرژی‌ای که باید به مولکول، در حالت تعادلش، بدهیم تا انرژی آن از این مقدار منفی به صفر برسد، همان است که آن را انرژی تفکیک E_d نامیدیم. پس،

$$U(x_m) + E_d = 0$$

یا

$$E_d = -U(x_m) = -\frac{a}{x_m^{12}} + \frac{b}{x_m^6}$$

و با جایگذاری مقدار x_m خواهیم داشت

$$E_d = \frac{b^2}{4a}$$

E_d کمیتی مثبت است، و باید هم باشد. این انرژی را می‌توانیم با انجام کار خارجی به مولکول بدهیم، مثلاً با استفاده از نیروهای الکتریکی، یا با زیاد کردن انرژی جنبشی یکی از اتمهای مولکول نسبت به دیگری.

در مورد مسئله ما معلوم می‌شود که

$$\int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x_0^2 - x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{x_0}\right) \Big|_{x_0}^x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

این نتیجه را، پس از کمی عملیات، می‌شود چنین نوشت

$$x(t) = x_0 \cos \sqrt{\frac{k}{m}} t$$

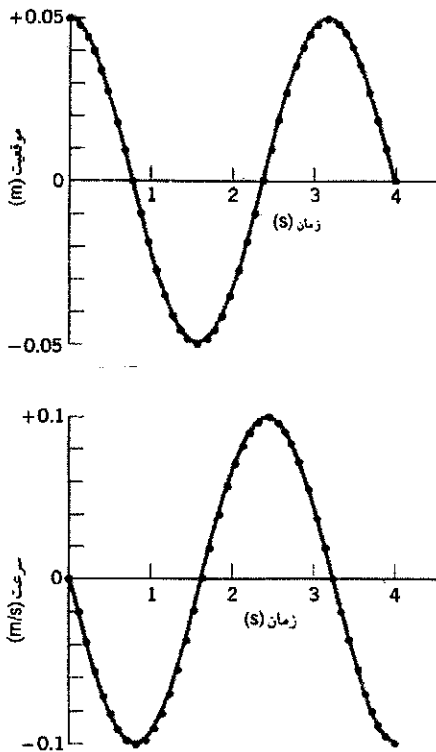
با استفاده از این مکان جدید (x_1) ، شتاب (تقریباً ثابت) ذره در بازه دوم، $a_2 = F(x_1)/m$ را به دست می‌آوریم؛ و بعد معادلات شتاب ثابت را برای بازه دوم می‌نویسیم

$$v_2 = v_1 + a_2 \delta t$$

و

$$x_2 = x_1 + v_1 \delta t + \frac{1}{2} a_2 (\delta t)^2$$

این عملیات را می‌توانیم، برای هر چند بازه که بخواهیم، دنبال کنیم. هر چه بازه δt را کوچکتر بگیریم، نتیجه محاسبات دقیقتر می‌شود. مثلاً، نیروی فنر $F(x) = -kx$ با $k = 9.6 \text{ N/m}$ را در نظر بگیرید که بر ذره‌ای به جرم $m = 2.5 \text{ kg}$ وارد می‌شود. فرض کنید که ذره در $t = 0$ ، از نقطه $x_0 = 0.5 \text{ m}$ و با سرعت $v_0 = 0$ شروع به حرکت کند. شکل ۱۱ نتایج محاسبه عددی $x(t)$ و $v(t)$ را، با استفاده از 400 بازه، هر یک به اندازه 1 s ، نشان می‌دهد. یک برنامه کامپیوتری برای انجام این محاسبه عددی در پیوست ط آمده است. با استفاده از این برنامه می‌توانیم هر حرکت یک‌بعدی حاصل از نیروی وابسته به مکان را تحلیل کنیم، حتی اگر از انتگرال



شکل ۱۱. حل عددی برای حرکت ذره‌ای که تحت اثر نیروی فنر $F = -kx$ است. نقاط شکل مقادیری را نشان می‌دهد که مستقیماً از کامپیوتر گرفته شده‌اند. برای اینکه شکل واضح باشد، از هر 10 نقطه کامپیوتری فقط یکی نشان داده شده است. منحنیها از این نقاط گذرانده شده‌اند، و کاملاً شبیه همان منحنیهای سینوس، که کسینوس‌اند که از جواب تحلیلی حاصل می‌شوند.

حرکت یک‌بعدی ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی فنر حرکت می‌کند، سینوسی است. به تجربه می‌دانیم که این حرکت نوسانی است (یعنی، ذره روی یک مسیر می‌رود و برمی‌گردد)؛ این نتیجه نشان می‌دهد که نوسان سینوسی است. حرکت نوسانی را، به صورت کلی‌تر، در فصل ۱۵ بررسی خواهیم کرد؛ در آنجا همین نتیجه را برای $x(t)$ با استفاده از قوانین نیوتون هم به دست خواهیم آورد.

حل عددی

قبلاً در مورد نیروی وابسته به زمان (بخش ۶-۶) یا وابسته به سرعت (بخش ۷-۶) روشی عددی برای حل معادله حرکت ارائه کردیم. در مورد نیروهای وابسته به زمان هم می‌توانیم چنین روشی را به کار بگیریم. عملیاتی که در اینجا به آن می‌پردازیم مبتنی بر قوانین نیوتون است نه روشهای انرژی.

فرض کنید نیروی $F(x)$ بر ذره‌ای به جرم m وارد شود. در $t = 0$ ، ذره در x_0 واقع شده و سرعت آن v_0 است. می‌خواهیم بدانیم که حرکت حاصل چگونه است، یعنی می‌خواهیم $x(t)$ و $v(t)$ را در همه زمانها داشته باشیم.

حرکت را به رشته‌ای از بازه‌های زمانی کوچک δt تقسیم می‌کنیم. هر بازه آنقدر کوچک است که شتاب را در سراسر آن می‌شود ثابت گرفت. (در بازه‌ای که به قدر کافی کوچک باشد، x چندان تغییری نمی‌کند؛ پس $F(x)$ تقریباً ثابت می‌ماند، و $a = F/m$ هم همین‌طور.)

در بازه اول، که از $t = 0$ تا $t = \delta t$ است، شتاب برابر با مقدار اولیه $a_1 = F(x_0)/m$ است. (در اینجا شاخصهای زیر حروف نشاندهنده شماره بازه زمانی‌اند و کمیت مربوط را در پایان آن بازه مشخص می‌کنند. بنابراین، v_2 یعنی سرعت در پایان بازه دوم.) حالا به راحتی می‌توانیم معادلات سینماتیکی حرکت با شتاب ثابت را برای هر بازه به کار ببریم. معادله ۱۵ فصل ۲ سرعت در پایان بازه اول را می‌دهد

$$v_1 = v_0 + a_1 \delta t$$

معادله ۱۹ فصل ۲ هم مکان در پایان بازه اول را می‌دهد

$$x_1 = x_0 + v_0 \delta t + \frac{1}{2} a_1 (\delta t)^2$$

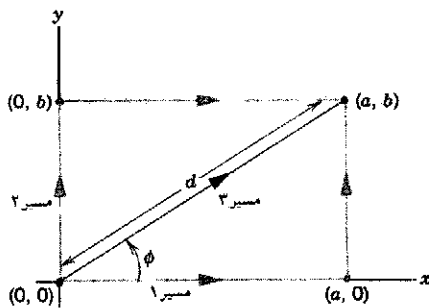
سرانجام، تعمیم سه بعدی معادله ۱۳ چنین است^۱

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\mathbf{i}\frac{\partial U}{\partial x} - \mathbf{j}\frac{\partial U}{\partial y} - \mathbf{k}\frac{\partial U}{\partial z} \quad (27)$$

اگر این عبارت \mathbf{F} را در معادله ۲۴ بگذاریم، یک اتحاد به دست می‌آید که نشان می‌دهد دو معادله ۲۴ و ۲۷ هم‌ارزند. به زبان برداری، می‌گوییم که نیروی پایستار \mathbf{F} ، منفی گزادیان انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ است. می‌توانید نشان بدهید که برای حرکت در راستای محور x ، همه این عبارات تبدیل می‌شوند به معادلات یک‌بعدی متناظرشان، که قبلاً به دست آورده بودیم، در معادلات ۲۴ و ۲۷، \mathbf{F} نشاندهنده نیرویی است که توسط سیستمی با انرژی پتانسیل U اعمال می‌شود.

مثال ۵. در سیستمی از ذرات، که حرکتشان مقید به صفحه xy است، نیرو به شکل $\mathbf{F}(x, y) = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = -ky\mathbf{i} - kx\mathbf{j}$ است که در آن k یک مقدار ثابت مثبت است. (این نیرو ذره‌ای را که در نقطه دلخواه (x, y) واقع شده است به طرف خط قطری $y = -x$ می‌راند. برای تحقیق این موضوع می‌توانید خط $y = -x$ را بکشید و مؤلفه‌های نیروی F_x و F_y را در نقاط مختلف صفحه xy رسم کنید.) (الف) نشان بدهید که کار این نیرو، طی حرکت ذره از مبدأ $(0, 0)$ به نقطه (a, b) ، در راستای هر سه مسیر شکل ۱۲ یکسان است. (ب) با فرض اینکه این نیرو پایستار است، انرژی پتانسیل متناظر با آن، یعنی $U(x, y)$ را به دست بیاورید. نقطه مرجع را $x_0 = 0$ و $y_0 = 0$ بگیرید و فرض کنید $U(0, 0) = 0$.

حل: (الف) کار در مسیر ۱ را می‌شود با تقسیم مسیر به دو بخش به دست آورد: مسیر ۱ا از $x = 0$ تا $x = a$ در راستای محور x ، و مسیر ۱ب از نقطه $(a, 0)$ به نقطه (a, b) در راستای قائم، کار در مسیر



شکل ۱۲. مثال ۵. سه مسیر مختلف برای محاسبه کار ذره، در حرکت از مبدأ $(0, 0)$ به نقطه (a, b) .

۱. مشتق پاره‌ای، $\partial/\partial x$ ، یعنی مشتق $U(x, y, z)$ نسبت به x ، در حالی که y و z ثابت‌اند. به همین ترتیب، $\partial/\partial y$ و $\partial/\partial z$ هم به معنی مشتق‌گیری نسبت به متغیرهای مربوطه‌اند وقتی که متغیرهای دیگر ثابت باشند.

معادله ۱۰ شکل تحلیلی‌ای برای انرژی پتانسیل به دست نیاید یا نتوانیم انتگرال معادله ۲۲ را به شکل تحلیلی محاسبه کنیم.

نتایج شکل ۱۱ خیلی آشنا به نظر می‌رسند: این منحنیها شبیه منحنیهای سینوس و کسینوس‌اند. در واقع، معادله ۲۲ را قبلاً حل کرده و جواب تحلیلی این سیستم را به دست آورده‌ایم، و دیده‌ایم که معادله حرکت یک تابع کسینوس است. رهیافت عددی هم مؤید همین نتیجه است.

۵.۸ سیستمهای پایستار دو و سه بعدی (اختیاری)

تا اینجا مفاهیم انرژی پتانسیل و پایستگی انرژی را برای سیستمهای یک‌بعدی، که در آنها نیرو در راستای حرکت است، بررسی کردیم. نتایج این بررسی را می‌توانیم به راحتی به حرکت سه بعدی تعمیم بدهیم و در این مورد هم عبارتی برای پایستگی انرژی به دست بیاوریم.

سیستمی را در نظر بگیرید که در آن ذره‌ای روی مسیری حرکت می‌کند و نیروی وارد بر ذره ناشی از اجزای دیگر سیستم است. اگر کار نیروی \mathbf{F} فقط وابسته به نقاط ابتدا و انتهای حرکت و مستقل از مسیر باشد، این نیرو پایستار است. انرژی پتانسیل U را مشابه با سیستمهای یک‌بعدی تعریف می‌کنیم، و می‌بینیم که تابعی از سه مختصه فضایی است؛ یعنی، $U = U(x, y, z)$. تعمیم معادله ۹ به حرکت سه بعدی چنین است

$$\Delta U = -\int_{x_0}^x F_x dx - \int_{y_0}^y F_y dy - \int_{z_0}^z F_z dz \quad (23)$$

یا، به شکل جمع و جورتر و با نماد برداری

$$\Delta U = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} \quad (24)$$

در این رابطه، ΔU تغییر انرژی پتانسیل سیستم در طی مسیر است؛ مسیر حرکت ذره از نقطه (x_0, y_0, z_0) ، که بردار مکان \mathbf{r}_0 تعریف می‌شود، شروع می‌شود و به نقطه (x, y, z) ، که با بردار مکان \mathbf{r} تعریف می‌شود، ختم می‌شود. F_x ، F_y ، و F_z مؤلفه‌های نیروی پایستار $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \mathbf{F}(x, y, z)$ ‌اند.

تعمیم معادله ۱۲ به حرکت سه بعدی چنین است

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = \frac{1}{2}mv_0^2 + U(x_0, y_0, z_0) \quad (25)$$

یا، با نماد برداری

$$\frac{1}{2}m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}m\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 + U(\mathbf{r}_0) \quad (26)$$

که در آن $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2 = v^2$ و $\mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{v}_0 = v_{0x}^2 + v_{0y}^2 + v_{0z}^2 = v_0^2$ است. معادله ۲۵ را، بر حسب انرژی مکانیکی E ، می‌شود به صورت زیر نوشت

$$\frac{1}{2}mv^2 + U(x, y, z) = E$$

۱a برابر است با

$$W_{1a} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int F_x dx + \int F_y dy \\ = \int (-ky) dx + \int (-kx) dy$$

در مسیر ۱a، $y = 0$ و $dy = 0$ است. پس هر دو انتگرال بالا صفرند و $W_{1a} = 0$ می‌شود. در مسیر ۱b، $ds = dy \mathbf{j}$ و $x = a$ است، پس

$$W_{1b} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx) dy \\ = (-ka) \int_0^b dy = -kab$$

بنابراین، کل کار در مسیر ۱ برابر است با

$$W_1 = W_{1a} + W_{1b} = -kab$$

در مسیر ۲ هم به همین ترتیب عمل می‌کنیم

$$W_{2a} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{y=0}^{y=b} (-kx) dy = 0 \\ W_{2b} = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{x=0}^{x=a} (-ky) dx \\ = (-kb) \int_0^a dx = -kab$$

در مسیر ۳، $ds = dx \mathbf{i} + dy \mathbf{j}$ است، و خواهیم داشت

$$W_2 = \int \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int (-ky dx - kx dy)$$

اگر متغیر r را روی پاره‌خطی بگیریم که از $(0, 0)$ شروع می‌شود و به (a, b) ختم می‌شود، $y = r \sin \phi$ و $dy = dr \sin \phi$ است (ϕ در راستای این خط ثابت است). همچنین $x = r \cos \phi$ و $dx = dr \cos \phi$ است. r را متغیر انتگرال‌گیری انتخاب می‌کنیم. مقدار r از 0 در مبدأ، تا $d = (a^2 + b^2)^{1/2}$ در نقطه (a, b) ، تغییر می‌کند. به این ترتیب، انتگرال مربوط به W_2 به صورت زیر در می‌آید

$$W_2 = \int_0^d [-k(r \sin \phi)(dr \cos \phi) \\ - k(r \cos \phi)(dr \sin \phi)] \\ = -2k \sin \phi \cos \phi \int_0^d r dr = -kd^2 \sin \phi \cos \phi$$

با توجه به اینکه $\sin \phi = b/d$ و $\cos \phi = a/d$ است، در رابطه بالا $W_2 = -kab$ می‌شود. بنابراین، $W_1 = W_2 = W_3$. این نتیجه ثابت نمی‌کند که \mathbf{F} حتماً پایستار است (برای اثبات این موضوع باید کار را برای همه مسیرهای بین این دو نقطه حساب کرد)، اما تا حدود زیادی اطمینان می‌دهد که \mathbf{F}

(ب) انرژی پتانسیل را می‌شود از معادله ۲۴ به دست آورد، و در واقع قبلاً آن‌را، با محاسبه کار در مسیر ۳، عملاً به دست آورده‌ایم. تنها تفاوت در این است که، به جای (a, b) ، باید تا نقطه دلخواه (x, y) انتگرال بگیریم. کافی است اسم نقطه (a, b) را (x, y) بگذاریم، نتیجه می‌شود

$$\Delta U = U(x, y) - U(0, 0) = -W = kxy$$

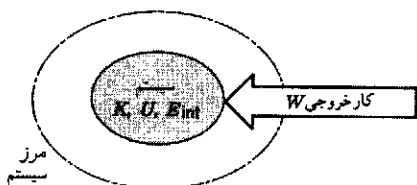
که در آن فرض کرده‌ایم $U(0, 0) = 0$. باید بتوانید نشان بدهید که می‌توانیم معادله ۲۷ را برای این تابع انرژی پتانسیل به کار ببریم و نیروی $\mathbf{F}(x, y)$ را پیدا کنیم.

اگر این نیرو را کمی تغییر بدهیم، چنان‌که $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 x \mathbf{j}$ شود، از روش قسمت (الف) معلوم می‌شود که این نیرو در مورد $k_1 \neq k_2$ پایستار نیست (مسئله ۴۶). حتی اگر $k_1 = -k_2$ باشد هم، این نیرو همچنان ناپایستار است. چنین نیرویی کاربرد مهمی در کانونی کردن مغناطیسی ذرات باردار دارد، اما نمی‌شود آن‌را با یک تابع انرژی پتانسیل نشان داد، چون پایستار نیست.

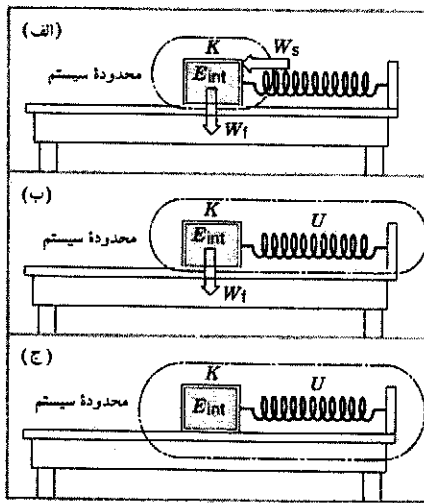
۸-۶ پایستگی انرژی در دستگاه ذرات

اگر جسمی با یک یا چند جسم در محیط خودش برهم‌کنش کند، می‌توانیم سیستم را متشکل از هر چند تا جسم که بخواهیم تعریف کنیم. سیستم را هر طور که تعریف کنیم، پایستگی انرژی برقرار خواهد بود، به شرط آنکه در این سیستم همه انرژیها و انتقالهای انرژی میان سیستم و محیط را کاملاً در نظر بگیریم.

شکل ۱۳ سیستم دلخواهی را نشان می‌دهد که دور آن یک منحنی بسته فرضی به نام مرز سیستم رسم شده است. سیستم محصور در منحنی انرژی‌ای دارد که می‌تواند شامل اشکال مختلف انرژی باشد؛ بعضی از این اشکال را روی شکل مشخص کرده‌ایم، انرژی جنبشی K ، انرژی پتانسیل U ، و انرژی داخلی E_{int} . در اینجا U به معنی انرژی پتانسیل ناشی از برهم‌کنش اجزای مختلف سیستم با هم است؛ برهم‌کنشهای اجزای سیستم با محیط، نه برحسب تغییر انرژیهای



شکل ۱۳. یک سیستم محصور در مرز، با انرژی جنبشی K ، انرژی پتانسیل U (تنها مربوط به برهم‌کنش اجزای سیستم با یکدیگر)، و انرژی داخلی E_{int} . محط مستعد با انجام کار خارجی W ، با سیستم انرژی مبادله کند.



شکل ۱۴. جسمی، تحت تأثیر فزری، روی میزی حرکت می‌کند؛ میز به آن نیروی اصطکاک وارد می‌کند. (الف) سیستم فقط شامل جسم است؛ نیروی فزر و نیروی اصطکاک روی سیستم کار انجام می‌دهند، و انرژی آن را تغییر می‌دهند. (ب) در این مورد، سیستم شامل جسم و فزر است، و هم انرژی جنبشی دارد هم انرژی پتانسیل. (ج) در این مورد، سیستم شامل میز هم هست. نیروی اصطکاک، در اینجا، یک نیروی داخلی است و در انرژی داخلی سیستم مؤثر است.

نوشته می‌شود

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W_f \quad (30)$$

انرژی سیستم، در این حالت $U + K + E_{int}$ است؛ در این مورد، انتقال انرژی بین فزر و جسم، تغییری در انرژی سیستم ایجاد نمی‌کند. نیروی فزر یک نیروی داخلی است که می‌تواند انرژی را، در داخل سیستم، از یک شکل به شکلی دیگر تبدیل کند ($U \leftrightarrow K$)، اما نمی‌تواند کل انرژی سیستم را تغییر بدهد. کار منفی اصطکاک سطح افقی می‌تواند انرژی سیستم را تغییر بدهد.

سرانجام، این بار سیستم را چنان تعریف می‌کنیم که میز را هم در بر بگیرد (شکل ۱۴ ج). در این مورد هیچ نیروی خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، وجود ندارد که بتواند به داخل مرزهای سیستم انرژی منتقل کند. با این تعریف برای سیستم، کار خارجی صفر است؛ پس

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = 0 \quad (31)$$

در این مورد، نیروی اصطکاک هم، مثل نیروی فزر، یک نیروی داخلی است. انرژی، در داخل سیستم، می‌تواند از شکل انرژی مکانیکی $U + K$ متعلق به مجموعه فزر-جسم، به انرژی داخلی مجموعه میز-جسم تبدیل شود، اما انرژی کل (مکانیکی + درونی) ثابت می‌ماند. مثلاً فرض کنید جسم را، در حالتی که فزر فشرده شده است، از حالت سکون رها کنیم

پتانسیل، بلکه برحسب کار (خارجی) W نشان داده شده‌اند. بعداً، در همین بخش، تعریف دقیقی از انرژی داخلی، برحسب انرژیهای جنبشی و پتانسیل میکروسکوپی یک مولکولهای سازنده اجزای سیستم، ارائه می‌کنیم. مثالهایی از تغییرات انرژی داخلی عبارت‌اند از تغییر آرایش مولکولهای سیستم (مثلاً جوشهای میکروسکوپی ناشی از اصطکاک لغزشی) و تغییر سرعت مولکولهای سیستم که به صورت تغییر دما ظاهر می‌شود. (دما را در فصل ۲۲ بررسی می‌کنیم و در فصل ۲۳ آن را به انرژی درونی مربوط می‌کنیم.)

انرژی سیستم، با کاری که محیط روی آن انجام می‌دهد، می‌تواند تغییر کند؛ شکل ۱۳ نمایش این موضوع است. (کار داخلی‌ای که بخشی از سیستم بر بخشی دیگر، درون مرزهای سیستم، انجام می‌دهد انرژی کل را تغییر نمی‌دهد، فقط می‌تواند انرژی را از شکلی به شکلی دیگر تبدیل کند؛ مثلاً از انرژی پتانسیل به انرژی جنبشی.) بنابراین، رابطه پایستگی انرژی سیستم را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta U + \Delta K + \Delta E_{int} = W \quad (28)$$

که در آن، W کار خارجی همه نیروهایی است که محیط از طریق آنها روی سیستم عمل می‌کند.

شکل ۱۳، همچنین قرارداد مهم علامت کار خارجی را نشان می‌دهد. کار مثبت محیط روی سیستم، انرژی سیستم را زیاد می‌کند. کار منفی محیط روی سیستم (که با کار مثبت سیستم بر محیط هم‌ارز است) انرژی سیستم را کم می‌کند.

این اصول را با بررسی سیستم جسم-فزر شکل ۱ نشان می‌دهیم؛ در اینجا فرض می‌کنیم که بین جسم و میزی که جسم بر آن می‌لغزد اصطکاک وجود دارد. ابتدا سیستم را خود جسم تعریف می‌کنیم (شکل ۱۴ الف). شکل دو انتقال انرژی به داخل مرزهای سیستم را نشان می‌دهد: کار پایستار مثبت W_s که فزر روی جسم انجام می‌دهد و کار ناپایستار منفی W_f که نیروی اصطکاک روی جسم انجام می‌دهد. برای این سیستم، پایستگی انرژی را می‌شود چنین نوشت

$$\Delta K + \Delta E_{int} = W_s + W_f \quad (29)$$

در این مورد ΔU صفر است، زیرا انرژی پتانسیل سیستم داخل مرز تغییری نمی‌کند. فزر جزء سیستم نیست، پس انرژی پتانسیل فزر به حساب نمی‌آید؛ در مقابل، فزر بخشی از محیط است و روی سیستم کار پایستار W_s را انجام می‌دهد. به جهت پیکانه‌های شکل ۱۴ الف، که انتقال انرژی را نشان می‌دهند توجه کنید؛ معادله ۲۹ نشان می‌دهد که کار مثبت فزر (که فرض کرده‌ایم نسبت به طول طبیعی‌اش فشرده شده است) انرژی جسم را زیاد می‌کند، و کار منفی سطح افقی، انرژی جسم را کم می‌کند. حالا سیستم را متشکل از جسم و فزر در نظر بگیرید (شکل ۱۴ ب) این سیستم جدید انرژی پتانسیل دارد، که مربوط به نیروی فزر است. نیروی اصطکاک تنها نیروی خارجی‌ای است که روی سیستم کار انجام می‌دهد. با این تعریف جدید سیستم، پایستگی انرژی به صورت زیر

باشد. تجربه نشان می‌دهد که انرژی الکترون کمتر از این مقدار است. پیشنهادهای زیادی برای توجیه این انرژی "گمشده" مطرح شد. یکی از پیشنهادها این بود که الکترون، پس از خروج از هسته به الکترونهاي عادی اتم برمی‌خورد و بخشی از انرژی‌اش را، در این برخوردها از دست می‌دهد. اگر چنین چیزی درست می‌بود، می‌بایست طی این فرایند انرژی داخلی سیستم شامل الکترونهاي گسیلیده و اتمهای واپاشیده زیاد می‌شد، و این افزایش انرژی داخلی می‌بایست به شکل افزایش دمای نمونه پرتوزا ظاهر می‌شد. اما آزمایشهای دقیقی که در این مورد انجام شد، چنین افزایشی را نشان نداد، و این فرضیه رد شد. در سال ۱۹۳۰ ولفگانگ پاؤلی، فیزیکدان سوئیسی، فرضیه درست را ارائه کرد. پاؤلی اظهار کرد که در واپاشی بتایی، علاوه بر الکترون، ذره دیگری هم گسیل می‌شود که حامل انرژی "گمشده" است. معلوم شد که این ذره، که آن را نوترینو نامیده‌اند، بسیار غریب است. فرضیه پاؤلی به سرعت، با روشهای غیرمستقیم، تأیید شد. اما ۲۵ سال طول کشید تا نوترینو مستقیماً مشاهده شود. این پیش‌بینی وجود نوترینو، که براساس اطمینان به پایستگی انرژی بود، نقش مهمی در پیشرفت فیزیک ذرات بنیادی در دهه‌های بعدی داشت. نوترینو یکی از اساسی‌ترین ذرات بنیادی است که با بررسی خواص و برهم‌کنشهای آن با ذرات دیگر، درک بیشتر و بهتری از ساختار درونی ماده فراهم آمده است.

مثال ۶. توپ بیسبالی به جرم $m = 0.143 \text{ kg}$ از بالای برج سیرز به ارتفاع h برابر با 44.3 m (یعنی 145 ft) رها می‌شود، و به سرعت حدی $v = 42 \text{ m/s}$ می‌رسد (بخش ۶-۷). تغییر انرژی داخلی توپ و هوای اطراف آن، هنگامی که توپ به زمین رسیده است، چقدر است؟ حل: سیستم را شامل توپ بیسبال، هوای اطراف آن، و زمین می‌گیریم. هیچ نیروی خارجی به سیستم وارد نمی‌شود؛ جاذبه گرانش زمین بر توپ و نیروی اصطکاک هوا بر توپ، هر دو نیروهای داخلی این سیستم‌اند. تغییر انرژی پتانسیل سیستم برابر است با

$$\Delta U = U_f - U_i = 0 - mgh \\ = -(0.143 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2)(44.3 \text{ m}) = -621 \text{ J}$$

تغییر انرژی جنبشی، طی سقوط توپ، برابر است با

$$\Delta K = K_f - K_i = \frac{1}{2}mv^2 - 0 \\ = \frac{1}{2}(0.143 \text{ kg})(42 \text{ m/s})^2 = 126 \text{ J}$$

(از حرکت زمین در اثر جاذبه گرانشی توپ چشم پوشیده‌ایم.) طبق معادله ۲۸، پایستگی انرژی را می‌توان چنین نوشت، $\Delta U + \Delta K + \Delta E_{\text{int}} = 0$ ، زیرا کار خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود. از این رابطه معلوم می‌شود که

$$\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U - \Delta K = -(-621 \text{ J}) - 126 \text{ J} = -495 \text{ J}$$

جسم روی میز می‌لغزد و سرانجام متوقف می‌شود. در این حالت، $\Delta K = 0$ است (زیرا $K_f = K_i = 0$)؛ پس، $\Delta E_{\text{int}} = -\Delta U$. اتلاف انرژی پتانسیل اولیه سیستم، موجب افزایش انرژی داخلی آن می‌شود. از این تحلیل نمی‌توانیم تغییرات انرژی داخلی جسم و میز را، به‌طور جداگانه به‌دست بیاوریم؛ فقط می‌توانیم کل تغییر انرژی داخلی سیستم را محاسبه کنیم.

نیروی اصطکاک نمونه‌ای از نیروهای ناپایستار اتلاfi است. در یک سیستم مکانیکی بسته، از نوعی که در اینجا توصیف شد، نیروی اصطکاک باعث می‌شود که انرژی مکانیکی به انرژی داخلی تبدیل شود. در اینجا انرژی مکانیکی پایسته نیست، و اتلاف انرژی مکانیکی با همان مقدار افزایش انرژی داخلی جبران می‌شود. (همه نیروهای ناپایستار هم تلف‌کننده نیستند، بعضی از نیروهای ناپایستار، مثلاً نیروی مغناطیسی، می‌توانند انرژی مکانیکی سیستم را افزایش بدهند. حتی نیروی اصطکاک هم، تحت شرایطی، می‌تواند باعث افزایش انرژی مکانیکی سیستم شود. آیا می‌توانید برای این مورد اخیر مثالی بزنید؟) توجه کنید که در مثالهای بالا انرژی پتانسیل ماکروسکوپی یک فنر را به شکل یک جمله مجزا نوشته‌ایم. می‌توانستیم انرژی ذخیره شده در فنر را هم جزء انرژی داخلی سیستم به حساب بیاوریم، اما برای سادگی ترجیح داده‌ایم که جملات ماکروسکوپی را که به‌راحتی می‌شود منشأ آنها را پیدا کرد، جدا کنیم؛ به این ترتیب، E_{int} شامل بقیه جملات میکروسکوپی است، که در U گنجانده نشده‌اند؛ یعنی بازآرایی مولکولهای فنر در U گنجانده شده است، ولی بازآرایی مولکولهای جسم و میز در E_{int} گنجانده شده است. این تقسیم‌بندی کم‌وبیش دلخواه، تنها برای ساده کردن توصیف این سیستم خاص است.

معادله ۲۸، نخستین گام در گذار از قانون پایستگی انرژی مکانیکی به قانون کلی پایستگی انرژی است. این قانون، به زبان غیر ریاضی می‌گوید که

در یک سیستم بسته، انرژی می‌تواند از شکلی به شکلی دیگر تبدیل شود، اما نمی‌تواند خلق شود یا از بین برود؛ کل انرژی سیستم ثابت می‌ماند.

منظور از "بسته بودن" سیستم آن است که هیچ کار خارجی‌ای، چه پایستار چه ناپایستار، روی سیستم انجام نمی‌شود. این بیان پایستگی انرژی، تعمیمی از تجربه است، و تا کنون هیچ آزمایش یا مشاهده‌ای آن را نقض نکرده است.

در تاریخ فیزیک، گاهگاهی به‌نظر آمده است که این قانون نقض می‌شود، اما این نقض ظاهری موجب شده است به دنبال شکل جدیدی از انرژی بگردیم تا با گنجاندن آن در قانون کلی‌تری از پایستگی انرژی بتوانیم مشاهده را توضیح بدهیم. مثلاً در دهه ۱۹۲۰ بررسیهای تجربی زیادی درباره واپاشی بتایی هسته‌ها انجام شد؛ در این نوع واپاشی پرتوزا، هسته اتم الکترون می‌گسیلد، براساس انرژی هسته، پیش از واپاشی و پس از آن، انتظار می‌رود که الکترون گسیل

(ب) $\Delta K'$ را تغییر انرژی جنبشی، از شروع حرکت جسم از پایین سطح شیبدار تا بازگشت جسم به همان نقطه، می‌گیریم، تغییر انرژی پتانسیل در این مسیر، یعنی $\Delta U'$ ، صفر است. از معادله ۲۸ نتیجه می‌شود

$$\Delta K' = -\Delta U' + (-\Delta E'_{\text{int}} + W'_f)$$

مقدار کمیت درون پرانتز برابر با $-46\text{J} = -23\text{J}$ است، زیرا فرض بر این است که اتلاف انرژی مکانیکی در برگشت، برابر با اتلاف انرژی مکانیکی در رفت است. پس، $\Delta K' = K_f - K_i = -46\text{J}$ ، و انرژی جنبشی در پایین سطح شیبدار برابر است با

$$K_f = 56\text{J} - 46\text{J} = 10\text{J}$$

سرعت جسم به صورت زیر به دست می‌آید

$$v_f = \sqrt{\frac{2K_f}{m}} = \sqrt{\frac{2(10\text{J})}{4.5\text{kg}}} = 2.1\text{m/s}$$

اساس میکروسکوپی انرژی داخلی (اختیاری)

جسمی را، که می‌تواند جسم مثال قبل در حرکت بر سطح شیبدار یا توپ مثال ۶ باشد، در نظر بگیرید. قضیه کارانرژی را برای یک ذره خاص (مثلاً یک اتم) در این سیستم مرکب می‌توانیم به شکل $\Delta K_i = W_i$ بنویسیم؛ که شاخص i یکی از N ذره تشکیل‌دهنده جسم را مشخص می‌کند. W_i به معنی کل کار حاصل از همه نیروهای وارد بر این ذره است. می‌شود قضیه کارانرژی را جداگانه برای هر ذره نوشت و N معادله حاصل را با هم جمع کرد. نتیجه خواهد شد

$$\Sigma \Delta K_i = \Sigma W_i \quad (32)$$

که در آن، شاخص i از ۱ تا N تغییر می‌کند. در طرف راست معادله ۳۲، کل کار انجام شده بر جسم را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: $\Sigma W_i = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}}$. جمله W_{int} شامل کار نیروهای داخلی است که آنها یا مولکولهای جسم بر یکدیگر وارد می‌کنند، و جمله W_{ext} شامل کار همه نیروهای خارجی است. در طرف چپ معادله ۳۲ هم، کل انرژی جنبشی را به دو بخش تقسیم می‌کنیم: یکی K ، که نشان‌دهنده حرکت انتقالی کل جسم است، دیگری K_{int} که نماینده مجموع حرکت‌های کتره‌ای داخلی آنها و مولکولهای جسم است. (چگونگی این تقسیم را در فصل ۹، در بررسی حرکت مرکز جرم، توضیح می‌دهیم؛ فعلاً فقط فرض می‌کنیم که چنین تقسیمی ممکن است.) پس می‌توانیم معادله ۳۲ را چنین بنویسیم

$$\Delta K + \Delta K_{\text{int}} = W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} \quad (33)$$

این افزایش انرژی داخلی، می‌تواند به صورت افزایش دمای توپ و هوای اطراف آن، یا شاید به صورت انرژی جنبشی هوای واقع شده در مسیر توپ افتان، ظاهر شود. تنها با معادله ۲۸ نمی‌شود گفت که انرژی به کدام یک از این شکلها در می‌آید. برای این کار، باید توپ یا هوا را جدا کنیم و به عنوان سیستم در نظر بگیریم و کاری را که نیروهای خارجی روی این سیستم انجام می‌دهد حساب کنیم. به علاوه باید نیروی اصطکاک بین توپ و هوا، و همچنین جزئیات حرکت توپ را بدانیم؛ خلاصه، اوضاع پیچیده‌تر از آن می‌شود که اینجا به آن بپردازیم. در این مسئله فرض کردیم که افزایش انرژی داخلی، در سیستمی که تعریف کردیم باقی می‌ماند. در عمل، اختلاف دمای توپ یا هوا با محیط اطرافشان منجر به نوع دیگری از انتقال انرژی می‌شود که آن را گرما می‌نامند (گرما را در فصل ۲۵ مطالعه خواهیم کرد).

مثال ۷. جسمی به جرم 4.5kg ، با سرعت اولیه $v = 5.0\text{m/s}$ روی سطح شیبداری با زاویه 30° به طرف بالای سطح پرتاب می‌شود. مشاهده می‌شود که جسم سرعتش به تدریج کم می‌شود و پس از پیمودن مسافت $d = 1.5\text{m}$ روی سطح شیبدار به حالت سکون (لحظه‌ای) می‌رسد. (الف) این جسم، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست می‌دهد؟ (ب) جسم، از حالت سکون، دوباره شروع به حرکت می‌کند و به پایین سطح شیبدار برمی‌گردد. با فرض اینکه اتلاف انرژی مکانیکی در اثر اصطکاک در این مرحله هم به اندازه مرحله قبلی باشد، جسم با چه سرعتی به نقطه آغاز حرکت برمی‌گردد؟ حل: (الف) اینجا هم، مثل مثال ۶، از تغییرات انرژی زمین چشم می‌پوشیم و فقط تغییر انرژی جنبشی جسم را در نظر می‌گیریم. تغییر انرژی پتانسیل برابر است با

$$\Delta U = U_f - U_i = mgh = 0$$

$$= (4.5\text{kg})(9.8\text{m/s}^2)(1.5\text{m})(\sin 30^\circ) = 33\text{J}$$

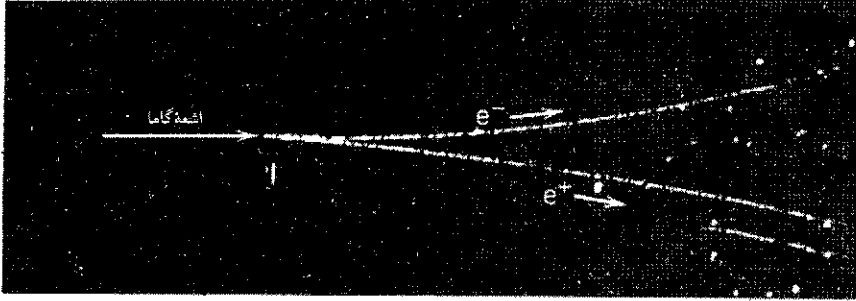
تغییر انرژی جنبشی، از پایین سطح شیبدار تا بالای آن، برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = 0 - \frac{1}{2}mv^2 \\ &= -\frac{1}{2}(4.5\text{kg})(5.0\text{m/s})^2 = -56\text{J} \end{aligned}$$

تغییر انرژی مکانیکی برابر است با

$$\Delta E = \Delta U + \Delta K = 33\text{J} - 56\text{J} = -23\text{J}$$

توجه کنید که، طبق معادله ۲۸، این اتلاف انرژی مکانیکی را می‌شود به صورت $-\Delta E_{\text{int}} + W_f$ نوشت. در اینجا ΔE_{int} کمیتی مثبت است که افزایش انرژی داخلی جسم را (نه جسم + سطح شیبدار) را نشان می‌دهد؛ W_f کار خارجی (منفی‌ای) است که نیروی اصطکاک بر سطح شیبدار روی جسم انجام می‌دهد. بدون داشتن اطلاعات اضافی نمی‌شود این دو کمیت را جداگانه حساب کرد.



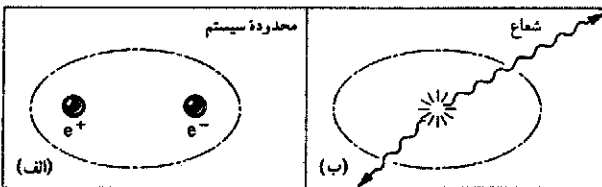
شکل ۱۵. انرژی تابش گاما به یک پوزیترون و یک الکترون تبدیل شده است. این دو ذره در اتاقک حبابی که در آن تولید شده‌اند ردهای مرئی از خودشان به جا می‌گذارند. ردها خمیده‌اند زیرا یک میدان مغناطیسی قوی در اتاقک نیروی تولید می‌کند که همواره بر سرعت ذرات عمود است، اما جهت آن در مورد الکترون و پوزیترون (که بار مخالف دارند) در دو جهت مخالف یکدیگر است.

می‌رسند و نابود می‌شوند و تابش حاصل، از مرزهای سیستم خارج می‌شود (شکل ۱۶ ب). با اندازه‌گیریهای مناسب در محیط، می‌توانیم انرژی تابش خارج شده از سیستم را تعیین کنیم؛ نتیجه می‌شود که در هر رویداد نابودی، تابش به اندازه $22\text{MeV} \times 10^6$ انرژی از سیستم خارج می‌کند. هنگامی که اتمهای محیط این تابش را جذب می‌کنند، نیروهای الکترومغناطیسی وابسته به تابش $22\text{MeV} \times 10^6$ کار روی محیط انجام می‌دهند. معادله ۲۸ نشاندهنده کاری است که محیط روی سیستم انجام می‌دهد، پس در این مورد محیط کار منفی، به مقدار $22\text{MeV} \times 10^6 -$ ، روی سیستم انجام داده است.

اگر معادله ۲۸ را برای این سیستم به کار ببریم، می‌بینیم که پایستگی انرژی ظاهراً نقض می‌شود؛ طرف راست معادله برابر است با مقداری منفی، W ، اما تغییر انرژی در طرف چپ، که برای برقرار بودن تساوی لازم است، مشهود نیست. می‌شود مثلاً فرض کرد که انرژی داخلی سیستم به اندازه W کاهش پیدا کرده است، اما به هیچ وجه معلوم نیست که چه نوع انرژی داخلی‌ای در سیستم اولیه بوده که حالا در سیستم نهایی نیست.

حل این معما را می‌شود در معادله معروف آلبرت اینشتین، که جرم و انرژی را به هم مربوط می‌کند، پیدا کرد. اینشتین این معادله را در سال ۱۹۰۵، یعنی مدتها پیش از انجام آزمایشهایی از نوع نابودی الکترون-پوزیترون، پیشنهاد کرد

$$E_0 = mc^2 \quad (35)$$



شکل ۱۶. (الف) سیستمی شامل یک پوزیترون e^+ و یک الکترون e^- . (ب) پس از نابودی پوزیترون و الکترون، تابش حاصل، از مرز سیستم خارج می‌شود.

فرض بر آن است که در سطح میکروسکوپی همه نیروها پایستارند؛ بنابراین، به جای کل کار داخلی می‌توانیم انرژی پتانسیل کل بین اتمی یا بین مولکولی را بگذاریم: $W_{int} = -\Delta U - \Delta U_{int}$. این را می‌شد $-\Delta U_{int}$ نوشت، اما راحت‌تر است که بعضی از انرژیهای پتانسیل میکروسکوپی را که محاسبه‌شان ساده است، مثلاً انرژی پتانسیل فنر را، در جمله U بگنجانیم. با این جایگذاری، و با جابه‌جا کردن جملات، نتیجه می‌شود که

$$\Delta U + \Delta K + (\Delta U_{int} + \Delta K_{int}) = W_{ext} \quad (34)$$

با جایگذاری $\Delta E_{int} = \Delta U_{int} + \Delta K_{int}$ ، معادله ۲۸ به دست می‌آید. بنابراین، جمله انرژی مستقیماً از اعمال قضیه کار-انرژی، در شکل میکروسکوپی، بر اجسام، به دست می‌آید.

۷-۸ جرم و انرژی^۱ (اختیاری)

یکی از انواع معمولی پرتوزایی، که در آزمایشگاه به آسانی مشاهده می‌شود، گسیل پوزیترون است؛ در این فرایند، هسته اتم یک پوزیترون گسیل می‌کند؛ پوزیترون ذره‌ای با همان جرم الکترون است ولی بار الکتریکی مخالف (مثبت) دارد. هنگامی که پوزیترون به الکترونهای ماده معمولی برخورد می‌کند، فرایندی به نام نابودی الکترون-پوزیترون مشاهده می‌شود. در این فرایند، الکترون و پوزیترون هر دو ناپدید می‌شوند و به جایشان فقط تابش الکترومغناطیسی ظاهر می‌شود. این فرایند را می‌توانیم چنین نمایش بدهیم



که در آن e^+ و e^- ، به ترتیب، نشانه پوزیترون و الکترون‌اند. شکل ۱۵ فرایند معکوس این فرایند را نشان می‌دهد، که در آن تابش گاما به یک الکترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ این فرایند را تولید زوج می‌نامند.

سیستمی (مانند شکل ۱۶ الف)، را که شامل یک پوزیترون و یک الکترون است در نظر بگیرید؛ فرض کنید انرژی جنبشی این دو ذره بسیار کوچک و فاصله دو ذره آنقدر زیاد است که انرژی پتانسیل سیستم هم (که ناشی از نیروی الکترواستاتیکی میان ذرات است) قابل چشمپوشی است. سرانجام،

که در آن c سرعت نور است.^۱ این معادله می‌گوید که جرم شکلی از انرژی است، و ذره‌ای به جرم am انرژی سکون E_0 دارد که مقدار آن mc^2 است. این انرژی سکون را می‌توانیم انرژی داخلی اجسام ساکن تلقی کنیم. پس الکترون و پوزیترون، صرفاً به‌خاطر جرمشان، انرژی داخلی دارند. انرژی داخلی هر یک از این دو ذره را می‌توانیم به‌صورت زیر حساب کنیم:

$$E_0 = mc^2 = \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(3.00 \times 10^8 \text{m/s})^2}{1.60 \times 10^{-13} \text{J/MeV}} = 0.511 \text{MeV}$$

بنابراین، کل انرژی داخلی (انرژی سکون) این دو ذره $1.022 \text{MeV} = 2(0.511 \text{MeV})$ ، و تغییر انرژی سکون این سیستم برابر با $1.022 \text{MeV} - 1.022 \text{MeV}$ است. کار منفی انجام شده روی سیستم شکل ۱۶، معادل است با مقدار کاهش که در انرژی سکون سیستم پدید می‌آید. اگر انرژی سکون ذرات را هم به درستی در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که انرژی پایسته است.

از معادله ۳۵، ضمناً نتیجه می‌شود که هرگاه به جسم مادی ساکنی، به اندازه ΔE انرژی بیفزاییم، جرم آن را به اندازه $\Delta m = \Delta E/c^2$ زیاد کرده‌ایم. اگر فنری را فشرده کنیم و انرژی پتانسیل آن را به اندازه ΔU زیاد کنیم، جرم آن به اندازه $\Delta U/c^2$ زیاد می‌شود. اگر دمای جسمی را زیاد کنیم، تا انرژی داخلی آن به اندازه ΔE_{int} زیاد شود، جرم جسم را به اندازه $\Delta E_{\text{int}}/c^2$ زیاد کرده‌ایم. این تغییر جرمها، بسیار کوچک‌اند، و در مورد اجسام عادی، معمولاً خارج از توانایی ما برای سنجش جرم‌اند (زیرا c^2 عددی بسیار بزرگ است)؛ اما در واپاشیها و واکنشهای ذرات هسته‌ای و زیرهسته‌ای، تغییر نسبی جرم ممکن است به قدر کافی بزرگ و قابل سنجش باشد.

به‌این ترتیب، تغییر انرژی پتانسیل U و انرژی داخلی E_{int} سیستم در داخل مرزهای شکل ۱۳ را می‌شود به تغییر انرژی سکون E_0 سیستم مربوط کرد. در این صورت، معادله ۲۸ را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

$$\Delta E_0 + \Delta K = W \quad (36)$$

در اینجا W انرژی‌ای است (که به شکل کار) بین سیستم و محیط مبادله می‌شود. توجه کنید که طرف چپ معادله ۳۶ فقط دو جمله دارد: انرژی سکون (شامل همه انواع انرژی سیستمهای ساکن) و انرژی حرکتی (جنبشی). در مورد نابودی الکترون-پوزیترون (با $\Delta K = 0$)، معادله ۳۶ مستقیماً نشان می‌دهد که کار خارجی (منفی) مربوط به تابش، ناشی از کاهش انرژی سکون سیستم اولیه است.

حالا سیستم را در زمانی در نظر بگیرید که تابش گسیل شده است، اما هنوز محیط آن را جذب نکرده است؛ در این حالت، از معادله ۳۵ نتیجه دیگری هم به‌دست می‌آید. برای اینکه انرژی در این زمان میانی هم پایسته بماند، باید به تابش جرمی برابر با

پس نتیجه می‌شود که پایستگی انرژی با پایستگی جرم هم‌ارز است. چنانکه اینشتین نوشت: "در فیزیک پیش نسبیتی دو قانون پایستگی داریم که اهمیت بنیادی دارند؛ یکی قانون پایستگی انرژی و دیگری قانون پایستگی جرم، که در آنجا کاملاً مستقل از هم ظاهر شوند. نظریه نسبیت این دو را درهم می‌برد و به یک اصل تبدیل می‌کند."

معادله ۳۶ را می‌توانیم برای سیستمهای بسته دیگری هم که شامل ذرات و تابش باشند به‌کار ببریم. مثلاً خورشید را، به عنوان سیستم در نظر بگیرید. خورشید هر ثانیه $4 \times 10^{26} \text{J}$ انرژی تابش می‌کند. در اینجا هم، مثل مورد نابودی الکترون-پوزیترون، این انرژی تابشی را به کاهش انرژی سکون سیستم نسبت می‌دهیم؛ تغییر جرم متناظر با این تغییر انرژی سکون در هر ثانیه برابر است با^۱

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{-4 \times 10^{26} \text{J}}{(3 \times 10^8 \text{m/s})^2} = -4 \times 10^9 \text{kg}$$

این کاهش جرم، با استانداردهای معمولی، کاملاً قابل ملاحظه است اما در مقایسه با کل جرم خورشید ($2 \times 10^{30} \text{kg}$) بسیار کوچک است. در هر سال، جرم خورشید فقط به اندازه 6×10^{-14} برابر جرم کل آن کم می‌شود.

سیستم را ابرنواختر ۱۹۸۷ (شکل ۱۷) می‌گیریم و مرز را دور آن می‌کشیم. در ۴۰۰ سال گذشته، این اولین ابرنواختری است که با چشم غیرمسلح مشاهده شده است.^۲ ابرنواختر ستاره‌ای است که ذخیره سوخت گرما هسته‌ای‌اش را تمام کرده است و دارد به طرز چشمگیری منفجر می‌شود. گفته می‌شود که ابرنواختر ۱۹۸۷، طی زمانی در حدود ۱۰ ثانیه، در حدود ۱۰٪ انرژی سکون خودش را، که تقریباً معادل دو برابر جرم خورشید است، به تابش و دیگرانواع انرژی تبدیل کرده است. تغییر انرژی سکون متناظر با دو برابر جرم خورشید، می‌شود

$$\Delta E_0 = \Delta mc^2 = -2(2 \times 10^30 \text{kg})(3 \times 10^8 \text{m/s})^2 = -4 \times 10^{47} \text{J}$$

انرژی تابش شده در این ۱۰ ثانیه، متناظر با توان $4 \times 10^{26} \text{W}$ تقریباً برابر است با انرژی تابشی حاصل از کل ستاره‌های دیگر و کهکشانهایی که در جهان مرئی می‌بینیم!

۱. اگرچه فیزیکدانان نتایج محاسبات نسبیتی را می‌پذیرند، اما تعبیری از معادله ۳۵ که مورد قبول همه باشد وجود ندارد. رجوع کنید به "The Concept of Mass," Lev B. Okun, *Physics Today*, June 1989, p. 31.

۲. نگاه کنید به

"The Great Supernova of 1987", Stan Woosley and Tom Weaver, *Scientific American*, August 1989, p. 32.

چنین افزایش ناچیزی در جرم، کاملاً خارج از محدوده توانایی ما در اندازه‌گیری است.

مثال ۹. در آزمایشی که در سال ۱۹۸۹ در شتابدهنده خطی استانفورد انجام شد، ذرات Z^0 از برخورد سربه‌سر (باریکه‌ای از الکترون (و باریکه‌ای از) پوزیترون که انرژی جنبشی یکسان داشتند، تولید شد. انرژی جنبشی این دو پرتو حداقل باید چقدر باشد تا ذره Z^0 ، که انرژی سکون آن 91.2 GeV است، تولید شود ($1 \text{ GeV} = 10^9 \text{ eV}$)؟
حل: در اینجا هم، مثل مورد مثال ۸، فرض کنید که هیچ کار خارجی (یعنی تابشی) در فرایند قبل از برخورد یا پس از برخورد در میان نیست. تغییر انرژی سکون از حالت اولیه (یک الکترون و یک پوزیترون، هر یک با انرژی سکون 0.511 MeV) تا حالت نهایی (Z^0) برابر است با

$$\Delta E_0 = 91.2 \text{ GeV} - 2(0.511 \text{ MeV}) = 91.2 \text{ GeV}$$

می‌بینیم که در اینجا کل انرژی سکون الکترون و پوزیترون می‌بینیم ($0.511 \text{ MeV} = 0.000511 \text{ GeV}$) کاملاً قابل چشم‌پوشی است. از معادله ۳۶ نتیجه می‌شود که

$$\Delta K = -\Delta E_0 = -91.2 \text{ GeV} = K_f - K_i$$

اگر فرض کنیم Z^0 در حالت سکون تولید می‌شود، $K_f = 0$ است و بنابراین انرژی الکترون و پوزیترون باید هر یک $45.6 \text{ GeV} = 45.6(91.2 \text{ GeV})$ باشد. در این مثال، برخلاف مثال قبل، تغییر نسبی انرژی سکون (یا جرم) سیستم کاملاً چشمگیر است: جرم نهایی در حدود 10^{10} برابر جرم اولیه است.^۱

۸-۸ کوانتشن انرژی (اختیاری)

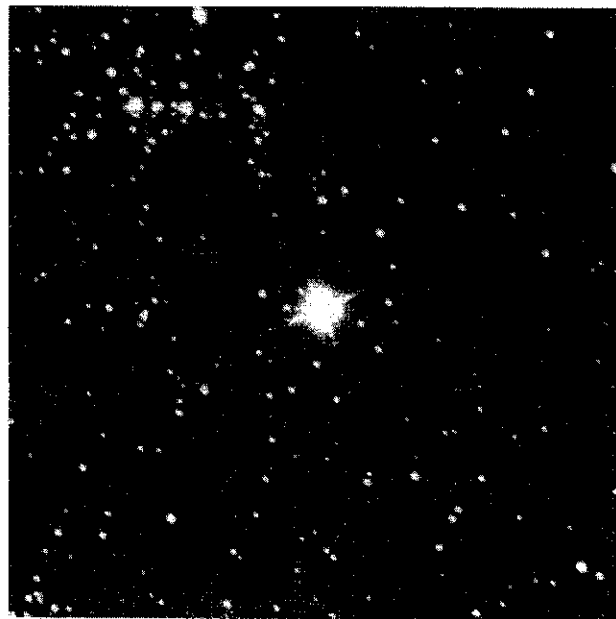
در بخش قبل دیدیم که چگونه پایستگی انرژی با نسبیت سازگار است: براساس نسبیت باید مفهوم انرژی را گسترش داد و انرژی سکون سیستم را هم وارد آن کرد تا پایستگی انرژی پا بر جا بماند. در اینجا پایستگی انرژی را در حالت حدی دیگری بررسی می‌کنیم: در حد کوانتومی سیستمهایی که در مقیاس اتمی یا هسته‌ای اند.

اگر به سیستم جسم-فنز مقداری انرژی اولیه بدهیم و آن را رها کنیم، سیستم به جلو و عقب نوسان خواهد کرد. اگر اصطکاک هم در کار باشد، حرکت به تدریج میرا می‌شود. افت انرژی سیستم در اثر کار خارجی نیروی اصطکاک، هموار و پیوسته به نظر می‌رسد.

اما حالا نوسانگری متشکل از یک مولکول دو اتمی را در نظر بگیرید: دو اتم که با یک نیروی فنروار به هم جفت شده‌اند. اگر به این

۱. نگاه کنید به

"The Stanford Linear Collider," John R. Rees, *Scientific American*, October 1989, p. 58.



شکل ۱۷. ابرنواختر ۱۹۸۷. نور این ستاره (در مرکز عکس) کاملاً نور ستاره‌های دیگر را تحت الشعاع قرار داده است.

مثال ۸. دو گلوله گلی، هر یک به جرم 35 g را به طرف هم پرتاب می‌کنیم. سرعت هر گلوله 1.7 m/s است. گلوله‌ها رودرو با هم برخورد می‌کنند و به هم می‌چسبند. جرم گلوله حاصل چقدر با مجموع جرم دو گلوله اولیه فرق دارد؟

حل: دو گلوله را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم و معادله ۳۶ را به کار می‌بریم. انرژی جنبشی این سیستم تغییر کرده است (و مقدار این تغییر منفی است): انرژی جنبشی پس از برخورد صفر است و پیش از برخورد K_i ، که برابر با مجموع انرژی جنبشی گلوله‌هاست. کار خارجی هم وجود ندارد، پس

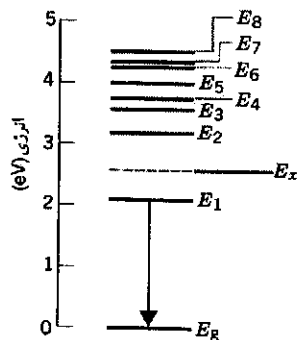
$$\Delta K + \Delta E_0 = (0 - K_i) + \Delta E_0 = 0$$

یا

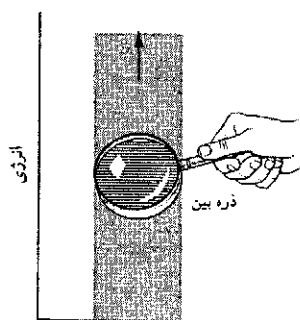
$$\Delta E_0 = K_i = 2 \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) = (0.035 \text{ kg})(1.7 \text{ m/s})^2 = 0.101 \text{ J}$$

این افزایش انرژی سکون می‌تواند به شکل انرژی داخلی باشد، و مثلاً موجب افزایش دمای سیستم مرکب شود. افزایش جرم متناظر با این افزایش انرژی برابر است با

$$\Delta m = \frac{\Delta E_0}{c^2} = \frac{0.101 \text{ J}}{(3.00 \times 10^8 \text{ m/s})^2} = 1.1 \times 10^{-18} \text{ kg}$$



شکل ۱۹. چند تراز انرژی اتم سدیم، متناظر با حالت‌های کوانتومی مختلفی که اتم می‌تواند در آنها باشد. پایین‌ترین حالت، E_g ، را حالت پایه می‌نامند. هنگامی که اتم از حالت انرژی E_1 به حالت پایه می‌رود (پیکان در شکل) نور زرد مشخصه سدیم را گسیل می‌کند. اتم فقط می‌تواند در حالت‌هایی که مشخص شده است باشد؛ یعنی انرژی آن مثلاً می‌تواند E_x ، بین E_1 و E_2 باشد.



شکل ۲۰. ترازهای انرژی یک آونگ هم کوانتیده‌اند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که با هیچ دقتی نمی‌شود از هم متمایزشان کرد. هیچ "ذره‌بینی" نمی‌تواند ساختار کوانتیده یک آونگ را آشکار کند.

مشخصه سدیم است (همان نوری که در لامپهای بخار سدیم دیده می‌شود).

شکل ۲۰ ساختار "کوانتیده" یک نوسانگر کلاسیک، مثلاً یک آونگ، را نشان می‌دهد، حالتهای ممکن است گسسته باشند، اما آنقدر به هم نزدیک‌اند که پرش بین آنها را می‌توان فرایندی پیوسته در نظر گرفت. فرض کنید فرکانس آونگ یک دور بر ثانیه باشد ($\nu = 1/s$). طبق معادله ۳۸، مقدار "کوانتوم انرژی" برابر است با

$$h\nu = (6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s})(1 \text{ s}^{-1}) = 6.63 \times 10^{-34} \text{ J}$$

این کمیت ناچیز فوق‌العاده کوچکتر از قدرت تفکیک ما در سنجش انرژی اجسام ماکروسکوپیک، مثل آونگ، است؛ بنابراین، ساختار گسسته مشاهده‌پذیر نیست. مثلاً در آونگ، این تغییر انرژی متناظر است با تغییر دامنه نوسان به مقداری از مرتبه 10^{-22} m ، یا در حدود $1/10^{22}$ برابر قطر اتم! پس می‌توانیم از رفتار کوانتومی اجسام عادی چشم‌پوشیم، بی‌آنکه خطایی کرده باشیم.

پایستگی انرژی در مقیاس میکروسکوپی را می‌توانیم با

سیستم انرژی بدهیم و بگذاریم که نوسان کند، خواهیم دید که تابش گسیل خواهد کرد و سرانجام، تا آنجا که بتواند، انرژی تلف خواهد کرد. اما این نوسانگر اتمی فرق مهمی با سیستم جسم-فشر دارد: در مقیاس اتمی، تغییرات حرکت پیوسته نیست، بلکه به شکل پرشهای گسسته است. پایستگی انرژی، در این مقیاس میکروسکوپی هم وجود دارد. اختلاف انرژی حالت اولیه و حالت نهایی برابر است با انرژی ΔE که تابش با خود می‌برد، یعنی

$$|\Delta E| = E_i - E_f \quad (37)$$

توجه کنید که اگر سیستم انرژی از دست بدهد، $E_i > E_f$ است. گسیل تابش در مقیاس اتمی گسسته است: فقط تغییر انرژیهای معینی هستند که مجازند، برخلاف موارد کلاسیک که در آنها می‌توانیم تغییر انرژی را متغیری پیوسته در نظر بگیریم. چنانکه در فصل ۴۹ خواهیم دید، تغییر انرژیهای مجاز یک نوسانگر، با فرکانس ν آن چنین رابطه‌ای دارند

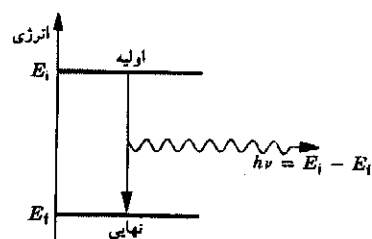
$$E_i - E_f = h\nu \quad (38)$$

که در آن، h ثابتی به نام ثابت پلانک است، به مقدار

$$\begin{aligned} h &= 6.63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} \\ &= 4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} \cdot \text{s} \end{aligned}$$

شکل ۱۸ نمایشی است از فرایندی که در آن سیستمی (مثلاً یک اتم یا هسته) از انرژی اولیه E_i به انرژی نهایی E_f می‌پرد، و تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد. این بسته گسسته انرژی را کوانتوم انرژی می‌نامند. و می‌گویند که حالت‌های انرژی کوانتیده‌اند، یعنی مقادیر گسسته معینی دارند.

شکل ۱۹ مثالی از چند حالت کوانتیده انرژی اتم سدیم را نشان می‌دهد. اتم می‌تواند در هر یک از این حالت‌های انرژی باشد، اما نمی‌تواند در حالتی میان این مقادیر باشد. چنین ساختاری موجب می‌شود که گسیل تابش از اتمها گسسته باشد؛ مثلاً هنگامی که اتم سدیم از حالت انرژی E_1 (نخستین حالت برانگیخته) به حالت E_g (حالت پایه) می‌جهد، نور زردی گسیل می‌کند که



شکل ۱۸. سیستمی از حالت اولیه‌اش تابشی با انرژی $h\nu$ می‌گسیلد و به حالت نهایی می‌رود.

۹. در مثال ۳ (شکل ۸) دیدیم که سرعت واگن تفریحی در پایین مسیر، به شکل مسیریستیگی ندارد. آیا اگر اصطکاک هم وجود داشت، این حرف می‌توانست درست باشد؟

۱۰. با در نظر گرفتن اینکه انرژی پتانسیل دو مولکول یکسان به فاصله بین مراکز آنها بستگی دارد، توضیح بدهید که چرا مایعی که به شکل لایه‌ای نازک است، انرژی پتانسیل بیشتری دارد تا مایعی با همان جرم که به شکل کره باشد.

۱۱. اینکه یک آونگ نوسان‌کننده سرانجام می‌ایستد، آیا قانون پایستگی انرژی مکانیکی را نقض می‌کند؟

۱۲. در یک مقاله علمی^۱ آمده است که حرکت در شکل راه رفتن و دویدن بازده خیلی کمی دارد، و بازده حرکت پرندگان، ماهیها، و دوچرخه‌سواران خیلی بیشتر است. آیا توضیحی برای این ادعا دارید؟

۱۳. اتومبیلی در بزرگراهی حرکت می‌کند. راننده ترمز می‌کند و اتومبیل روی جاده می‌لغزد تا بایستد. انرژی جنبشی اتلاف‌شده اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۴. در پرسش بالا، فرض کنید راننده چنان ترمز کند که اتومبیل نلغزد، در این مورد، انرژی جنبشی از دست رفته اتومبیل به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۱۵. اتومبیلی از حالت سکون شتاب می‌گیرد و به سرعت v می‌رسد، و طی این مدت چرخهای محرک آن نمی‌لغزند. انرژی مکانیکی اتومبیل از کجا می‌آید؟ مثلاً آیا می‌شود گفت که این انرژی از نیروی اصطکاک (ایستایی) جاده بر اتومبیل تأمین می‌شود؟

۱۶. در مورد کاری که در مقابل نیروی اصطکاک انجام می‌شود، تغییر انرژی داخلی مستقل از سرعت (یا چارچوب مرجع لخت) ناظر است. یعنی، مقدار انرژی مکانیکی تبدیل شده به انرژی داخلی در اثر اصطکاک، از دید ناظرهای مختلف یکسان است. این امر، با توجه به اینکه دو ناظر مختلف، در حالت کلی مقادیر مختلفی برای کار خالص و تغییر انرژی جنبشی به دست می‌آورند، چه توضیحی دارد؟

۱۷. چند مثال فیزیکی برای تعادل ناپایدار، تعادل خنثی، و تعادل پایدار بزنید.

۱۸. در مقاله‌ای^۲ آمده است: "جالب است بدانیم که همه انرژی ورودی سوخت، سرانجام به انرژی گرمایی تبدیل می‌شود و در اطراف مسیر اتومبیل پخش می‌شود." سازوکارهای متحمل این تبدیل را بررسی کنید؛ از جمله اصطکاک جاده، مقاومت هوا، ترمز، رادیوی اتومبیل، چراغهای اتومبیل، باتری، اتلاف درون موتور و اتلاف در سیستم حرکت‌دهنده، بوق، و غیره. فرض کنید که جاده مستقیم و افقی است.

مشاهده تابشی که از اتمها یا هسته‌ها، هنگام پرش از ترازى به تراز دیگر، گسیل می‌شود بیازماییم؛ چه در فرایند گسیل تابش (مثل شکل ۱۸) و چه در فرایند معکوس، که در آن اتمی که در حالت پایه (پایین‌ترین تراز انرژی) است یک کوانتوم تابش جذب می‌کند و به تراز بالاتری می‌جهد. آزمایشهایی از این نوع را، که شامل گسیل و جذب‌اند، می‌شود با دقتی فوق‌العاده انجام داد، دقتی از مرتبه ۱ قسمت در ۱۰^{۱۵} از اختلاف انرژی بین حالتها، هر آزمایشی از این نوع با پایستگی انرژی در این مقیاس میکروسکوپی سازگار بوده است.

پرسشها

۱. آسانسوری از طبقه بالای ساختمانی پایین می‌آید و متوقف می‌شود. انرژی پتانسیل آن چه می‌شود؟

۲. جاده‌های کوهستانی به ندرت مستقیماً بالا می‌روند، بلکه می‌پیچند و به تدریج بالا می‌روند. چرا؟

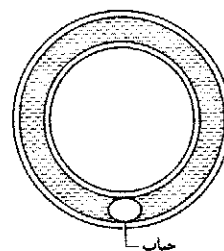
۳. بالشتکهای هوا احتمال صدمات ناشی از تصادف اتومبیل را به مقدار زیادی کم می‌کنند. برحسب انتقال انرژی توضیح بدهید که چرا. ۴. زمانی که در پرش با نیزه، نیزه فایبرگلاس جای نیزه چوبی را گرفت، تحولی در این رشته ایجاد شد. چرا؟

۵. جسمی را از دست رها می‌کنید و می‌بینید که به اندازه یک و نیم برابر ارتفاع اولیه‌اش از کف زمین وامی‌جهد. از این مشاهده چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

۶. تویی که به زمین می‌افتد نمی‌تواند به بالاتر از ارتفاع اولیه‌اش برگردد. اما قطره‌های آبی که از پایین آبشار به بالا می‌جهند، گاهی از بالاترین نقطه آبشار هم بالاتر می‌روند. چرا؟

۷. زمین لرزه‌های شدید می‌توانند چنان انرژی‌ای آزاد کنند که برای تخریب یک شهر کافی است. درست پیش از زمین لرزه، این انرژی کجا بوده است؟

۸. شکل ۲۱ یک لوله شیشه‌ای حلقوی را نشان می‌دهد که به دیواری نصب شده است. لوله پر از آب است و تنها یک حباب هوا دارد که در ته لوله در حالت سکون لحظه‌ای است. حرکت بعدی این حباب را برحسب انتقال انرژی توضیح بدهید. یک بار از نیروهای گرانشی و اصطکاک چشم ببوشید و یا بار آنها را کاملاً در نظر بگیرید.



شکل ۲۱. پرسش ۸

۱. نگاه کنید به

"The Energetic Cost of Moving About," V. A. Tucker, *American Scientist*, July-August 1975, p. 413.

2. "Energy and the Automobile," Gene Waring, *The Physics Teacher*, p. 494.

کافی حساس می‌بود، تغییر جرمی نشان می‌داد؟
۲۹. آیا در فیزیک کلاسیک (یعنی غیرکوانتومی) هم کمیت‌های کوانتیا موجود دارد؟ اگر دارد، مثالهایی بیاورید.

مسئله‌ها

بخش ۳-۸ سیستم‌های پایستار یک‌بعدی

۱. برای از کار انداختن موشک‌های بالیستیک در مراحل اولیه پرواز، یک "تفنگ الکترومغناطیسی" طراحی شده است که در ماهواره‌های زمینی مدار پایین سوار می‌شود. این تفنگ باید بتواند پرتابه‌ای به جرم 238kg را با سرعت 10^6 km/s پرتاب کند. انرژی جنبشی این پرتابه، حتی اگر ماده منفجره هم نداشته باشد. برای اینکه موشک را در اثر برخورد از کار بیندازد کافی است. (چنین سلاحی را سلاح "انرژی جنبشی" می‌نامند.) پرتابه به وسیله نیروهای الکترومغناطیسی شتاب می‌گیرد و به سرعت پرتاب می‌رسد. حالا فرض کنید می‌خواستیم این پرتابه را با استفاده از یک فنر پرتاب کنیم (سلاح "فیزی"). در این صورت، ثابت نیروی فنری که 1.47m فشرده شده است چقدر باید باشد تا بتواند پرتابه را به سرعت مورد نظر برساند.

۲. گفته می‌شود که از درختان خیلی بزرگ در هر روز ممکن است تا حدود 900 کیلوگرم آب تبخیر شود. این تبخیر در برگ‌ها صورت می‌گیرد. آب باید از ریشه درخت به برگ‌ها برسد. (الف) با فرض اینکه آب به طور متوسط 920 m از سطح زمین صعود کند. هر روز چقدر انرژی صرف این کار می‌شود؟ (ب) اگر فرض کنیم که تبخیر طی 12h روز انجام می‌شود، توان متوسط چقدر است؟

۳. ارتفاع قله اورست از سطح دریا 8850 m است. (الف) کوهنوردی به جرم 90 kg ، چقدر انرژی در مقابل گرانش مصرف می‌کند تا از سطح دریا به قله برسد؟ (ب) چند شکلات، هر یک با انرژی 300 kcal ، برای تأمین این انرژی لازم است؟ نتیجه شما باید نشان بدهد که کار لازم برای غلبه بر گرانش بخش بسیار کوچکی از انرژی‌ای است که در بالا رفتن از کوه مصرف می‌شود.

۴. مردی به وزن 220 lb از پنجره‌ای روی یک توری نجات می‌پرد که 36 ft پایین‌تر از او است. تور 4 ft کشیده می‌شود و به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد و بعد مرد را دوباره به هوا پرتاب می‌کند. با فرض اینکه هیچ انرژی‌ای در اثر نیروهای ناپایستار اتلاف نشود، انرژی پتانسیل تور کشیده شده چقدر است؟

۵. قطعه یخ بسیار کوچکی از لبه داخلی یک ظرف بدون اصطکاک به شکل نیمکره‌ای به شعاع 23.6 cm رها می‌شود (شکل ۲۳). سرعت

۱۹. منشأ هر چند تا از منابع انرژی فعلی را که می‌توانید به‌خوشید مربوط کنید. فکر می‌کنید منبعی وجود دارد که نشود آن را به‌خوشید مربوط کرد؟

۲۰. با استفاده از مفاهیم کار و انرژی، توضیح بدهید که چگونه کودکان می‌توانند تاب را از حالت سکون به حالت حرکت با دامنه‌ای بزرگ برسانند.

۲۱. دو قرص با فنری سخت به هم متصل‌اند. آیا می‌توان قرص بالایی را آنقدر به پایین فشرده که پس از رها شدن، به بالا بجهد و قرص پایینی را هم با خودش از روی میز بلند کند (شکل ۲۲)؟ آیا در این مورد انرژی مکانیکی می‌تواند پایسته بماند؟



شکل ۲۲. برش ۲۱

۲۲. درباره "پایستگی انرژی" که (الف) در این فصل به‌کار رفته است و (ب) در ارتباط با "بحران انرژی" (مثلاً خاموش کردن چراغها) بحث کنید. این دو مورد چه تفاوتی دارند.

۲۳. توان الکتریکی یک شهر کوچک از یک نیروگاه هیدروالکتریکی تأمین می‌شود، که بر رودخانه‌ای نزدیک شهر قرار دارد. اگر یک چراغ روشنایی را در این سیستم انرژی — بسته خاموش کنید، از پایستگی انرژی نتیجه می‌شود که همین مقدار انرژی، البته شاید به شکلی دیگر، باید در نقطه‌ای دیگر از سیستم ظاهر شود. این انرژی کجا و به چه شکلی ظاهر می‌شود؟

۲۴. فنری را تا آنجا که می‌شود فشرده می‌کنیم و در همین حال آن را محکم می‌بندیم بعد آن را در اسید می‌گذاریم تا حل شود. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر چه می‌شود؟

۲۵. عبارت $E_0 = mc^2$ نشان می‌دهد که اجسام کاملاً معمولی، مثل سکه یا سنگریزه مقادیر عظیمی انرژی دارند. چرا تا به حال به این منابع عظیم انرژی توجه نشده است؟

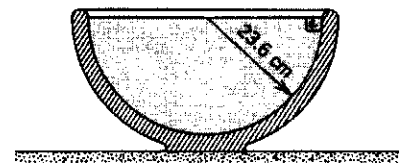
۲۶. "در انفجارهای هسته‌ای — به‌ازای جرم یکسان — در حدود یک میلیون بار بیش از انفجار شیمیایی انرژی آزاد می‌شود، زیرا انفجارهای هسته‌ای براساس رابطه $E_0 = mc^2$ عمل می‌کنند." درباره این گفته چه فکر می‌کنید؟

۲۷. چگونه جرم و انرژی می‌توانند "هم‌ارز" باشند، با وجودی که دو کمیت فیزیکی کاملاً متفاوت‌اند که به دو شکل متفاوت تعریف می‌شوند، و با دو یکای متفاوت سنجیده می‌شوند؟

۲۸. یک کره فلزی داغ را روی صفحه یک ترازو می‌گذاریم، کره سرد می‌شود. آیا اگر ترازو به‌اندازه

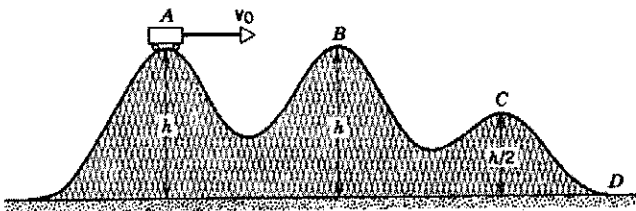
۱. نگاه کنید به

این قطعه یخ در پایین ظرف چقدر است؟



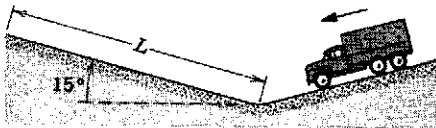
شکل ۲۳. مسئله ۵

مثل ذره در نظر بگیرید.



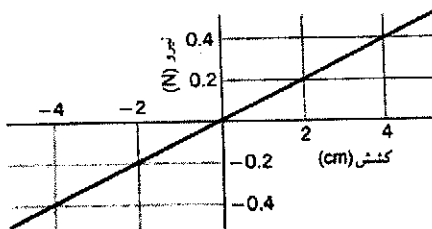
شکل ۲۵. مسئله ۱۰

۱۱. کامیونی که ترمزش بریده است، با سرعت 8 mi/h از تپه‌ای پایین می‌آید. خوشبختانه در پایین تپه یک شیب فرار اضطراری وجود دارد. زاویه این شیب 15° است (شکل ۲۶). حداقل طول شیب، L ، برای اینکه کامیون (لااقل به طور آبی) متوقف شود چقدر است؟



شکل ۲۶. مسئله ۱۱

۱۲. شکل ۲۷ نیرو (برحسب نیوتون) را به صورت تابعی از مقدار کشیدگی یا فشردگی (برحسب سانتی‌متر) فنر یک تفنگ چوب‌پنبه‌ای نشان می‌دهد. فنر به اندازه 5.5 cm فشرده می‌شود و چوب‌پنبه‌ای به جرم 38 g را از تفنگ پرتاب می‌کند. (الف) با فرض اینکه چوب‌پنبه در لحظه‌ای که فنر از حالت آزاد خودش می‌گذرد رها شود، سرعت آن چقدر خواهد بود؟ (ب) حالا فرض کنید که چوب‌پنبه به فنر گیر می‌کند و پس از آنکه فنر 1.5 cm از حالت آزاد خودش گذشت از آن جدا می‌شود. در این حالت سرعت چوب‌پنبه، هنگام رها شدن چقدر است؟

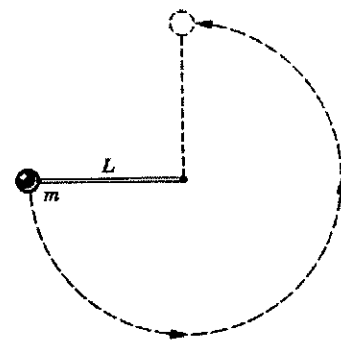


شکل ۲۷. مسئله ۱۲

۱۳. میله نازکی به طول $L = 2.13 \text{ m}$ و جرم قابل اغماض، از یک سر لولا شده است؛ چنانکه می‌تواند در صفحه قائم دوران کند. میله را به اندازه زاویه $\theta = 35^\circ$ از حالت قائم منحرف، و سپس رها می‌کنیم (شکل ۲۸). سرعت گلوله سربی سرآزاد میله، هنگام عبور از نقطه B ، (ب) در نقطه C ، و (ج) در نقطه D چقدر است؟

۶. جریانی از گدازه آتشفشانی روی یک سطح افقی در حال حرکت است که به یک سربالایی با شیب 10° می‌رسد. مشاهده می‌شود که گدازه 92 m روی شیب به طرف بالا حرکت می‌کند و سپس متوقف می‌شود. گدازه شامل گاز به دام افتاده است؛ بنابراین، اصطکاک آن با زمین آنقدر کم است که می‌شود از آن چشم پوشید. سرعت گدازه درست پیش از رسیدن به شیب، چقدر بوده است؟

۷. پرتابه‌ای به جرم 2.4 kg از بالای صخره‌ای به ارتفاع 125 m پرتاب می‌شود. سرعت اولیه آن 15 m/s در جهت 41° بالاتراز سطح افق است. (الف) انرژی جنبشی پرتابه در اولین لحظه پس از پرتاب و (ب) پتانسیل آن در این لحظه چقدر است؟ (ج) سرعت پرتابه، درست پیش از برخورد آن به زمین، چقدر است؟ کدام یک از جوابها به جرم پرتابه بستگی دارد؟ اصطکاک هوا را ناچیز بگیرید. ۸. گلوله‌ای به جرم m به یک سرب میله بسیار سبکی به طول L متصل است. سر دیگر میله لولا شده است، چنانکه گلوله می‌تواند در صفحه‌ای قائم حرکت کند. میله را به حالت افقی درمی‌آوریم و به گلوله ضربه‌ای به طرف پایین می‌زنیم. میله تاب می‌خورد و درست تا حالت قائم خودش را بالا می‌کشد (شکل ۲۴). سرعت اولیه گلوله چقدر بوده است؟

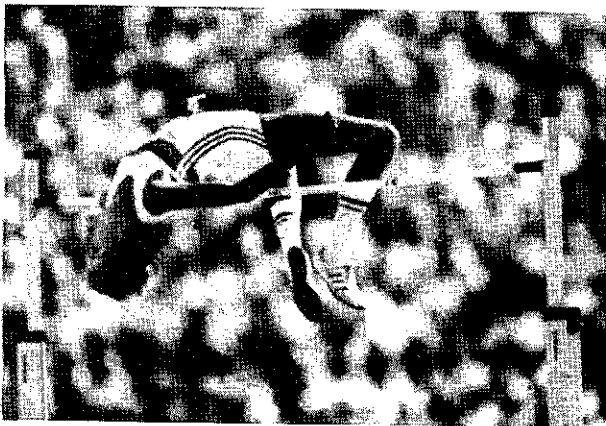


شکل ۲۴. مسئله‌های ۸ و ۳۸

۹. توپی به جرم 112 g ، با سرعت اولیه 8.16 m/s با زاویه 34° بالاتراز سطح افقی، از پنجره‌ای پرتاب می‌شود. با استفاده از پایستگی انرژی، (الف) انرژی جنبشی توپ در نقطه اوج مسیر و (ب) سرعت آن در ارتفاع 2.87 m پایین‌تر از پنجره را پیدا کنید. مقاومت هوا ناچیز است. ۱۰. یک ارابه تقریبی که روی ریلهای بدون اصطکاک است، با سرعت v_0 از نقطه A در شکل ۲۵ به راه می‌افتد، سرعت ارابه (الف) در نقطه B ، (ب) در نقطه C ، و (ج) در نقطه D چقدر است؟

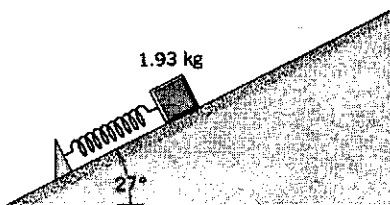
و انرژی پتانسیل را به صورت توابعی از (الف) زمان و (ب) ارتفاع تعیین کنید. این توابع را رسم کنید و نشان دهید که مجموع آنها انرژی کل در هر دو مورد ثابت است.

۱۸. در بازیهای المپیک ۱۹۸۴، پرنده آلمانی، اولریکه مایفارت، با پرش 2.02m ، یک رکورد المپیک برای پرش ارتفاع زنان برجای گذاشت (شکل ۳۰). با فرض یکسان بودن شرایط دیگر، این پرنده در کرة ماه چقدر می‌توانست بپرد؟ شتاب گرانش در سطح ماه فقط 1.67m/s^2 است. (راهنمایی: ارتفاعی که "به حساب می‌آید"، مسافت قائمی است که مرکز ثقل پرنده، پس از جدا شدن پاهایش از زمین، بالا می‌رود. فرض کنید که در لحظه جدا شدن پرنده از زمین، مرکز ثقل او 110cm بالاتر از سطح زمین باشد. همچنین فرض کنید که هنگام گذاشتن پرنده از میله، مرکز ثقلش در همان ارتفاع میله باشد.)



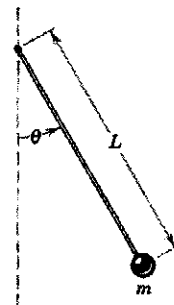
شکل ۳۰. مسئله ۱۸

۱۹. جسمی به جرم 1.93kg روی سطح شیبدار بی‌اصطکاک با زاویه شیب 27° ، به فنری تکیه دارد (شکل ۳۱). فنر را، که ثابت نیروی آن 208N/cm است، به اندازه 18.7cm می‌فشاریم، و جسم را رها می‌کنیم. جسم حداکثر به اندازه چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟ مکان نهایی را نسبت به مکان جسم، درست پیش از رها شدن، حساب کنید.



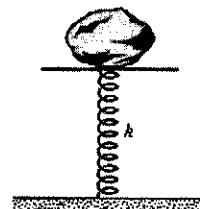
شکل ۳۱. مسئله ۱۹

۲۰. فنر ایده‌آل بدون جرمی در اثر نیروی 268N به اندازه 23.3cm فشرده می‌شود. جسمی به جرم $m = 318\text{kg}$ از بالای سطح شیبدار، از حالت سکون، رها می‌شود (شکل ۳۲). زاویه شیب سطح



شکل ۲۸. مسئله ۱۳

۱۴. شکل ۲۹ سنگی به جرم 794kg را نشان می‌دهد که روی فنری قرار دارد. فنر در اثر وزن سنگ به اندازه 10.2cm فشرده می‌شود. (الف) ثابت نیروی فنر را پیدا کنید. (ب) سنگ را 28.6cm دیگر هم به پایین فشار می‌دهیم و بعد رها می‌کنیم. انرژی پتانسیل ذخیره شده در فنر، درست پیش از برداشتن دست از روی سنگ، چقدر است؟ (ج) سنگ تا چه ارتفاعی، نسبت به این مکان جدید، بالا می‌رود؟



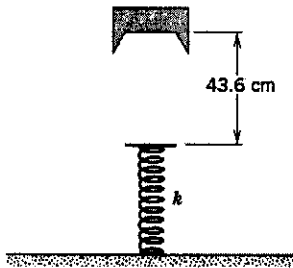
شکل ۲۹. مسئله ۱۴

۱۵. در آبشار نیاگارا، هر دقیقه تقریباً $10^5\text{m}^3 \times 33$ آب از ارتفاع 50m سقوط می‌کند. (الف) توان خروجی یک نیروگاه مولد برق، که بتواند 28% انرژی پتانسیل این آب را به انرژی الکتریکی تبدیل کند، چقدر است؟ (ب) اگر انرژی تولید شده، به قیمت صنعتی 12cent/kWh فروخته شود، درآمد سالانه حاصل چقدر است؟ جرم یک مترمکعب (1m^3) آب 1000kg است.

۱۶. مساحت ایالات متحده آمریکا در حدود $8 \times 10^6\text{km}^2$ ، و ارتفاع متوسط آن از سطح دریا در حدود 500m است. میزان بارش متوسط سالانه، 75cm است. دوسوم این آب باران، در اثر تبخیر، به جو بازمی‌گردد، اما باقی‌مانده آن سرانجام به اقیانوسها می‌ریزد. اگر همه این آب را می‌شد برای تولید برق در نیروگاههای هیدروالکتریکی به کار برد، چه توان متوسطی به دست می‌آمد؟

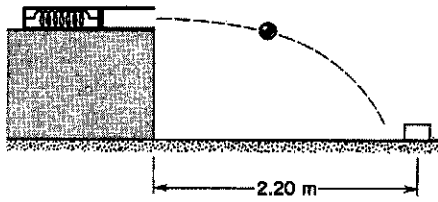
۱۷. جسمی از حالت سکون، از ارتفاع h ، سقوط می‌کند. انرژی جنبشی

پتانسیل فنر است. (چرا این دو کمیت با هم برابر نیستند؟)
 ۲۵. جسمی به جرم 2.14 kg از ارتفاع 43.6 cm روی فنری، با ثابت نیروی $k = 18.6 \text{ N/cm}$ سقوط می‌کند (شکل ۳۴). این فنر حداکثر چقدر فشرده می‌شود؟



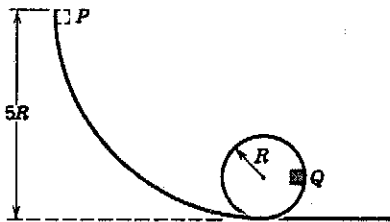
شکل ۳۴. مسئله ۲۵

۲۶. دو کودک با هم بازی می‌کنند و می‌خواهند جعبه کوچکی را که روی زمین است با تیل‌های که از یک تفنگ فنری شلیک می‌شود بزنند؛ تفنگ روی میز قرار دارد. فاصله افقی جعبه هدف با لبه میز 2.2 m است (شکل ۳۵). اولی فنر را 1.1 cm می‌فشارد، اما جسم به هدف نمی‌رسد و 27 cm جلوتر از آن به زمین می‌افتد. دومی چقدر فنر را بفشارد تا جسم به هدف بخورد؟



شکل ۳۵. مسئله ۲۶

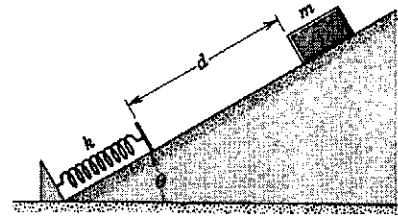
۲۷. جسمی به جرم m روی مسیر حلقوی بدون اصطکاک می‌لغزد (شکل ۳۶). (الف) جسم از نقطه P ، از حالت سکون، رها می‌شود. نیروی خالص وارد بر آن، در نقطه Q چقدر است؟ (ب) جسم باید از چه ارتفاعی نسبت به پایین حلقه رها شود تا در بالای دایره در آستانه جدا شدن از مسیر باشد؟



شکل ۳۶. مسئله ۲۷

۲۸. تارزان، به وزن 18 lb ، به کمک پیچکی به طول 5 ft ، از بالای صخره‌ای تاب می‌خورد و پایین می‌آید (شکل ۳۷). مقدار سقوط او، از بالای صخره تا پایین مسیر تاب، 8.5 ft است. پیچک تحمل کشش

320° است. جسم، در لحظه‌ای که فنر را به اندازه 5.48 cm فشرده است، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. (الف) در این لحظه جسم چه مسافتی روی سطح شیب‌دار حرکت کرده است؟ (ب) سرعت جسم، در لحظه‌ای که به فنر می‌رسد، چقدر است؟

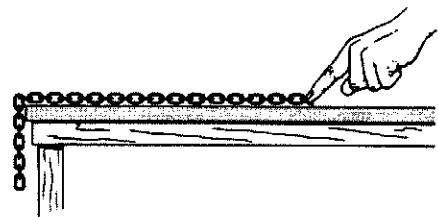


شکل ۳۲. مسئله‌های ۲۰ و ۲۵

۲۱. ثابت نیروی فنر یک تفنگ فنری 4.15 lb/in است. تفنگ با زاویه 36° بالاتر از سطح افقی واقع شده است. گلوله‌ای به وزن 0.28 oz از آن شلیک می‌شود و به ارتفاع 6.33 ft بالاتر از دهانه لوله می‌رسد. (الف) سرعت گلوله موقع خروج از لوله چقدر است؟ (ب) فنر در ابتدا چقدر فشرده شده بوده است؟

۲۲. آونگی متشکل است از سنگی به جرم 1.33 kg که به ریسمانی به طول 3.82 m متصل است. در حالتی که زاویه ریسمان با راستای قائم 58° است، به سنگ ضربه‌ای در جهت عمود بر ریسمان به طرف بالا می‌زنیم. مشاهده می‌شود که سرعت سنگ، هنگام عبور از پایین‌ترین نقطه مسیرش، 8.12 m/s است. (الف) سرعت سنگ، درست پس از ضربه خوردن، چقدر بوده است؟ (ب) طی حرکت آونگ، بزرگترین زاویه‌ای که ریسمان با راستای قائم می‌سازد چقدر است؟ (ج) پایین‌ترین نقطه مسیر سنگ را صفر انرژی پتانسیل گرانشی بگیرید و انرژی مکانیکی کل سیستم را حساب کنید.

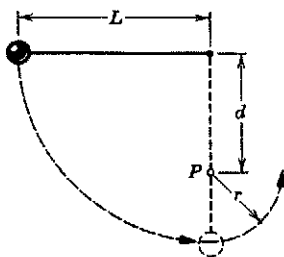
۲۳. زنجیری روی میز بدون اصطکاک نگه داشته شده است، چنانکه یک چهارم طول آن از لبه میز آویزان است (شکل ۳۳). اگر طول زنجیر L و جرم آن m باشد، چقدر کار لازم است تا بخش آویزان زنجیر روی میز کشیده شود؟



شکل ۳۳. مسئله ۲۳

۲۴. یک سر فنر قائمی به سقف متصل است. وزنه‌ای به سر دیگر آن می‌بندیم و آن را آرام پایین می‌آوریم تا به وضعیت تعادل برسد. نشان بدهید که مقدار کاهش انرژی پتانسیل وزنه، دو برابر مقدار افزایش انرژی

سکون، از وضعیتی که در شکل مشخص است، رها می‌کنیم. گلوله روی مسیر خط چین حرکت می‌کند. سرعت گلوله (الف) در پایین‌ترین نقطه مسیر و (ب) در بالاترین نقطه مسیر، پس از اینکه ریسمان دور میخ می‌پیچد، چقدر است؟



شکل ۳۸. مسئله‌های ۳۲ و ۳۳

۳۳. در شکل ۳۸، نشان بدهید که شرط اینکه وزنه آونگ یک دور کامل حول میخ بزند، و ریسمان شل نشود، آن است که $d > 3L/5$ باشد. (راهنمایی: وزنه در نقطه اوج مسیر باید در حال حرکت باشد، در غیر این صورت ریسمان شل می‌شود.)

۳۴. جسمی به جرم m ، که به یک سر ریسمانی بسته شده است، روی دایره‌ای به شعاع R در صفحه قائم حرکت می‌کند. حداقل سرعت جسم در بالاترین نقطه مسیر چقدر باشد تا ریسمان همچنان کشیده بماند؟ ۳۵. جسمی به جرم 3.22 kg ، از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند، به اندازه مسافت d روی سطح شیبدار بدون اصطکاک پایین می‌آید، و در آنجا به فنری با جرم ناچیز می‌رسد (شکل ۳۲). زاویه شیب سطح 28° است. جسم 21.4 cm دیگر هم پایین می‌آید و در آنجا، در اثر فشرده شدن فنر، به حالت سکون لحظه‌ای می‌رسد. ثابت نیروی فنر 427 N/m است. (الف) d چقدر است؟ (ب) سرعت جسم پس از رسیدن به فنر همچنان، تا مدتی، افزایش می‌یابد. جسم چه مسافتی، از لحظه رسیدن به فنر، می‌پیماید تا به بیشینه سرعتش برسد؟

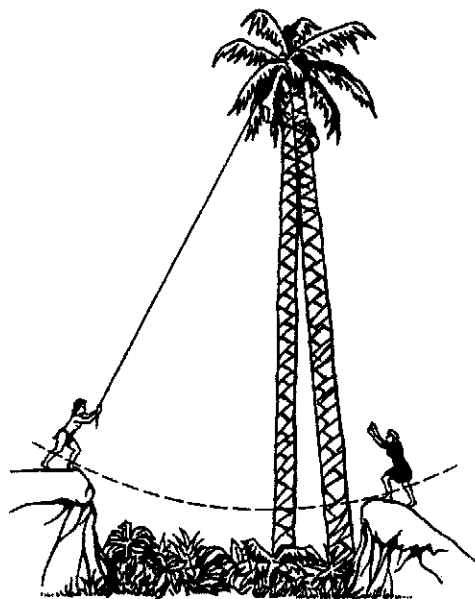
۳۶. کودکی در بالای قطعه یخی به شکل نیمکره نشسته است (شکل ۳۹). در اثر ضربه بسیار کوچکی که به او زده می‌شود شروع به لغزیدن می‌کند. نشان بدهید که، اگر یخ بدون اصطکاک باشد، کودک در ارتفاع $2R/3$ از یخ جدا می‌شود. (راهنمایی: هنگام جدا شدن کودک از یخ، نیروی عمودی سطح صفر می‌شود.)



شکل ۳۹. مسئله ۳۶

۳۷. ذره m در شکل ۴۰ روی ریلی در داخل دایره‌ای به شعاع R حرکت می‌کند. اصطکاک در کار نیست. سرعت جسم، در پایین‌ترین

بیشتر از 250 lb را ندارد. آیا بیچک پاره می‌شود؟



شکل ۳۷. مسئله ۲۸

۲۹. اندازه نیروی جاذبه گرانشی میان ذره‌ای به جرم m_1 و ذره‌ای به جرم m_2

$$F(x) = G \frac{m_1 m_2}{x^2}$$

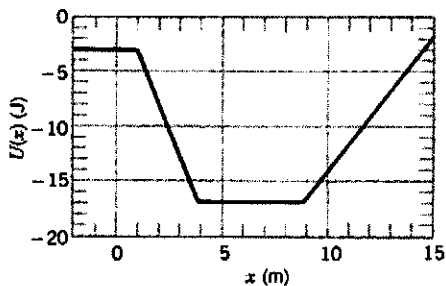
است؛ که در آن G ثابت و x فاصله بین دو ذره است. (الف) تابع انرژی پتانسیل، $U(x)$ ، را پیدا کنید؟ فرض کنید در $x \rightarrow \infty$ ، $U(x) \rightarrow 0$. (ب) چقدر کار لازم است تا فاصله دو ذره را از $x = x_1 + d$ به $x = x_1$ افزایش بدهیم؟

۳۰. جسمی به جرم 118 kg تحت اثر نیروی خالص پایستاری است که دقیقاً از رابطه $F = -3x - 5x^2$ به دست می‌آید؛ F برحسب نیوتون و x برحسب m است. (الف) انرژی پتانسیل جسم در $x = 2.26 \text{ m}$ چقدر است؟ فرض کنید $U(0) = 0$ است. (ب) سرعت جسم، در $x = 4.91 \text{ m}$ برابر با 4.13 m/s و در جهت منفی x است. سرعت آن، هنگامی که از $x = 1.77 \text{ m}$ می‌گذرد، چقدر است؟

۳۱. فنری داریم که از قانون هوک پیروی نمی‌کند. نیرویی که این فنر وارد می‌کند (برحسب نیوتون) $52.8x + 38.4x^2$ در جهت مخالف کشش است؛ x مقدار کشیدگی فنر برحسب متر است. (الف) کار لازم برای کشیدن فنر از $x = 0.522 \text{ m}$ به $x = 1.34 \text{ m}$ چقدر است؟ (ب) یک سر فنر را به جایی می‌بندیم و ذره‌ای به جرم 2.17 kg به سر دیگر آن وصل می‌کنیم. فنر را 1.34 m می‌کشیم و بعد ذره را از حالت سکون رها می‌کنیم. این ذره، هنگامی که مقدار کشیدگی فنر $x = 0.522 \text{ m}$ است، چه سرعتی دارد؟ (ج) آیا نیروی این فنر پایستار است یا ناپایستار؟ توضیح بدهید.

۳۲. در شکل ۳۸ طول ریسمان برابر با $L = 120 \text{ cm}$ ، و فاصله نقطه آویز ریسمان تا میخ برابر با 75 cm است. گلوله را از حالت

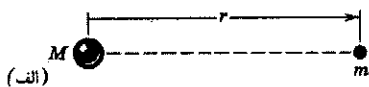
ذره، E ، برابر با 4 J است. نمودار انرژی جنبشی ذره، $K(x)$ ، را مستقیماً روی همان شکل ۴۱ رسم کنید. ذره‌ای به جرم 2 kg در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۲ است. در $x = 2 \text{ m}$ سرعت ذره 2 m/s است.



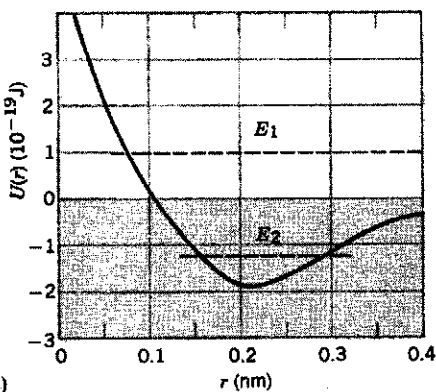
شکل ۴۲. مسئله ۴۰

(الف) نیروی وارد بر ذره در این نقطه چقدر است؟ (ب) ذره در چه محدوده‌ای از x حرکت می‌کند. (ج) سرعت ذره در $x = 7 \text{ m}$ چقدر است؟

۴۱. شکل ۴۳ اتمی به جرم m را در فاصله r از اتم ساکنی به جرم m نشان می‌دهد؛ $m \ll M$ است. شکل ۴۳ ب تابع انرژی پتانسیل $U(r)$ بر حسب مکان اتم سبکتر را نشان می‌دهد. حرکت این اتم را (الف) اگر انرژی مکانیکی کل از صفر بزرگتر، مثلاً E_1 ، باشد، و (ب) اگر این انرژی از صفر کوچکتر، مثلاً E_2 ، باشد، توصیف کنید. به ازای $E_1 = 10^{-19} \text{ J}$ و در $r = 30 \text{ nm}$ (ج) انرژی پتانسیل، (د) انرژی جنبشی، و (ه) (اندازه و جهت) نیروی وارد بر ذره متحرک را به دست بیاورید.



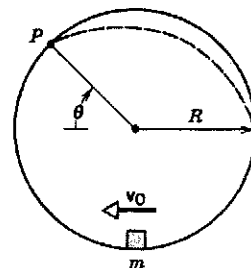
(الف)



(ب)

شکل ۴۳. مسئله ۴۱

نقطه مسیر v_0 است. (الف) حداقل مقدار v_0 ، یعنی v_m ، برای اینکه m بتواند یک دور کامل بزند و از ریل جدا نشود چقدر است؟ (ب) فرض کنید $v_0 = 0.775 v_m$ است. ذره تا نقطه P بر ریل حرکت می‌کند و در آنجا از ریل جدا می‌شود و روی مسیری که با خط چین مشخص شده است حرکت می‌کند. مکان زاویه‌ای (θ) نقطه P را پیدا کنید.

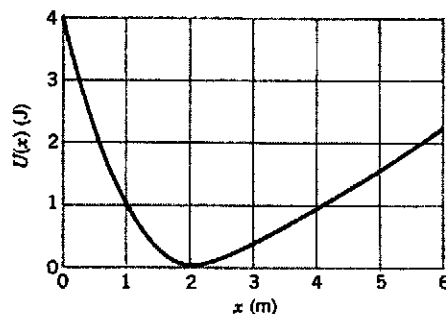


شکل ۴۰. مسئله ۳۷

۳۸. فرض کنید که به جای میله شکل ۲۴، ریسمانی بسیار کشسان، مثلاً از جنس لاستیک بگذاریم. هنگامی که گلوله رها می‌شود، ریسمان هنوز کشیده نشده و طول آن L است. (الف) توضیح بدهید که چرا انتظار دارید گلوله به نقطه‌ای پایین‌تر از مسافت L زیر نقطه ثابت ریسمان برسد. (ب) با استفاده از مفاهیم دینامیکی و انرژی، نشان بدهید که اگر ΔL نسبت به L کوچک باشد، ریسمان به اندازه $\Delta L = 3mg/k$ کشیده می‌شود؛ k ثابت نیروی ریسمان است. توجه کنید که هر چه k بزرگتر باشد ΔL کوچکتر است و تقریب $\Delta L \ll L$ بهتر می‌شود. (ج) نشان بدهید که در این شرایط سرعت گلوله در پایین مسیر $v = \sqrt{2g(L - 3mg/2k)}$ است، یعنی کمتر از مقداری که در حالت ناکشسان ($k = \infty$) بود. با استفاده از پایستگی انرژی، یک توضیح فیزیکی برای این نتیجه ارائه کنید.

بخش ۴۸ سیستم‌های پایستار یک بعدی: حل کامل

۳۹. ذره‌ای در راستای محور x حرکت می‌کند. انرژی پتانسیل $U(x)$ در ناحیه‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند به صورت شکل ۴۱ است. (الف) نمودار نیروی $F(x)$ وارد بر ذره را به طور کمی رسم کنید؛ مقیاس را همان مقیاس شکل ۴۱ بگیرید. (ب) انرژی مکانیکی (ثابت)



شکل ۴۱. مسئله ۳۹

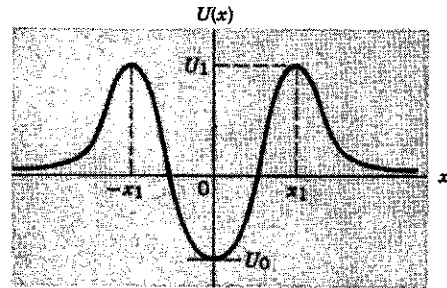
۴۲. یک ذره آلفا (هسته هلیوم)، با انرژی پتانسیلی به صورت شکل ۴۴، داخل هسته بزرگی مقید است. (الف) تابعی از x بسازید که به این شکل کلی باشد: یک کمینه به مقدار U_0 در $x = 0$ و یک بیشینه به مقدار U_1 در $x = x_1$ و $x = -x_1$ داشته باشد. (ب) نیروی بین ذره آلفا و هسته را به صورت تابعی از x رسم کنید. (ج) انواع حرکت‌های ممکن را توصیف کنید.

بخش ۵-۸ سیستم‌های پایستار دو و سه بعدی

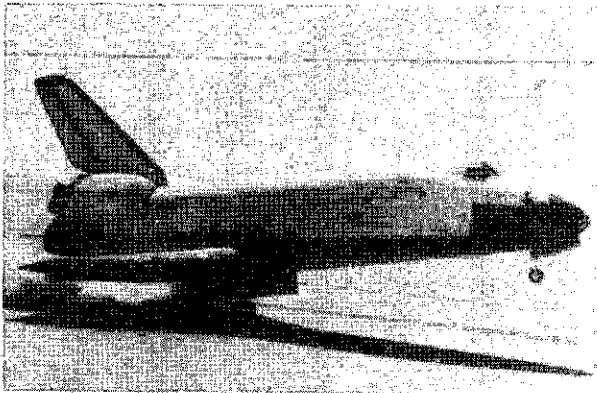
۴۳. نشان بدهید که، به ازای سرعت‌های اولیه یکسان v_0 ، سرعت v همه پرتابه‌ها، در ارتفاع یکسان، یکسان است و به زاویه پرتاب بستگی ندارد. مقاومت هوا را به حساب نیاورید.

۴۴. انرژی پتانسیل متناظر با نیروی دویعدی معینی $U(x, y) = \frac{1}{2}k(x^2 + y^2)$ است. (الف) F_x و F_y را به دست بیاورید. بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات x و y آن نقطه، بیان کنید. (ب) F_r و F_θ را به دست بیاورید و بردار نیرو را در هر نقطه، برحسب مختصات قطبی r و θ آن نقطه، بیان کنید. (ج) آیا مدل فیزیکی‌ای برای چنین نیرویی به نظرتان می‌رسد؟

۴۵. انرژی پتانسیل یوکاوا



شکل ۴۴. مسئله ۴۲



شکل ۴۵. مسئله ۴۸

۴۸. با سرعت 1800 mi/h وارد جو می‌شود؟ این سرعت به تدریج کم می‌شود تا شاتل به سرعت فرود 190 گره (یعنی 220 mi/h) برسد. انرژی جنبشی فضاییما (الف) هنگام ورود به جو و (ب) هنگام فرود چقدر است (شکل ۴۵)؟ (ج) چه بر سر انرژی "از دست رفته" می‌آید؟

۴۹. شخصی به جرم 68 kg در حال سقوط آزاد با سرعت حد ثابت 59 m/s است. آهنگ افزایش انرژی داخلی این شخص و هوای اطراف او چقدر است؟

۵۰. رودخانه‌ای طی عبور از تنداب در مسیرش 15 m ارتفاع از دست می‌دهد. سرعت آب، هنگام ورود به تنداب 3.2 m/s و هنگام خروج 13 m/s است. چند درصد از انرژی پتانسیل که آب، در گذشتن از تنداب، از دست می‌دهد به شکل انرژی جنبشی آب در پایین رود ظاهر می‌شود؟ چه بر سر بقیه انرژی می‌آید؟

۵۱. سنگی به جرم 524 kg از حالت سکون روی شیب تپه‌ای شروع به لغزش می‌کند. طول شیب 488 m و ارتفاع آن 292 m است. سرعت سنگ در پایین تپه 62.6 m/s است. این سنگ طی لغزش، در اثر اصطکاک، چقدر انرژی مکانیکی از دست داده است؟

۵۲. پرتابه‌ای به جرم 9.4 kg در راستای قائم به بالا پرتاب می‌شود. طی مدتی که پرتابه به بالا می‌رود، 68 kJ از انرژی مکانیکی آن در اثر اصطکاک با هوا تلف می‌شود. اگر مقاومت هوا ناچیز بود، پرتابه چقدر بالاتر می‌رفت؟

۵۳. جسمی به جرم 4.26 kg با سرعت 7.81 m/s روی شیبی به زاویه 33.0° شروع به بالا رفتن می‌کند. این جسم، با فرض اینکه 34.6 J از انرژی مکانیکی‌اش صرف مقابله با اصطکاک شود، تا چه مسافتی روی سطح شیبدار بالا می‌رود؟

۵۴. سنگی به وزن w در امتداد قائم با سرعت اولیه v_0 به بالا پرتاب می‌شود. فرض کنید که نیروی مقاومت هوا، f ، در مسافت y که سنگ طی می‌کند، به اندازه fy از انرژی مکانیکی آن می‌کاهد. (الف) نشان

بخش ۶-۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25.3 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12.2 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 5.66 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرسی چقدر است؟

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 z \mathbf{j}$ ، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۶-۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25.3 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12.2 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 5.66 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرسی چقدر است؟

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 z \mathbf{j}$ ، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۶-۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25.3 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12.2 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 5.66 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرسی چقدر است؟

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 z \mathbf{j}$ ، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

بخش ۶-۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25.3 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12.2 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 5.66 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرسی چقدر است؟

۴۶. با انتگرال‌گیری در روی همان سه مسیر مثال ۵، نشان بدهید که نیروی $\mathbf{F} = -k_1 y \mathbf{i} - k_2 z \mathbf{j}$ ، اگر $k_1 \neq k_2$ باشد ناپایستار است.

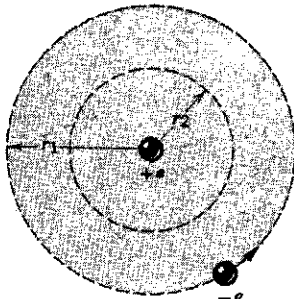
بخش ۶-۸ پایستگی انرژی در سیستم‌های ذرات

۴۷. توله خرسی به جرم 25.3 kg از حالت سکون روی تنه درخت کاجی می‌لغزد و 12.2 m پایین می‌آید؛ سرعت او در پایین مسیر 5.66 m/s است. (الف) انرژی پتانسیل اولیه توله خرسی چقدر است؟

از بارش برف، اسکی‌بازی به جرم 54.4 kg با همین شرایط، بدون استفاده از میله‌هایش، شروع به حرکت می‌کند؛ این اسکی‌باز فقط می‌تواند (با سرعت نهایی صفر) خودش را به قله کوتاه‌تر برساند. انرژی داخلی چوبهای اسکی و برف مسیر چقدر افزایش یافته است؟
 ۵۸. اندازه نیروی جاذبه بین پروتون با بار مثبت و الکترون با بار منفی در اتم هیدروژن

$$F = k \frac{e^2}{r^2}$$

است، که در آن e بار الکترون، k ثابت، و r فاصله میان الکترون و پروتون است. فرض کنید که پروتون ساکن است. تصور کنید که الکترون در ابتدا در حال حرکت بر دایره‌ای به شعاع r_1 حول پروتون است و ناگهان به مداری دایره‌ای با شعاع r_2 ، کوچکتر از r_1 ، می‌جهد (شکل ۴۸). (الف) با استفاده از قانون دوم نیوتون، تغییر انرژی جنبشی الکترون را حساب کنید. (ب) با استفاده از رابطه نیرو با انرژی پتانسیل، تغییر انرژی پتانسیل اتم را حساب کنید. (ج) در این فرایند، انرژی کل اتم چقدر تغییر کرده است؟ (این انرژی معمولاً به شکل تابش از اتم خارج می‌شود).



شکل ۴۸. مسئله ۵۸

۵۹. آسانسوری به وزن 4000 lb در طبقه اول ساختمان ساکن است، چنانکه کف آن به فاصله $d = 12.0 \text{ ft}$ بالاتر از فنر بازدارنده زیر آسانسور (هم سطح با طبقه هم‌کف) واقع شده است؛ ثابت نیروی این فنر 10000 lb/ft است. در این حالت کابل نگهدارنده آسانسور پاره می‌شود (شکل ۴۹). در این لحظه یک ترمز ایمنی به کار می‌آید و باعث می‌شود که آسانسور با ریل‌های مسیر درگیر شود؛ در نتیجه، به‌ازای هر 1000 ft که آسانسور حرکت می‌کند، $1000 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ انرژی مکانیکی از سیستم گرفته می‌شود. (الف) سرعت آسانسور، درست پیش از برخورد به فنر، چقدر است؟ (ب) حداکثر فشردگی فنر را حساب کنید. (ج) حداکثر مسافتی را که آسانسور، نسبت به فنر، به بالا به‌طور تقریبی، کل مسافتی که آسانسور قبل

بدهید که بیشترین ارتفاعی که سنگ به آن می‌رسد

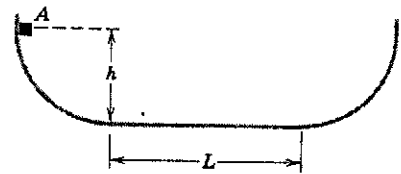
$$h = \frac{v_0^2}{2g(1 + f/w)}$$

است. (ب) نشان بدهید که سرعت سنگ، هنگام برخورد با زمین برابر است با

$$v = v_0 \left(\frac{w - f}{w + f} \right)^{1/2}$$

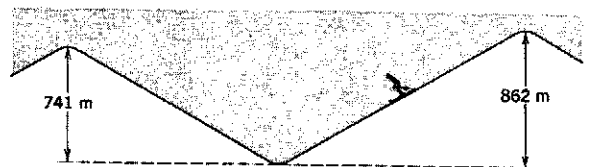
۵۵. جسمی به جرم 1.34 kg ، که روی سطحی افقی در حال لغزش است، به فنری با ثابت نیروی 193 N/cm برمی‌خورد. جسم فنر را به اندازه 4.16 cm ، نسبت به حالت آزاد آن، فشرده می‌کند. از زمانی که جسم به فنر می‌خورد تا زمانی که ساکن می‌شود، در اثر اصطکاک میان جسم و سطح 117 mJ انرژی مکانیکی اتلاف می‌شود. سرعت جسم در لحظه برخورد با فنر چقدر بوده است؟

۵۶. جسم کوچکی به جرم $m = 234 \text{ g}$ در مسیری که در شکل ۴۶ نشان داده شده است می‌لغزد؛ دو انتهای مسیر به طرف بالا شیب دارند و بخش میانی آن تخت است. طول بخش میانی $L = 2.16 \text{ m}$ است. بخش‌های خمیده مسیر بدون اصطکاک‌اند. جسم، هنگام گذشتن از بخش تخت مسیر، در اثر اصطکاک 688 mJ انرژی مکانیکی از دست می‌دهد. اگر این جسم از نقطه A به ارتفاع $h = 1.05 \text{ m}$ نسبت به قسمت تخت مسیر، رها شود، سرانجام، در چه نقطه‌ای متوقف می‌شود؟



شکل ۴۶. مسئله ۵۶

۵۷. ارتفاع دو قله پوشیده از برف، 862 m و 741 m است. از قله بلندتر تا قله کوتاه‌تر یک پیست اسکی هست (شکل ۴۷). (الف) اسکی‌بازی اسکی‌بازی از قله بلندتر، از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. اگر این اسکی‌باز از میله‌های اسکی خود استفاده نکند و فقط سر بخورد، با چه سرعتی به قله کوتاه‌تر می‌رسد؟ فرض کنید که مسیر یخبندان است و عملاً اصطکاکی در کار نیست. (ب) پس



شکل ۴۷. مسئله ۵۷

۶۲. رابطه "شدت" زلزله در مقیاس ریشتر، M ، با انرژی آزاد شده، E ، برحسب ژول، چنین است

$$\log E = 1.44M + 5.24$$

(الف) شدت زلزله سال ۱۹۸۹ در منطقه سان فرانسیسکو (شکل ۵۰) ۷٫۱ بود. در این زلزله چقدر انرژی آزاد شده بود؟ (ب) مقدار کاهش

جرم متناظر با این انرژی آزاد شده چقدر است؟

۶۳. یک نیروگاه هسته‌ای در اورگون، طی یک سال به طور پیوسته 10^3 MW توان مفید تحویل می‌دهد. علاوه بر این، 210 MW توان هم به شکل انرژی گرمایی به رود کلمبیا منتقل می‌کند. تغییر جرم سوخت هسته‌ای، پس از یک سال کار نیروگاه، چقدر است؟

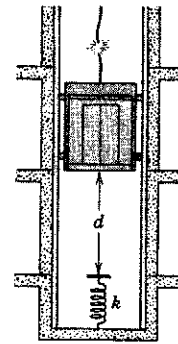
۶۴. در سال ۱۹۸۳، ایالات متحده در حدود $2.31 \times 10^{12} \text{ kWh}$ انرژی الکتریکی تولید کرد. فرض کنید که این انرژی در نیروگاه‌های هسته‌ای تولید شده باشد. مقدار کاهش جرم سوخت هسته‌ای این نیروگاه‌ها، برای تولید این انرژی چقدر بوده است؟

۶۵. جرم یک قرص آسیرین 320 mg است. انرژی متناظر با این جرم (به شکل بنزین) تا چند مایل توان یک اتومبیل را تأمین می‌کند؟ فرض کنید اتومبیل با هر گالن بنزین 30 مایل حرکت می‌کند و گرمای احتراق بنزین 130 MJ/gal است. جواب خودتان را برحسب محیط استوایی زمین بیان کنید.

۶۶. توان فضاپیمایی از نابودی ماده پادماده تأمین می‌شود. چقدر ماده و پادماده باید نابود شود تا فضاپیمایی به جرم 182 ton را از سکون به یک دهم سرعت نور برساند؟ رابطه غیرنسبیتی انرژی جنبشی را به کار ببرید.

۶۷. خورشید با آهنگ $4 \times 10^{26} \text{ W}$ انرژی تابش می‌کند. هر روز "چند تن آفتاب" به زمین می‌رسد؟

از توقف کامل طی می‌کند چقدر است؟ چرا این جواب دقیق نیست؟



شکل ۴۹. مسئله ۵۹

۶۰. اتومبیلی به جرم 1700 kg با سرعت ثابت 15 m/s حرکت می‌کند. در این حالت، موتور آن 16 kW توان تولید می‌کند که صرف غلبه بر اصطکاک، مقاومت باد، و غیره می‌شود. (الف) نیروی بازدارنده مؤثر ناشی از مجموعه همه نیروهای اصطکاک چقدر است؟ (ب) اگر اتومبیل بخواهد با سرعت 15 m/s از یک شیب 8° بالا برود، باید چقدر توان از موتور بگیرد؟ (شیب 8° ارتفاع به‌ازای 100 m مسافت افقی). (ج) اتومبیل در چه شیبی (به درصد) بیان کنید) با موتور خاموش می‌تواند با سرعت 15 m/s پایین بیاید؟

بخش ۷-۸ جرم و انرژی

۶۱. (الف) چند ژول انرژی معادل با 120 گرم جرم است؟ (ب) این انرژی چند سال نیاز انرژی یک خانه، با مصرف متوسط 130 kW ، را تأمین می‌کند؟



شکل ۵۰. مسئله ۶۲

توصیف خوبی برای این نیروست؛ در این رابطه، x برحسب متر و F برحسب نیوتون است. کاری را که روبات بین $x = 0$ و $x = 5\text{m}$ انجام می‌دهد حساب کنید.

کار انجام شده از رابطه $W = \int_0^5 F dx$ به دست می‌آید. این انتگرال را نمی‌شود به طور تحلیلی محاسبه کرد، اما می‌شود مقدار آن را با روشهای عددی، به کمک کامپیوتر، تخمین زد. ناحیه انتگرال‌گیری را N بازه، هر یک به اندازه Δx ، تقسیم کنید، و F_i را مقدار نیرو در مرکز بازه i ام بگیرید. در این صورت خواهیم داشت $\int_0^5 F dx \approx \Delta x \sum_{i=1}^N F_i$. هر چه Δx کوچکتر شود، برآورد دقیقتر می‌شود. اما Δx را خیلی هم نمی‌شود کوچک کرد چون در این صورت در محاسبه مجموع، ارقام بامعنی از دست می‌روند. (شاید بخواهید از روش سیمسون استفاده کنید، که برآورد بهتری می‌دهد. برای آشنایی با جزئیات این روش به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال رجوع کنید.)

برنامه‌ای برای کامپیوتر بنویسید، یا الگوریتمی طرح کنید، که کار این نیرو را محاسبه کند. در این برنامه باید بتوانید مقادیر x_f ، x ، و N را وارد کنید. جمع را می‌توانید با یک حلقه تکرار انجام بدهید. در هر بار تکرار حلقه، نیرو در مرکز بازه حساب می‌شود و به مجموعی که قبلاً حساب شده است افزوده می‌شود. در اجرای اول بگیرید $N = 20$ ؛ سپس برنامه را چند بار دیگر هم اجرا کنید و هر بار N را دو برابر کنید. هنگامی که نتیجه دو اجرای متوالی، تا سه رقم بامعنی، یکسان شد کار را متوقف کنید.

۷۳. نیروی پایستار \mathbf{F} با مؤلفه‌های $F_x = y(1-x)e^{-x}$ ، $F_y = xe^{-x}$ ، و $F_z = 0$ بر ذره‌ای وارد می‌شود. (الف) فرض کنید ذره از مبدأ، در راستای محور x ، حرکت می‌کند و به $x = 2\text{m}$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور y حرکت می‌کند و به $x = 2\text{m}$ ، $y = 2\text{m}$ می‌رسد. کار انجام شده توسط این نیرو را، به راحتی می‌توان به طور تحلیلی محاسبه کرد. این محاسبه را انجام بدهید. حالا فرض کنید که ذره از مبدأ در راستای محور y حرکت می‌کند. به $x = 2\text{m}$ ، $y = 2\text{m}$ می‌رسد؛ سپس در راستای خطی موازی با محور x حرکت می‌کند و به $x = 2\text{m}$ ، $y = 2\text{m}$ می‌رسد. کار نیرو را در این مسیر هم حساب کنید، اما این بار با استفاده از انتگرال‌گیری عددی. برای جزئیات روش کار به مسئله قبلی رجوع کنید. سرانجام، یک برنامه انتگرال‌گیری عددی به کار ببرید که کار این نیرو را، در حرکت جسم از مبدأ به نقطه $x = 2\text{m}$ ، $y = 2\text{m}$ روی خط $x = y$ ، محاسبه کند. چون نیرو پایستار است، جواب حاصل از هر سه مسیر (در محدوده دقت محاسبه) باید یکسان باشد. (ب) نیروی \mathbf{F} ، با مؤلفه‌های $F_x = y^2(1-x)e^{-x}$ ، $F_y = xe^{-x}$ ، و $F_z = 0$ ، ناپایستار است. کار این نیرو را طی حرکت ذره از مبدأ به نقطه $x = 2\text{m}$ ، $y = 2\text{m}$ در هر یک از سه مسیر قسمت (الف) حساب کنید. توجه کنید که نتایج حاصل برای مسیرهای مختلف یکسان نخواهد بود.

۶۸. انرژی بستگی هسته یک اتم برابر است با تفاضل مجموع انرژیهای سکون پروتونها و نوترونهای سازنده آن هسته، و انرژی سکون خود هسته. هسته اتم طلا ^{197}Au ۷۹ پروتون و ۱۱۸ نوترون دارد و جرم آن 196.9232u است. انرژی بستگی این هسته را حساب کنید. (جرم پروتون 1.00728u ، و جرم نوترون 1.00867u است؛ انرژی سکون یک یکای جرم اتمی برابر با 931.5MeV است.)

بخش ۸-۸ کوانتش انرژی

۶۹. انرژی یک اتم چقدر باید تغییر کند تا نوری با بسامد $5.34 \times 10^{14}\text{s}^{-1}$ از آن گسیل شود؟
۷۰. (الف) انرژی اتم هیدروژنی 3eV است. اگر این انرژی به 13eV تغییر کند، فرکانس نور چقدر خواهد بود؟ (ب) آیا این نور گسیل می‌شود یا جذب؟

پروژه‌های کامپیوتری

۷۱. فرض کنید نیروی وارد بر ذره‌ای $\mathbf{F} = \lambda xy^2\mathbf{i} + 12x^2y^2\mathbf{j}$ باشد. این نیرو پایستار، و پتانسیل متناظر با آن $U = -4x^2y^2$ است. با استفاده از این تابع می‌توانید بعضی از ویژگیهای مهم نیروهای پایستار را نشان بدهید. اولاً، انرژی پتانسیل ذره فقط به مختصات آن بستگی دارد. روی یک کاغذ دستگاه مختصاتی رسم کنید که در آن، x و y هر دو بین $-\Delta m$ تا $+\Delta m$ باشند. اکنون با استفاده از یک برنامه کامپیوتری یا الگوریتم، مقادیر انرژی پتانسیل را به ازای همه مقادیر صحیح x و y (برحسب متر)، بین دو حد بالا، به دست بیاورید. و این مقادیر را، در نقاط متناظر، به نمودار منتقل کنید. با استفاده از این نمودار، به پرسشهای زیر جواب بدهید. (الف) طی حرکت ذره از $x = -5\text{m}$ ، $y = -5\text{m}$ به مبدأ، این نیرو چقدر کار انجام می‌دهد؟ (ب) طی حرکت ذره از مبدأ به $x = +5\text{m}$ ، $y = +3\text{m}$ چطور؟ (ج) طی حرکت ذره از $x = -5\text{m}$ ، $y = -5\text{m}$ به $x = +5\text{m}$ ، $y = +3\text{m}$ چطور؟ جواب شما باید برابر با مجموع جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) باشد. (د) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی 90J شروع می‌کند و به نقطه $x = +5\text{m}$ ، $y = +2\text{m}$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطه اخیر چقدر است؟ (ه) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی 90J شروع می‌کند و به $x = +5\text{m}$ ، $y = -2\text{m}$ می‌رسد. اگر این نیرو تنها نیروی وارد بر آن باشد، انرژی جنبشی ذره در نقطه اخیر چقدر است؟ (و) ذره از مبدأ با انرژی جنبشی 60J شروع می‌کند و در راستای خط $x = -y$ به طرف $x = +5\text{m}$ ، $y = -5\text{m}$ حرکت می‌کند. نیروی دیگری هم لازم است تا ذره در این مسیر بماند اما فرض کنید که این نیرو همواره بر مسیر عمود است. ذره در کجا می‌ایستد؟

۷۲. روباتی صندوقی به جرم 20kg را با سرعت ثابت، از $x = 0$ تا $x = 5\text{m}$ ، روی زمین هل می‌دهد. شرایط سطح زمین تغییر می‌کند، و روبات هم صندوق را با نیروی افقی متغیری هل می‌دهد تا سرعت آن ثابت بماند. معلوم می‌شود که رابطه $F(x) = 0.30\text{mg}\sqrt{x}e^{-0.2x}$

۹

سیستمهای ذرات

تا اینجا اجسام را ذره — یعنی “با جرم” ولی “بی اندازه” — در نظر گرفته ایم. این البته فرض خیلی بدی هم نیست، چون در حرکت انتقالی ساده، در واقع تمام نقاط جسم دقیقاً مثل هم حرکت می کنند و فرقی نمی کند که جسم را ذره بگیریم یا یک جسم گسترده واقعی. اما در مورد بسیاری از اجسام متحرک نمی توانیم چنین کنیم. مثلاً وقتی جسمی ضمن انتقال دوران هم داشته باشد، یا وقتی اجزاء جسمی نسبت به یکدیگر نوسان کنند دیگر درست نیست که کل جسم را مثل یک ذره در نظر بگیریم. حتی در این موارد پیچیده تر هم، یک نقطه مربوط به جسم هست که، تحت تأثیر نیروهای خارجی، درست مثل یک ذره رفتار می کند. اسم این نقطه مرکز جرم است. در این فصل خواهیم گفت که چه طور می توانیم مرکز جرم اجسام را پیدا کنیم، و نشان خواهیم داد که قوانین ساده (یعنی همان قوانین نیوتون) برای توصیف حرکت مرکز جرم سیستمهای پیچیده، به فرمولبندی دومین قانون بزرگ پایستگی، یعنی پایستگی تکانه خطی، منجر می شود.

۹-۱ سیستمهای دوزره ای

جابه جایی آن نسبتاً کوچک است و جابه جایی جسم کم جرمتر تقریباً برابر با تغییر طول فنر است. از طرف دیگر، اگر دو جسم دارای جرمهای مساوی باشند، اندازه جابه جایی هر کدام از آنها برابر با نصف افزایش طول فنر است.

در شکل ۱ نمونه ای از حرکتی که می خواهیم بررسی اش کنیم نشان داده شده است. در این مورد ابتدا فنر (با ثابت نیروی k) مقداری کشیده شده است و دو جسم از حالت سکون رها شده اند. فرض کنید کشیدگی اولیه فنر d_i باشد، در این صورت انرژی اولیه برابر است با $E_i = U_i + K_i = \frac{1}{2}kd_i^2 + 0$. در هر لحظه خاصی که در آن تغییر طول فنر برابر با d باشد، انرژی سیستم برابر است با

$$E = U + K = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (1)$$

که شامل انرژی پتانسیل فنر و انرژی جنبشی دو جسم است. پایستگی انرژی ایجاب می کند که انرژی E در هر زمانی مساوی با انرژی اولیه (E_i) باشد، یعنی

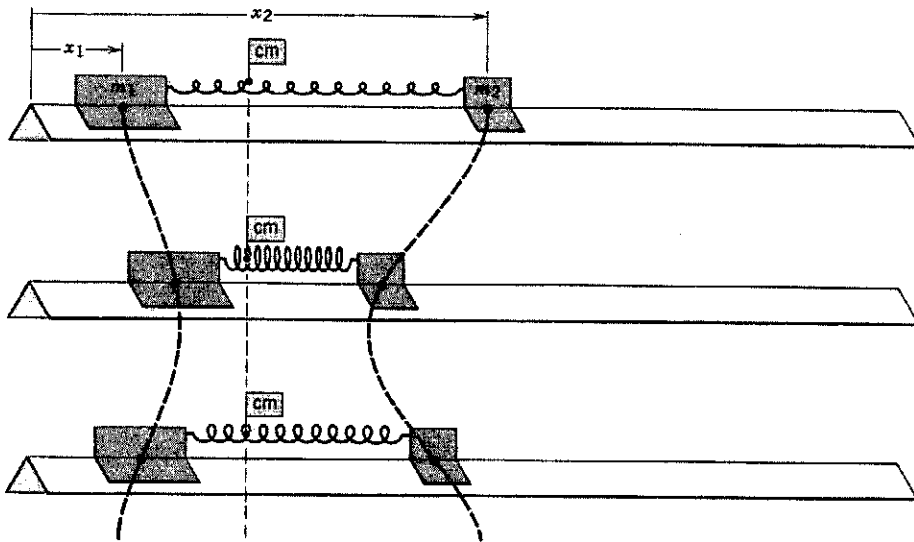
$$\frac{1}{2}kd_i^2 = \frac{1}{2}kd^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \quad (2)$$

از شکل ۱ پیداست که مکانهای دو جسم با رابطه زیر به هم مربوط می شوند

$$x_2 = x_1 + L + d \quad (3)$$

در فصلهای ۷ و ۸ برای مطالعه حرکت جسمی که تحت تأثیر نیروی فنر بود از مفاهیم مربوط به انرژی استفاده کردیم. حالا می خواهیم به مسئله ای بپردازیم که کمی پیچیده تر است: حرکت یک بعدی دو جسم که به وسیله فنری به هم متصل اند. برای سادگی، فعلاً فرض می کنیم که جز نیروی فنر، هیچ نیروی خارجی خالص دیگری به این اجسام اثر نمی کند. یعنی، فرض می کنیم که دو جسم می توانند بدون اصطکاک، روی یک سطح افقی هموار بلغزند. یک نمونه عملی از چنین وضعیتی می تواند حرکت دو لغزنده متصل با فنر روی یک ریل هوا باشد. وقتی فنر کشیده یا فشرده می شود، به هر دو جسم، که می توانیم هر یک را به تنهایی مثل ذره در نظر بگیریم، نیرو وارد می کند. نیروهای وارد بر دو جسم مقادیر مساوی دارند. (فنر را می شود صرفاً نمایش مادی نیروهایی دانست که دو جسم — مثلاً دو اتم در یک مولکول — می توانند بی واسطه بر یکدیگر وارد کنند. در این صورت، قانون سوم نیوتون، ایجاب می کند که نیروهای وارد بر دو ذره مساوی و در جهتهای مخالف باشند. وجود فنر، که بی جرم فرض شده است، این الزام را تغییر نمی دهد.)

حرکتهای این دو جسم را نمی توانیم مستقل از یکدیگر با استفاده از قوانین نیوتون تحلیل کنیم، زیرا حرکت هر کدام وابسته به حرکت دیگری است. مثلاً، اگر یکی از اجسام خیلی پر جرمتر از دیگری باشد،



شکل ۱. دو لغزنده که با یک فنر کشیده شده به هم متصل اند، روی یک ریل هوا از حالت سکون رها می‌شوند. حرکت حاصل، جز برای نقطه مشخص شده با پرچم، که ساکن می‌ماند، ساده نیست. بازه‌های زمانی بین وضعیتهای متوالی، با هم مساوی‌اند. در مورد این سیستم $m_1 = 2m_2$ است.

که همان سرعت پرچم در شکل ۱ است. برای پیدا کردن شتاب مرکز جرم، یکبار دیگر (این بار از معادله ۵) مشتق می‌گیریم؛ نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} a_{cm} &= \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 v_1 + m_2 v_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dv_1}{dt} + m_2 \frac{dv_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1 a_1 + m_2 a_2) \end{aligned} \quad (6)$$

که در آن a_1 شتاب m_1 و a_2 شتاب m_2 است.

در ادامه مطلب، قوانین نیوتون را جداگانه به هر یک از جرمهای m_1 و m_2 اعمال می‌کنیم. نیروی وارد بر m_1 از m_2 را F_{12} و نیروی وارد بر m_2 از m_1 را با F_{21} نمایش می‌دهیم. از قانون دوم نیوتون در مورد m_1 و m_2 به ترتیب نتیجه می‌شود $F_{12} = m_1 a_1$ و $F_{21} = m_2 a_2$. (در مثال ما، این فتر است که نیروها را به m_1 و m_2 وارد می‌کند. ولی، این فرض که اجسام بی‌واسطه به یکدیگر نیز وارد می‌کنند، تا وقتی فنر بدون جرم در نظر گرفته شود، چیزی از کلیت مسئله کم نمی‌کند.) قانون سوم نیوتون ایجاب می‌کند که $F_{12} = -F_{21}$. از نشانیدن این کمیتها در معادله ۶ نتیجه می‌شود که

$$a_{cm} = \frac{1}{M} (F_{12} + F_{21}) = 0$$

در این مورد خاص، که هیچ نیروی خارجی بر سیستم وارد نمی‌شود، مرکز جرم هیچ شتابی ندارد و بنابراین با سرعت ثابت حرکت می‌کند (این سرعت ثابت در مورد سیستم شکل ۱ اتفاقاً صفر است). با استفاده از معادله‌های ۴ و ۵ در ترکیبی از معادلات ۲ و ۳ می‌توانیم یا x_1 و v_1 را حذف کنیم یا x_2 و v_2 را، و به این ترتیب حل مسئله کامل می‌شود (نگاه کنید به مسئله ۱).

شکل ۲ حالت کلی‌تری را نشان می‌دهد که در آن به فنر یک

جسمها سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} داده شده

که در آن L طول عادی فنر است. معادله‌های ۲ و ۳ حاوی اطلاعات کافی برای تعیین x_1 و x_2 به صورت توابعی از زمان نیستند، و بنابراین نمی‌توانیم بدون دستیابی به اطلاعات بیشتر، این مسئله را به طور کامل حل کنیم.

اطلاعات اضافی مورد نیاز از بررسی و تحلیل یک نقطه خاص در سیستم شکل ۱ حاصل می‌شود. این نقطه، که مرکز جرم (cm) سیستم نامیده می‌شود، در شکل ۱ با پرچم کوچکی مشخص شده است. در مورد این سیستم، مرکز جرم اصلاً حرکت نمی‌کند.

بینیم که استفاده از مرکز جرم چگونه ما را در تکمیل حل این مسئله یاری می‌کند. مکان مرکز جرم، برای مورد خاص دو ذره در یک بعد، به صورت

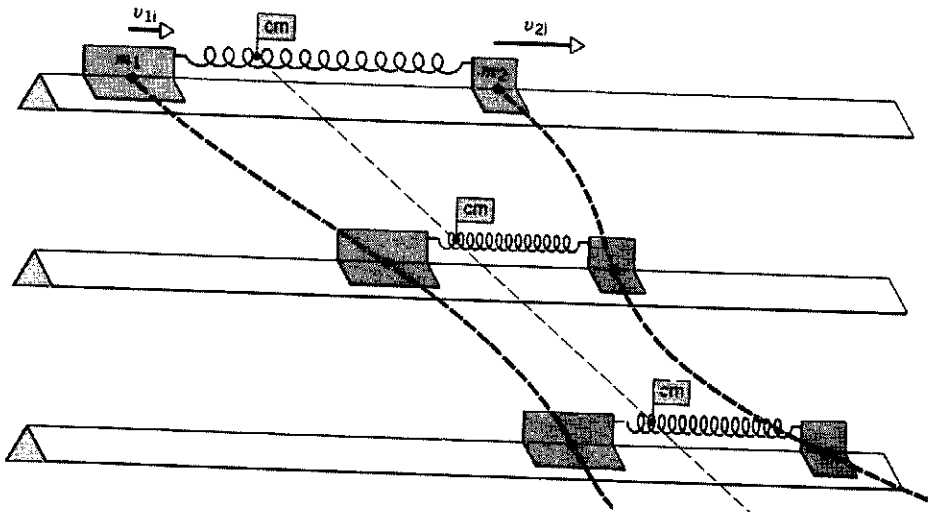
$$x_{cm} = \frac{1}{M} (m_1 x_1 + m_2 x_2) \quad (4)$$

تعریف می‌شود، که در آن x_1 و x_2 مختصات دو ذره و M جرم کل سیستم است

$$M = m_1 + m_2$$

مرکز جرم یک سیستم دو جسمی نقطه‌ای است در فضا که با معادله ۴، در یک بعد، تعریف می‌شود. الزامی نیست که این نقطه، جزئی از این یا آن جسم باشد. سرعت مرکز جرم، v_{cm} ، از مشتق معادله ۴ نسبت به زمان به دست می‌آید

$$\begin{aligned} v_{cm} &= \frac{dx_{cm}}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d}{dt} (m_1 x_1 + m_2 x_2) \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{dx_1}{dt} + m_2 \frac{dx_2}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{M} (m_1 v_1 + m_2 v_2) \end{aligned} \quad (5)$$



شکل ۲. به دو جسم لغزنده که توسط فنر کشیده شده‌ای به هم متصل شده‌اند سرعت‌های اولیه دلخواهی داده شده است. این دو جسم حرکات پیچیده‌ای دارند، در حالی که مرکز جرم که با پرچم مشخص شده است با سرعت ثابت حرکت می‌کند. بازه‌های زمانی بین وضعیت‌های متوالی، با هم مساوی‌اند.

با خلاصه کردن نتایج بررسی این سیستم دو ذره‌ای یک‌بعدی، می‌بینیم که برای بعضی مقاصد معین می‌توانیم فرض کنیم که جرم کل سیستم در x_{cm} متمرکز شده است و با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند. به‌علاوه، در غیاب نیروی خارجی خالص، $a_{cm} = 0$ است و مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. در بخش‌های بعدی عبارتهای کلی‌تری برای این مفاهیم به‌دست می‌آوریم.

۹-۲ سیستم‌های بس-ذره‌ای

در این بخش نتایج بخش قبلی را به سیستم‌هایی در سه‌بعد که شامل بیش از دو ذره‌اند تعمیم می‌دهیم.

سیستمی شامل N ذره با جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_N را در نظر می‌گیریم. جرم کل این سیستم برابر است با

$$M = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum m_n$$

هر ذره این سیستم را می‌توان با جرمش، $(n = 1, 2, \dots, N)m_n$ موقعیتش در دستگاه مختصات \mathbf{r}_n (با مؤلفه‌های x_n, y_n, z_n)، سرعتش \mathbf{v}_n (با مؤلفه‌های v_{nx}, v_{ny}, v_{nz}) و شتابش \mathbf{a}_n نمایش داد. هر ذره تحت تأثیر نیروی \mathbf{F}_n قرار می‌گیرد که در حالت کلی برای ذرات مختلف متفاوت است. بخشی از این نیرو از $N-1$ ذره دیگر ناشی می‌شود و بخش دیگرش ممکن است ناشی از عوامل خارجی باشد.

مرکز جرم سیستم را می‌توان با تعمیم منطقی معادله ۴ تعریف کرد

$$\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_Nx_N) \\ &= \frac{1}{M}\sum m_nx_n \end{aligned} \quad (الف)$$

$$\begin{aligned} y_{cm} &= \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + \dots + m_Ny_N) \\ &= \frac{1}{M}\sum m_ny_n \end{aligned} \quad (ب)$$

است. در اینجا می‌توانید ببینید که مرکز جرم با سرعت ثابت حرکت می‌کند. کل سیستم اگرچه کاملاً پیچیده است.

معادله‌های ۴ و ۵ و ۶ خیلی کلی‌تر از آن‌اند که این مسئله خاص مطرح می‌کند. حالا برای اینکه مسئله را به کلی‌ترین صورت مطرح کرده باشیم، فرض می‌کنیم که به جسم m_1 ، علاوه بر نیروی داخلی \mathbf{F}_{12} که از طرف جسم m_2 وارد می‌شود، یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext,1}$ نیز اثر می‌کند. (مثلاً ممکن است ریل هوا شیب‌دار باشد و نیروی وزن اثر کند، یا ممکن است آزمایش روی سطحی که اصطکاک دارد انجام شود.) قانون دوم نیوتون در مورد m_1 نتیجه می‌دهد

$$\mathbf{F}_{ext,1} + \mathbf{F}_{12} = m_1\mathbf{a}_1 \quad (۷)$$

همچنین فرض می‌کنیم که بر جسم m_2 نیز یک نیروی خارجی $\mathbf{F}_{ext,2}$ و یک نیروی داخلی \mathbf{F}_{21} اثر کند، در این صورت داریم

$$\mathbf{F}_{ext,2} + \mathbf{F}_{21} = m_2\mathbf{a}_2 \quad (۸)$$

از جمع معادله‌های ۷ و ۸ نتیجه می‌شود

$$\mathbf{F}_{ext,1} + \mathbf{F}_{ext,2} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = m_1\mathbf{a}_1 + m_2\mathbf{a}_2 \quad (۹)$$

مجموع دو جمله اول، $\Sigma \mathbf{F}_{ext}$ ، نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم است (که قبلاً فرض کرده بودیم صفر باشد). مجموع دو جمله بعدی، $\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21}$ ، بنا به قانون سوم نیوتون که ایجاب می‌کند $\mathbf{F}_{12} = -\mathbf{F}_{21}$ باشد، صفر است. سمت راست معادله ۹، بنا به معادله ۶، برابر است با $M\mathbf{a}_{cm}$. به این ترتیب نتیجه کلی زیر به‌دست می‌آید:

$$\Sigma \mathbf{F}_{ext} = M\mathbf{a}_{cm} \quad (۱۰)$$

این رابطه بسیار شبیه به قانون دوم نیوتون است. قانون دوم است در مورد ذره‌ای به جرم M که در مکان x_{cm} با سرعت v_{cm} در حرکت باشد.

برهم‌کنش با ذرات دیگر همان سیستم ناشی می‌شوند و دسته دیگر نیروهای خارجی‌اند که از بیرون سیستم روی آن عمل می‌کنند. هر ذره m_n ممکن است تحت تأثیر نیرویی از ذره m_k واقع شود، که آن را با \mathbf{F}_{nk} نمایش می‌دهیم. این نیروی خاص یکی از نیروهایی است که نیروی \mathbf{F}_n ، نیروی کل وارد بر m_n را می‌سازد. به همین ترتیب، نیروی کل وارد بر m_k شامل جمله \mathbf{F}_{kn} است که از برهم‌کنش با ذره m_n ناشی می‌شود. بنابر قانون سوم نیوتون $\mathbf{F}_{nk} = -\mathbf{F}_{kn}$ است و در نتیجه، این دو نیروی خاص به هنگام جمع کردن همه نیروها در معادله ۱۵ هم‌دیگر را حذف می‌کنند. در واقع، همه چنین نیروهای داخلی‌ای، عضوی از یک زوج عمل-عکس‌العمل‌اند و نهایتاً حذف می‌شوند. (در فصل ۵ هشدار دادیم که نیروهای عمل-عکس‌العمل به ذرات متفاوت وارد می‌شوند و بنابراین نمی‌توانند با هم مخالفت کنند. اینجا هم این هشدار را فراموش نکرده‌ایم؛ باز هم عمل به یک ذره وارد می‌شود و عکس‌العمل به ذره دیگر، اینجا فرقی در این است که ما نیروها را جمع می‌کنیم تا نیروی خالص وارد بر دو ذره را به دست بیاوریم، و در این صورت، اعضای زوج عمل-عکس‌العمل، که همچنان به ذرات متفاوت وارد می‌شوند، واقعاً یکدیگر را حذف می‌کنند.) پس آنچه باقی می‌ماند کل نیروهای خارجی است و معادله ۱۵ به صورت زیر در می‌آید

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (16)$$

که می‌توان آن را برحسب مؤلفه‌هایش هم نوشت

$$\Sigma F_{\text{ext},x} = M a_{\text{cm},x}, \quad \Sigma F_{\text{ext},y} = M a_{\text{cm},y}$$

و

$$\Sigma F_{\text{ext},z} = M a_{\text{cm},z}$$

می‌توانیم این نتیجه مهم را به صورت زیر بیان کنیم:

حرکت انتقالی کلی یک سیستم از ذرات را می‌توان با استفاده از قوانین نیوتون تجزیه و تحلیل کرد؛ با این فرض که کل جرم سیستم در مرکز جرم متمرکز شده است و کل نیروی خارجی به آن نقطه وارد می‌شود.

یک نتیجه ضمنی هم برای حالت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ حاصل می‌شود:

اگر نیروی خالص خارجی وارد بر یک سیستم ذرات صفر باشد، مرکز جرم این سیستم با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

این مطلب، مشاهدات ما در بخش ۹-۱ را، در مورد مسئله حرکت دو جرم که با فنر به هم متصل‌اند، توضیح می‌دهد.

اینها نتایجی هستند کلی، که هم در مورد مجموعه‌ای از ذرات منفرد و هم در مورد ذراتی که مانند ذرات یک جسم جامد توسط بندها، داخل به هم متصل‌اند به‌کار می‌روند. خود جسم ممکن

$$\begin{aligned} z_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 z_1 + m_2 z_2 + \dots + m_N z_N) \\ &= \frac{1}{M} \Sigma m_n z_n \end{aligned} \quad (11)$$

با نمادهای برداری، این سه معادله را می‌توان به صورت جمع‌وجورتر، یعنی به شکل یک تک عبارت نوشت که موقعیت مرکز جرم را می‌دهد

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2 + \dots + m_N \mathbf{r}_N) \\ &= \frac{1}{M} \Sigma m_n \mathbf{r}_n \end{aligned} \quad (12)$$

با مشتق‌گیری از این عبارت، سرعت مرکز جرم به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{cm}} &= \frac{d\mathbf{r}_{\text{cm}}}{dt} \\ &= \frac{1}{M} \left(m_1 \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} + m_2 \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} + \dots + m_N \frac{d\mathbf{r}_N}{dt} \right) \end{aligned} \quad (13)$$

یا

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{\text{cm}} &= \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N) \\ &= \frac{1}{M} \Sigma m_n \mathbf{v}_n \end{aligned} \quad (13)$$

با یک مشتق‌گیری دیگر، شتاب مرکز جرم را به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{\text{cm}} &= \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = \frac{1}{M} (m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N) \\ &= \frac{1}{M} \Sigma m_n \mathbf{a}_n \end{aligned} \quad (14)$$

معادله ۱۴ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

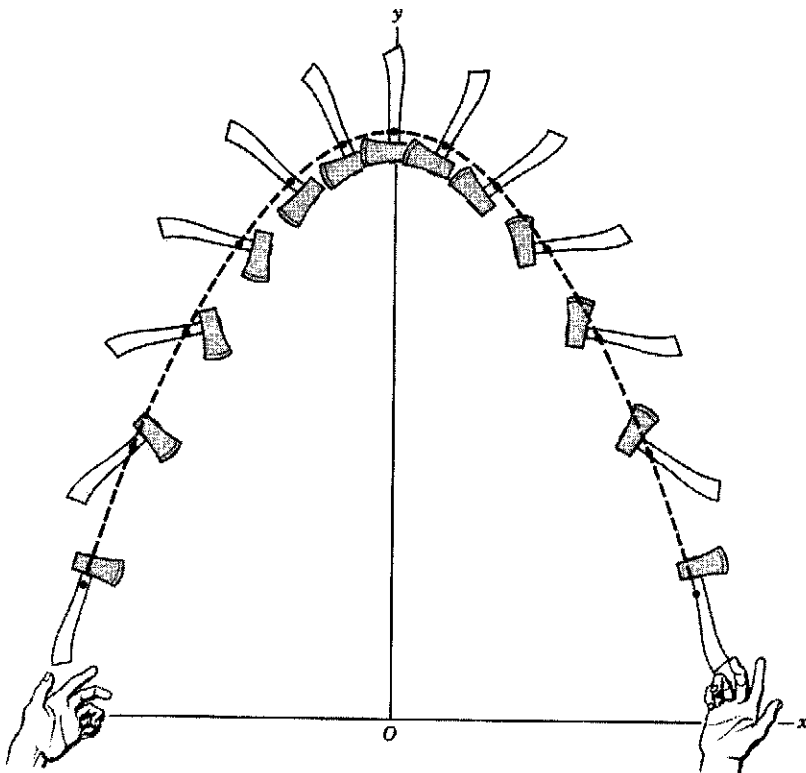
$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = m_1 \mathbf{a}_1 + m_2 \mathbf{a}_2 + \dots + m_N \mathbf{a}_N$$

یا

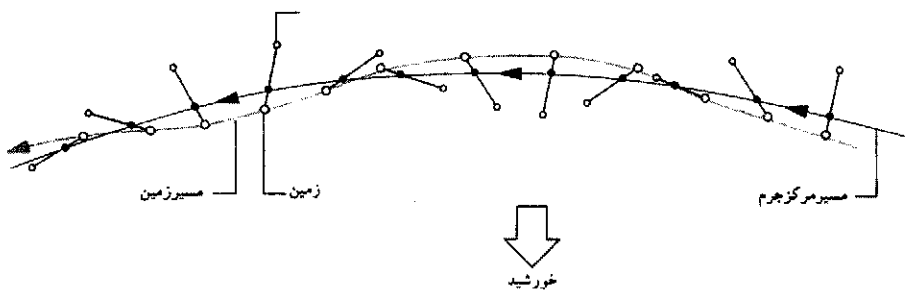
$$M \mathbf{a}_{\text{cm}} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_N \quad (15)$$

طرف راست معادله ۱۵ مثل این است که قانون دوم نیوتون، یعنی $\mathbf{F}_n = m_n \mathbf{a}_n$ ، را به تک‌تک ذرات سیستم اعمال کرده باشیم. به این ترتیب نیروی کل وارد بر یک سیستم ذرات برابر است با جرم کل سیستم ضربدر شتاب مرکز جرم. معادله ۱۵ همان قانون دوم نیوتون برای یک سیستم N ذره‌ای است که به صورت یک تک ذره به جرم M واقع در مرکز جرم در نظر گرفته شده است. این تک ذره با سرعت \mathbf{v}_{cm} حرکت می‌کند و شتابش \mathbf{a}_{cm} است.

معادله ۱۵ را می‌توانیم از این هم که هست کمی ساده‌تر کنیم. در میان نیروهای وارد بر ذرات، یک دسته نیروها، \mathbf{F}_{nk} که از



شکل ۳. تبری که بین دو بازیگر پرتاب شده است. این تبر در حین انتقال می‌چرخد. مسیر سهمی شکل مرکز جرم را (که با نقطه روی تبر مشخص شده است) با خط چین نشان داده‌ایم. تک ذره‌ای که به همین صورت پرتاب شده باشد، همین مسیر را طی می‌کند. حرکت نقطه دیگری از تبر به این سادگی نیست.



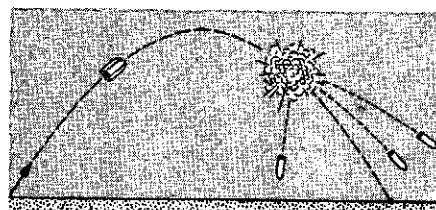
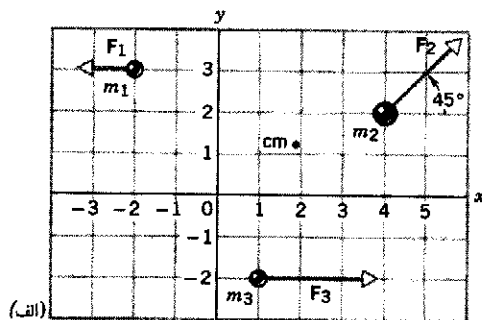
شکل ۴. مرکز جرم سیستم زمین-ماه یک مقدار تقریباً دایره‌ای را طی می‌کند، در حالی که زمین و ماه هر کدام حول مرکز جرم مشترکشان می‌گردند (همان‌طور که تبر شکل ۳ می‌چرخید). این اثر که موجب یک "انحراف" جزئی در مدار زمین می‌شود، در شکل به صورت بسیار اغراق‌آمیزی نشان داده شده است. مرکز جرم سیستم زمین-ماه عملاً در داخل زمین است، به طوری که زمین همواره روی مسیر مداری مرکز جرم واقع می‌شود.

می‌کند (این همان مسیری است که اگر ذره‌ای با جرم $m_{\text{ماه}} + m_{\text{زمین}}$ داشتیم طی می‌کرد). زمین و ماه حول مرکز جرم مشترکشان دوران هم می‌کنند، و این موجب می‌شود که زمین در اطراف مسیر مدار پایدار نوسان کوچکی داشته باشد. با استفاده از داده‌های پیوست ج، می‌توانیم نشان بدهیم که مرکز جرم سیستم زمین-ماه تقریباً در فاصله ۴۶۰۰ کیلومتر از مرکز زمین قرار دارد و بنابراین در داخل زمین (که شعاع متوسطش ۶۳۷۰ کیلومتر است) واقع می‌شود.

در شکل ۵ حرکت یک موشک بالستیک که به سه پاره شکافته می‌شود نشان داده شده است. انفجاری سه کلاهک را از هم جدا و به اطراف پرتاب می‌کند، اما این انفجار چون فقط نیروهای داخلی تولید می‌کند تأثیری بر حرکت مرکز جرم ندارد. مرکز جرم در همان مسیر

است هر حرکت پیچیده‌ای داشته باشد، ولی مرکز جرم آن مطابق معادله ۱۶ حرکت می‌کند. شکل ۳ حرکت یک جسم ناهمگن را تحت تأثیر گرانش نشان می‌دهد. این جسم در حین انتقال، چرخش هم دارد، اما مرکز جرم آن مسیر سهمی ساده‌ای را طی می‌کند. تا آنجا که به نیروی خارجی (گرانش) مربوط می‌شود سیستم چنان رفتار می‌کند که گویی ذره‌ای است به جرم M که در مرکز جرم قرار گرفته است. به این ترتیب یک مسئله پیچیده به دو مسئله نسبتاً ساده کاهش یافته است — حرکت مرکز جرم روی مسیر سهمی، و چرخش حول مرکز جرم.

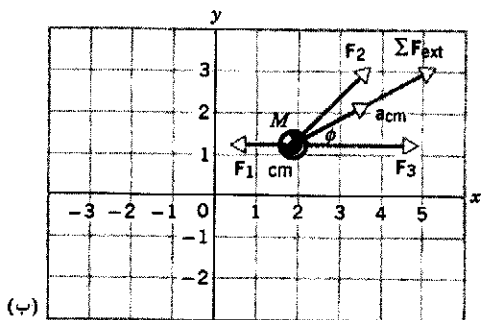
به‌عنوان مثالی دیگر، سیستم زمین-ماه را، که تحت تأثیر گرانش خورشید (نیروی خارجی) حرکت می‌کند، در نظر بگیرید. شکل ۴ نشان می‌دهد که مرکز جرم سیستم مسیر پایداری را حول خورشید طی



مرکز جرم

شکل ۵. موشکی شامل سه کلاهک، در یک مسیر سهموی در حرکت است. این کلاهکها در اثر یک انفجار رها می‌شوند و چنان حرکت می‌کنند که مرکز جرم آنها همان مسیر سهموی اولیه را می‌پیماید.

اولیه موشک به حرکتش ادامه می‌دهد، چنانکه گویی انفجاری صورت نگرفته است؛ این البته تا وقتی است که هیچ یک از کلاهکها تحت تأثیر نیروی، مثلاً مقاومت هوا یا ضربه ناشی از برخورد با هدف و غیره، قرار نگرفته باشد.



شکل ۶. مثال ۱. الف) سه ذره در حالت سکون در موقعیتهای نشان داده شده قرار گرفته‌اند. به این ذره‌ها نیروهای معینی وارد می‌شوند. مرکز جرم سیستم مشخص شده است. ب) حرکت انتقالی کل سیستم را می‌توان با حرکت ذره‌ای به جرم کل M که در مکان مرکز جرم واقع شده و تحت تأثیر سه نیروی خارجی است، نشان داد. برابند نیروها و شتاب مرکز جرم را در شکل مشخص کرده‌ایم.

شکل ۶ ب

مثال ۱. شکل ۶ الف سیستمی شامل سه ذره است که در ابتدا ساکن‌اند. جرم این ذرات به ترتیب $m_1 = 4.1 \text{ kg}$ ، $m_2 = 8.2 \text{ kg}$ و $m_3 = 4.1 \text{ kg}$ است. این ذرات تحت تأثیر نیروهای خارجی متفاوتی قرار می‌گیرند که عبارت‌اند از $F_1 = 6 \text{ N}$ ، $F_2 = 12 \text{ N}$ و $F_3 = 14 \text{ N}$. جهت این نیروها در شکل مشخص شده است. مرکز جرم این سیستم در کجا واقع شده و شتاب آن چقدر است؟

حل: موقعیت مرکز جرم با نقطه در شکل نشان داده شده است. همان‌طور که از شکل ۶ ب برمی‌آید می‌شود فرض کرد که در این نقطه ذره‌ای واقعی با جرمی برابر مجموع جرم هر سه ذره، یعنی $M = m_1 + m_2 + m_3 = 16.4 \text{ kg}$ قرار گرفته است و همه نیروهای خارجی بر آن وارد می‌شود. مختصات مرکز جرم را از معادله‌های ۱۱ الف و ۱۱ ب پیدا می‌کنیم

$$F_{\text{ext},x} = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} \\ = -6\text{N} + (12\text{N})(\cos 45^\circ) + 14\text{N} = 16.5\text{N}$$

و مؤلفه y این نیرو برابر است با

$$F_{\text{ext},y} = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} \\ = 0 + (12\text{N})(\sin 45^\circ) + 0 = 8.5\text{N}$$

به این ترتیب مقدار نیروی خارجی خالص برابر است با

$$F_{\text{ext}} = \sqrt{(F_{\text{ext},x})^2 + (F_{\text{ext},y})^2} = \sqrt{(16.5\text{N})^2 + (8.5\text{N})^2} \\ = 18.6\text{N}$$

و زاویه‌ای که با محور x می‌سازد از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_{\text{ext},y}}{F_{\text{ext},x}} = \tan^{-1} \frac{8.5\text{N}}{16.5\text{N}} = 27^\circ$$

بردار شتاب هم در همین جهت است. بنابر معادله ۱۶ مقدار شتاب مرکز جرم برابر است با

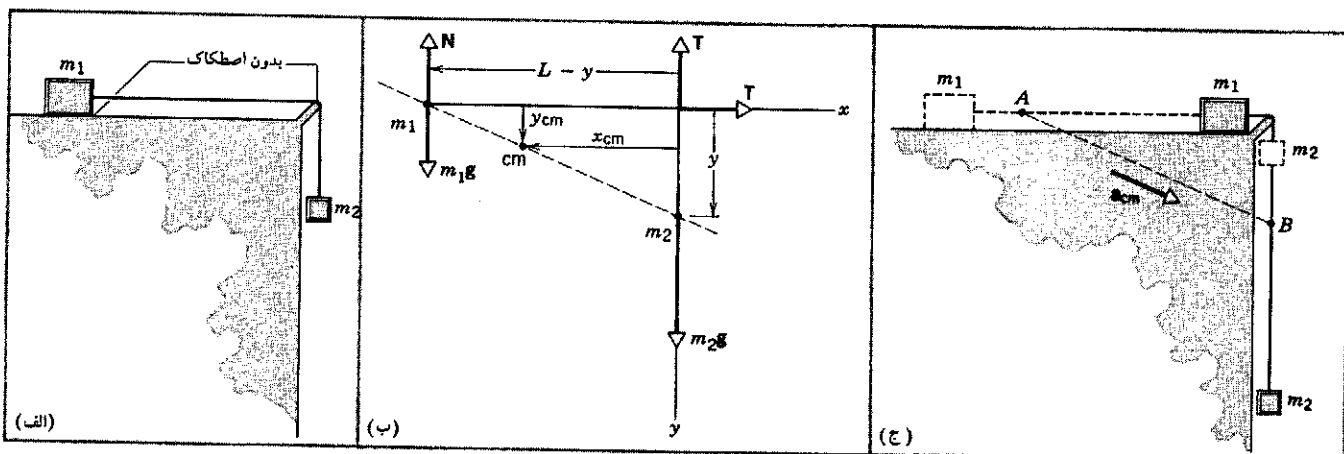
$$a_{\text{cm}} = \frac{F_{\text{ext}}}{M} = \frac{18.6\text{N}}{16.4\text{kg}} = 1.1\text{m/s}^2$$

$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3) \\ = \frac{1}{16.4\text{kg}}[(4.1\text{kg})(-2\text{cm}) + (8.2\text{kg})(4\text{cm}) \\ + (4.1\text{kg})(1\text{cm})] = 1.8\text{cm}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{1}{M}(m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3) \\ = \frac{1}{16.4\text{kg}}[(4.1\text{kg})(3\text{cm}) + (8.2\text{kg})(2\text{cm}) \\ + (4.1\text{kg})(-2\text{cm})] = 1.3\text{cm}$$

توجه کنید که در این محاسبات، مخلوط کاملاً قابل قبولی از یکاها را به کار برده‌ایم.

مؤلفه x نیروی خارجی خالص وارد بر مرکز جرم عبارت است از



شکل ۷. مثال ۲. (الف) دو جسم توسط ریسمانی به طول L به همدیگر متصل شده‌اند. این ریسمان از روی تکیه‌گاه بدون اصطکاک می‌گذرد. (ب) نیروهای خارجی وارد بر سیستم نشان داده شده است. تکیه‌گاه بدون اصطکاک یک نیروی خارجی بر ریسمان اعمال می‌کند که هر کدام از مؤلفه‌های آن برابر کشش T در ریسمان است (که نیرویی داخلی است و بنابراین نشان داده نشده است). (ج) مرکز جرم از نقطه A به نقطه B می‌رود. در نقطه A جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد و در نقطه B جسم m_1 به تکیه‌گاه رسیده است. با سقوط جسم m_2 ، جسم m_1 به سمت راست حرکت می‌کند، و در نتیجه مرکز جرم سیستم هم باید به سمت راست حرکت کند. نیروی افقی T تنها نیروی خارجی ممکن است که می‌تواند موجب حرکت افقی مرکز جرم شود. البته نیروی خارجی ناشی از گرانش هم موجب حرکت مرکز جرم به طرف پایین می‌شود.

حالا قوانین نیوتون را به کار می‌بریم. در شکل ۷ ب، نیروی خارجی اعمال شده توسط تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر ریسمانی که دو جسم را به هم متصل کرده به مؤلفه‌های x و y تجزیه شده است. مقدار هر کدام از این مؤلفه‌ها برابر با T (کشش ریسمان) است. با استفاده از معادله ۱۶ داریم

$$T = M a_{cm,x} \quad \text{مؤلفه } x$$

$$m_1 g - N + m_2 g - T = M a_{cm,y} \quad \text{مؤلفه } y$$

با جانشانی مقادیر $a_{cm,x}$ و $a_{cm,y}$ می‌توانیم T را بین این دو معادله حذف کنیم و با در نظر گرفتن اینکه $m_1 g = N$ است، شتاب را به دست بیاوریم

$$a = g \frac{m_2}{M}$$

که با نتیجه‌ای که قبلاً در فصل ۵ به دست آورده‌ایم سازگار است. توجه کنید که در این مثال، باید نیروی خارجی اعمال شده از تکیه‌گاه بدون اصطکاک بر سیستم را در نظر بگیریم. این نیرو وقتی نیروهای وارد بر جسم ۱ و جسم ۲ را جداگانه بررسی می‌کنیم در معادلات وارد نمی‌شود.

اگر سیستم از حالت سکون از وضعیتی که در آن جسم m_2 در بالاترین موقعیت قرار دارد رها شود؛ حرکت مرکز جرم، در امتداد خط راستی است که در شکل ۷ ج می‌بینید. جهت a_{cm} را می‌توان از جمع برداری پنج نیروی وارد بر سیستم، که در شکل ۷ ب نشان داده شده است، تعیین کرد.

هر سه ذره شکل ۶ الف و نیز مرکز جرم آنها با شتابهای ثابت (ولی متفاوت) حرکت می‌کنند. اگر ذرات از حالت سکون شروع به حرکت کرده باشند، هر یک با سرعت فزاینده در امتداد یک خط راست در جهت نیروی وارد بر آن حرکت خواهد کرد.

مثال ۲. در سیستم شکل ۷ الف، اندازه شتاب مشترک دو قالب را پیدا کنید. قبلاً این مسئله را در مثال ۸ فصل ۵ با اعمال کردن قانون نیوتون به هر یک از دو قالب، حل کرده‌ایم. این بار مسئله را با در نظر گرفتن حرکت مرکز جرم سیستم دو ذره‌ای حل کنید. حل: شکل ۷ ب نمودار جسم آزاد مربوط به سیستم دو ذره‌ای را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از معادله‌های ۱۱ الف ۱۱ ب، مرکز جرم سیستم (شکل ۷ ب) را تعیین می‌کنیم

$$y_{cm} = \frac{m_2}{M} y \quad \text{و} \quad x_{cm} = -\frac{m_1}{M} (L - y)$$

در رابطه بالا L طول ریسمان و y مختصه قائم جرم m_2 است. با مشتق‌گیری نسبت به زمان، می‌توانیم مؤلفه‌های سرعت مرکز جرم را تعیین کنیم

$$v_{cm,y} = \frac{m_2}{M} v \quad \text{و} \quad v_{cm,x} = -\frac{m_1}{M} v$$

که $v (= dy/dt)$ مقدار سرعت مشترک دو قالب است. با مشتق‌گیری مجدد، می‌توانیم مؤلفه‌های شتاب را پیدا کنیم

$$a_{cm,y} = \frac{m_2}{M} a \quad \text{و} \quad a_{cm,x} = -\frac{m_1}{M} a$$

که $a (= dv/dt)$ مقدار شتاب مشترک دو قالب است.

۳-۹ مرکز جرم اجسام صلب

تعیین مرکز جرم جسم جامد با استفاده از معادله ۱۲ و جمع بستن روی تک-تک اتمهای سیستم عملاً مشکل‌تر از آن است که ممکن باشد. در عوض جسم را به اجزای بسیار کوچکی به جرم δm_n تقسیم می‌کنیم. وقتی این اجزاء بسیار بسیار کوچک شوند، جمعهای مربوط به معادله‌های ۱۱ و ۱۲ به انتگرال تبدیل می‌شوند

$$x_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum x_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int x \, dm \quad (الف) \quad (۱۷)$$

$$y_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum y_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int y \, dm \quad (ب) \quad (۱۷)$$

$$z_{cm} = \frac{1}{M} \lim_{\delta m \rightarrow 0} \sum z_n \delta m_n = \frac{1}{M} \int z \, dm \quad (ج) \quad (۱۷)$$

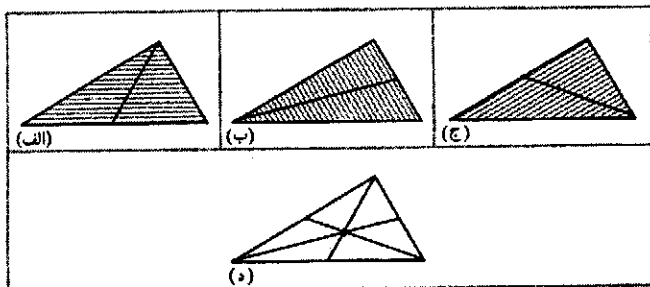
این معادله‌ها را می‌توان به صورت برداری هم نوشت

$$\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M} \int \mathbf{r} \, dm \quad (۱۸)$$

در بسیاری از موارد، با استفاده از ملاحظات بر هندسی یا تقارن، امکان ساده‌سازی محاسبات مربوط به مرکز جرم اجسام جامد وجود دارد. جسمی که تقارن کروی دارد، مرکز جرمش باید در مرکز هندسی کره قرار بگیرد. (لازم نیست که در این مورد چگالی ثابت باشد؛ مثلاً توپ بیسبال با آنکه از لایه‌هایی از مواد مختلف تشکیل شده است تقارن کروی دارد. مرکز جرم آن بر مرکز هندسی‌اش واقع است. وقتی از تقارن کروی صحبت می‌کنیم، منظورمان این است که چگالی ممکن است با r تغییر کند ولی این تغییر باید در همه جهتها یکسان باشد.) اگر جامدی دارای تقارن استوانه‌ای باشد (یعنی، اگر جرم آن به‌طور متقارن حول محوری توزیع شده باشد)، در این صورت مرکز جرم آن باید روی آن محور واقع شود. اگر جرم به‌طور متقارن حول یک صفحه توزیع شده باشد، مرکز جرم باید در آن صفحه باشد.

اغلب با اجسام جامد نامنظمی مواجه می‌شویم که می‌توانیم آنها را به چند قسمت تقسیم کنیم. می‌توانیم مرکز جرم هر قسمت را پیدا کنیم و سپس هر قسمت را مثل ذره‌ای مستقر در مرکز جرم خودش در نظر بگیریم و مرکز جرم جسم مرکب را پیدا کنیم.

به عنوان مثال، یک ورق مثلث را در نظر بگیرید. این ورق را به تعداد زیادی نوارهای باریک موازی با قاعده مثلث تقسیم می‌کنیم (شکل ۸). مرکز جرم هر نوار باید در مرکز هندسی آن واقع شود و بنابراین مرکز جرم ورق باید در جایی روی خطی که مرکزهای نوارها را به هم متصل می‌کند باشد. (هر نوار را با یک جرم نقطه‌ای مستقر در مرکز جرم نوار جایگزین می‌کنیم. از رشته این جرمهای نقطه‌ای عملاً یک جسم یک‌بعدی ایجاد می‌شود که مرکز جرم آن باید مطمئناً روی خود این خط قرار بگیرد.) با تکرار همین روش برای نوارهای موازی با دو ضلع دیگر (شکلهای ۸ب و ۸ج)، دو خط دیگر به دست می‌آوریم که هر یک از آنها هم باید شامل مرکز جرم ورق



شکل ۸. در (الف)، (ب)، و (ج)، مثلث به نوارهای باریکی موازی با هر یک از سه ضلع تقسیم شده است، مرکز جرم در هر مورد باید روی خط میانه که از وسط نوارهای موازی گذشته است قرار بگیرد. (د) تنها نقطه مشترک این سه خط، محل تقاطع آنهاست که همان مرکز جرم مثلث است.

سه خط (شکل ۸د) می‌بینیم که تنها نقطه مشترک آنها الزاماً باید مرکز جرم مثلث باشد.

مثال ۳. شکل ۹الف یک ورق فلزی دایره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهد که از آن قرصی به شعاع R درآورده شده است. این جسم را، که مرکز جرم آن با نقطه‌ای روی محور x نشان داده شده است، X می‌نامیم. محل دقیق این نقطه را پیدا کنید.

حل: شکل ۹ب جسم X را نشان می‌دهد، که سوراخ آن با قرصی به شعاع R پر شده است. این قرص را جسم D ، و قرص مرکب یکنواختی را که به این ترتیب ایجاد می‌شود جسم C می‌نامیم. با استفاده از تقارن می‌دانیم که مرکز جرم جسم C در مبدأ دستگاه مختصات قرار دارد.

برای پیدا کردن مرکز جرم یک جسم مرکب، می‌توانیم فرض کنیم که جرم هر یک از اجزای آن در مرکز جرم آن جزء متمرکز شده است. پس می‌توانیم جسم C را معادل دو جرم نقطه‌ای که نماینده اجسام X و D هستند در نظر بگیریم. شکل ۹ج محل مراکز جرمهای این سه جسم را نشان می‌دهد.

مکان مرکز جرم جسم C از معادله ۱الف به دست می‌آید

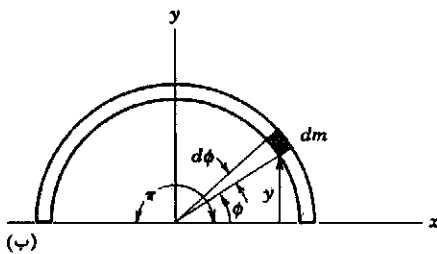
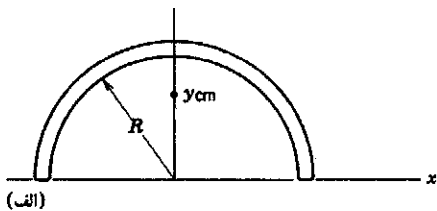
$$x_C = \frac{m_D x_D + m_X x_X}{m_D + m_X}$$

x_D و x_X به ترتیب عبارت‌اند از مکان مراکز جرمهای اجسام D و X . با توجه به اینکه $x_C = 0$ است، معادله را برای x_X حل می‌کنیم و نتیجه می‌گیریم

$$x_X = -\frac{x_D m_D}{m_X}$$

نسبت m_D/m_X باید مثل نسبت مساحت اجسام D و X باشد

چگالی یکنواخت و ضخامت یکنواخت



شکل ۱۰. مثال ۴. (الف) نوار نازک فلزی را به شکل نیمدایره در آورده‌ایم. (ب) عنصری از نوار به جرم dm در مختصه ϕ قرار گرفته است.

تعیین y_{cm} از معادله ۱۷ استفاده می‌کنیم. عنصر کوچک با جرم dm را که در شکل ۱۰ ب نشان داده شده است در نظر بگیرید. این عنصر روبه‌روی زاویه $d\phi$ است، و چون جرم M کل نوار روبه‌روی زاویه π است (یک دایره کامل زاویه 2π را دربر می‌گیرد)، جرم dm باید همان کسر از M باشد که $d\phi$ از π است. یعنی، $dm/M = d\phi/\pi$ ، یا $dm = (M/\pi)d\phi$ در موقعیت $y = R \sin \phi$ قرار گرفته است. در این مورد معادله ۱۷ ب را می‌توان به صورت زیر نوشت

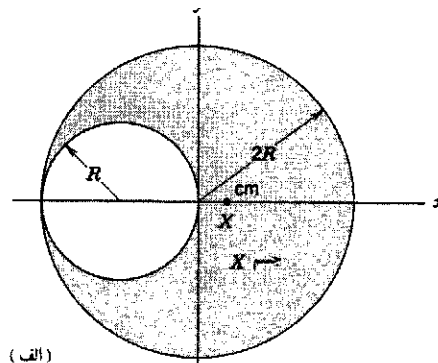
$$y_{cm} = \frac{1}{M} \int y dm = \frac{1}{M} \int_0^{\pi} (R \sin \phi) \frac{M}{\pi} d\phi$$

$$= \frac{R}{\pi} \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi = \frac{2R}{\pi} = 0.637R$$

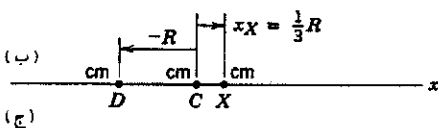
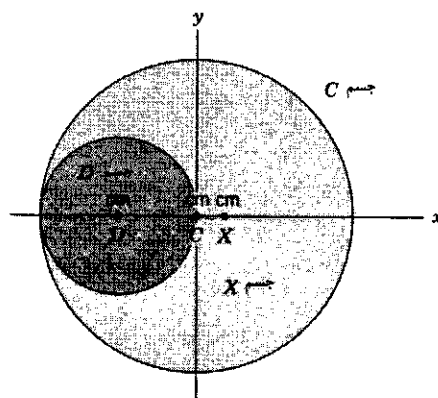
مرکز جرم تقریباً در فاصله دو سوم شعاع در امتداد محور y است. توجه داشته باشید که، همان‌طور که در این مثال نشان داده شد، لازم نیست مرکز جرم حتماً در داخل حجم یا ماده جسم باشد.

مثال ۵. گویی به جرم m و شعاع R در داخل یک پوسته کروی با همان جرم m و شعاع داخلی $2R$ قرار داده شده است. این جسم مرکب روی میزی در حال سکون است (شکل ۱۱ الف). گوی از محل اولیه‌اش رها می‌شود و در داخل پوسته به پس و پیش می‌غلتد و سرانجام در پایین متوقف می‌شود (شکل ۱۱ ج). در طی این فرایند جابه‌جایی d پوسته چقدر است؟

حل: تنها نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم گوی-پوسته عبارت‌اند از نیروی گرانی به طرف پایین و نیروی عمودی به طرف بالا که از میز وارد می‌شود. هیچ یک از نیروها مؤلفه افقی ندارند. بنابراین $\Sigma F_{ext,x} = 0$ است. از معادله ۱۶، مؤلفه افقی شتاب مرکز جرم هم باید صفر باشد. یعنی مکان افقی مرکز جرم سیستم باید ثابت بماند، و پوسته باید چنان حرکت کند که جای مرکز جرم تغییر نکند.



(الف)



(ب)

(ج)

شکل ۹. مثال ۳. (الف) جسم X یک قرص فلزی به شعاع $2R$ است که در آن یک سوراخ به شعاع R ایجاد شده است. (ب) جسم D یک قرص فلزی است که سوراخ جسم X را پر می‌کند؛ مرکز جرم آن در $x_D = -R$ قرار دارد. جسم C یک قرص مرکب است که از اجسام X و D به وجود آمده است؛ مرکز جرم آن در مبدأ مختصات است. (ج) مرکزهای جرم سه جسم.

است). یعنی

$$\frac{m_D}{m_X} = \frac{\text{مساحت } D}{\text{مساحت } X} = \frac{\text{مساحت } D}{(\text{مساحت } C - \text{مساحت } X)}$$

$$= \frac{\pi R^2}{\pi (2R)^2 - \pi R^2} = \frac{1}{3}$$

می‌دانیم $x_D = -R$ است، پس خواهیم داشت

$$x_X = \frac{1}{3}R$$

مثال ۴. نوار نازکی را به صورت نیمدایره‌ای به شعاع R در آورده‌ایم (شکل ۱۰). مرکز جرم این جسم را پیدا کنید.

حل: در این مورد با استفاده از یک مختصه زاویه‌ای می‌شود کار انتگرال‌گیری را ساده‌تر کرد. به علاوه، از تقارن جسم نتیجه می‌گیریم که مرکز جرم باید روی محور y باشد (یعنی، $x_{cm} = 0$). بنابراین برای

در می‌آید. چرا این نیروی اصطکاک در مکان‌هایی مرکز جرم مؤثر نیست؟

۹-۴ تکانه خطی ذره

تکانه هر ذره برداری است مانند p که به صورت حاصل ضرب جرم آن ذره در سرعتش v تعریف می‌شود

$$p = mv \quad (19)$$

تکانه، که حاصل ضرب یک کمیت اسکالر در یک بردار است، خودش یک بردار است. چون p متناسب با v است؛ بستگی به چارچوب مرجع ناظر دارد؛ بنابراین همواره باید این چارچوب را مشخص کنیم. نیوتون، در پرنکیپای معروفش، قانون دوم حرکت را برحسب تکانه (که خودش آن را "مقدار حرکت" می‌نامید) بیان کرده است. قانون دوم نیوتون یا اصطلاحات امروزی چنین بیان می‌شود:

آهنگ تغییر تکانه هر جسم برابر با نیروی برآیند وارد بر آن جسم و در جهت همان نیروست.

به صورت نمادی یعنی اینکه

$$\Sigma F = \frac{dp}{dt} \quad (20)$$

که در آن ΣF نیروی برآیند وارد بر ذره است.

برای یک تک ذره با جرم ثابت، این صورت از قانون دوم هم‌ارز صورت $F = ma$ است که تاکنون از آن استفاده کرده‌ایم. یعنی، اگر m ثابت باشد،

$$F = \frac{dp}{dt} = \frac{d}{dt}(mv) = m \frac{dv}{dt} = ma$$

در مکانیک کلاسیک دو رابطه $F = dp/dt$ و $F = ma$ برای تک‌ذره کاملاً هم‌ارزند.

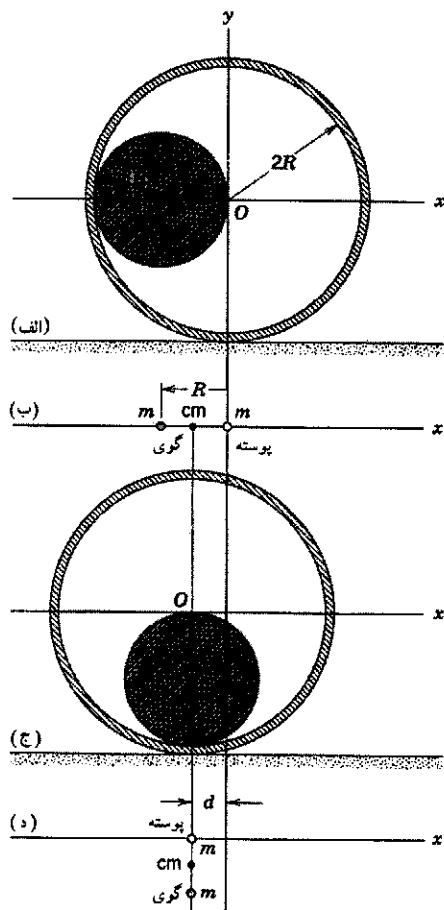
از ترکیب رابطه‌های $K = \frac{1}{2}mv^2$ و $p = mv$ رابطه مفیدی بین تکانه و انرژی جنبشی به دست می‌آید

$$K = \frac{p^2}{2m} \quad (21)$$

تکانه در سرعت‌های زیاد (اختیاری)

وقتی سرعت ذره نزدیک به سرعت نور باشد (ناحیه‌ای که در آن باید از نظریه نسبیت به جای مکانیک نیوتونی استفاده کرد)، دیگر قانون دوم نیوتون به صورت $F = ma$ معتبر نیست. اما معلوم می‌شود که این قانون به صورت $F = dp/dt$ هنوز هم معتبر است مشروط بر اینکه تکانه p تک‌ذره را نه به صورت mv بلکه به صورت

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad (22)$$



شکل ۱۱. مثال ۵. (الف) گویی با شعاع R از این مکان اولیه رها شده است و می‌تواند آزادانه در داخل پوسته کروی به شعاع $2R$ بغلند. (ب) مرکز جرم گوی، پوسته کروی و ترکیب آنها. (ج) وضعیت نهایی پس از آنکه گوی به حال سکون درآمد. پوسته کروی چنان جابه‌جا می‌شود که مرکز جرم سیستم در جای خودش باقی می‌ماند. (د) مراکز جرمهای گوی، پوسته کروی، و ترکیب آنها.

می‌توانیم هم گوی و هم پوسته را با تک ذراتی با جرم m نمایش بدهیم که هر کدام در مرکز جرم مربوط به خودش قرار گرفته است. شکل ۱۱ ب سیستم را قبل از رها کردن گوی نشان می‌دهد و شکل ۱۱ د نمایش حالتی است که گوی در پایین پوسته متوقف شده است. مبدأ مختصات را منطبق مکان اولیه مرکز پوسته می‌گیریم. شکل ۱۱ ب نشان می‌دهد که، نسبت به این مبدأ مختصات، مرکز جرم سیستم گوی-پوسته در فاصله $\frac{1}{3}R$ در سمت چپ مبدأ قرار دارد. این نقطه در وسط دو ذره است. شکل ۱۱ د نشان می‌دهد که جابه‌جایی پوسته عبارت است از

$$d = \frac{1}{3}R$$

پوسته باید در طی مدتی که گوی به حال سکون در می‌آید این مقدار به سمت چپ حرکت کند.

گوی در اثر اصطکاکی که با پوسته کروی

MeV/c ، و مانند آنها. این انتخاب به ما امکان می‌دهد که کمیت pc را برحسب یکاهای انرژی مانند MeV بیان کنیم و کارکردن با روابطی مانند معادله ۲۳ را بسیار ساده‌تر می‌کند. مثلاً برای الکترونی با تکانه معلوم $0.5 \text{ MeV}/c$ ، جمله pc در معادله ۲۳ برابر با 0.5 MeV است. انرژی جنبشی الکترون را می‌توانیم به راحتی از این معادله محاسبه کنیم و برای آن مقدار 1.1 MeV را به دست می‌آوریم.

در ناحیه سرعت‌های بسیار زیاد، تکانه ذره ممکن است آنقدر بزرگ باشد که جمله pc در معادله ۲۳ خیلی بزرگتر از جمله mc^2 شود، و در این صورت معادله با تقریب خوبی به $K = pc$ کاهش می‌یابد. بیان تکانه برحسب یکای انرژی تقسیم بر c در این ناحیه بسیار مفید است. مثلاً الکترونی که تکانه آن برابر $0.5 \text{ MeV}/c$ است انرژی جنبشی‌ای خیلی نزدیک به 0.5 MeV دارد. (توجه کنید که این تقریب برای الکترون 0.5 MeV که قبلاً در نظر گرفته شد هیچ خوب نیست.)

۹-۵ تکانه خطی سیستمی از ذرات

تصور کنید که به جای یک تک‌ذره، سیستمی شامل N ذره با جرم‌های m_1, m_2, \dots, m_N داشته باشیم. فرض می‌کنیم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود، یعنی جرم کل M (یعنی $\sum m_n$) سیستم در طی زمان ثابت می‌ماند. ذرات می‌توانند با هم برهم‌کنش داشته باشند و ممکن است نیروهای خارجی به آنها وارد شود. هر ذره در چارچوب مرجعی که مورد استفاده است، سرعت و تکانه معینی دارد. سیستم دارای تکانه کل \mathbf{P} است، که طبق تعریف برابر با جمع برداری تکانه‌های تک‌تک ذرات آن در همان چارچوب مرجع است:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_N$$

$$= m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 + \dots + m_N \mathbf{v}_N \quad (24)$$

اگر این رابطه را با معادله ۱۳ مقایسه کنیم، فوراً درمی‌یابیم که

$$\mathbf{P} = M \mathbf{v}_{\text{cm}} \quad (25)$$

که تعریفی هم‌ارز برای تکانه سیستمی متشکل از ذرات است

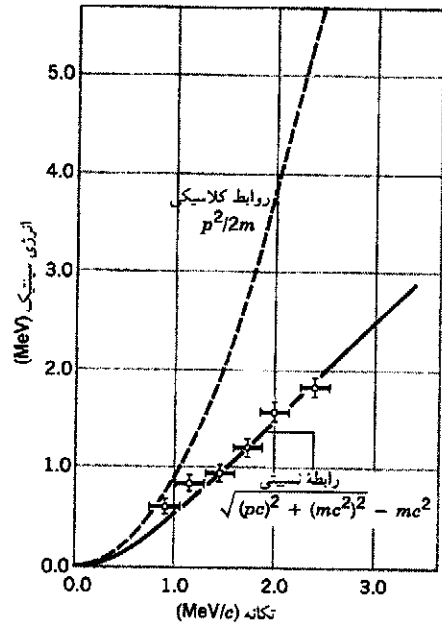
تکانه خطی کل سیستمی از ذرات برابر است با حاصل ضرب جرم کل سیستم در سرعت مرکز جرم آن.

اگر از معادله ۲۵، با فرض ثابت بودن جرم، نسبت به زمان مشتق بگیریم، نتیجه می‌شود

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = M \frac{d\mathbf{v}_{\text{cm}}}{dt} = M \mathbf{a}_{\text{cm}} \quad (26)$$

با توجه به معادله ۲۶ و معادله ۱۶ (یعنی $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = M \mathbf{a}_{\text{cm}}$) می‌توانیم قانون دوم نیوتون برای سیستمی از ذرات به صورت زیر بنویسیم

$$\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (27)$$



شکل ۱۲. مقایسه روابط کلاسیکی (معادله ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) بین تکانه و انرژی جنبشی الکترونی گسیل شده در بعضی فرایندهای واپاشی پرتوزا. دایره‌ها اندازه‌گیریهای تجربی را نمایش می‌دهند؛ خطوط افقی و عمودی که از میان دایره‌ها می‌گذرند محدوده عدم قطعیت در اندازه‌گیریها را نشان می‌دهند. روشن است که داده‌ها با رابطه نسبیتی سازگارترند. توجه کنید که در سرعت‌های کم (انرژی و تکانه کم) دو رابطه از هم متمایز نیستند.

تعریف کنیم. در این رابطه c سرعت نور است. در سرعت‌های معمولی ($v \ll c$)، معادله ۲۲ به همان معادله ۱۹ تبدیل می‌شود.

در مورد ذرات نسبیتی، می‌شود نشان داد که رابطه اساسی میان تکانه و انرژی جنبشی به صورت زیر است

$$K = \sqrt{(pc)^2 + (mc^2)^2} - mc^2 \quad (23)$$

این نتیجه را در فصل ۲۱ به دست خواهیم آورد. شکل ۱۲ مقایسه‌ای بین نتایج کلاسیکی (معادله ۲۱) و نسبیتی (معادله ۲۳) را برای ذرات در محدوده‌ای از سرعت‌ها نشان می‌دهد. روشن است که نتایج کلاسیکی در سرعت‌های زیاد نادرست است. همان‌طور که انتظار می‌رود (مسئله ۲۷) معادله ۲۳ در سرعت‌های معمولی به معادله ۲۱ کاهش می‌یابد.

انرژی جنبشی، به هر صورتی که نوشته شود، دارای ابعاد جرم ضربدر مربع سرعت است، که همان حاصل ضرب سرعت در تکانه است. بنابراین با استفاده از نمادگذاری بخش ۱-۷ برای بیان ابعاد می‌توانیم بنویسیم

$$[p] = \frac{[K]}{[v]}$$

اغلب مفید است که تکانه را برحسب یکای انرژی تقسیم بر سرعت بیان کنیم و انتخاب‌های مناسب در مورد ذرات عبارت‌اند از eV/c ،

تکانه کل یک سیستم را فقط نیروهای خارجی می‌توانند تغییر بدهند. نیروهای داخلی که دو به دو مساوی و مختلف‌الجهت هستند موجب تغییر تکانه‌های مساوی و مختلف‌الجهتی می‌شوند که همدیگر را حذف می‌کنند. برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی خالصی نباشد داریم

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots + \vec{p}_N = a \text{ const.} \quad (28)$$

تکانه هر یک از ذرات ممکن است تغییر کند، ولی اگر هیچ نیروی خارجی خالصی در کار نباشد مجموع تکانه‌ها باید ثابت باقی بماند. تکانه کمیتی برداری است. بنابراین معادله ۲۸ هم‌ارز سه معادله اسکالر، برای سه راستای مختصات، است. بنابراین، پایستگی تکانه خطی سه شرط در مورد حرکت سیستم مربوط فراهم می‌کند. اما پایستگی انرژی تنها یک شرط در مورد حرکت سیستم در اختیار ما می‌گذارد، چون انرژی کمیتی اسکالر است.

اگر سیستم فقط از یک ذره تشکیل شده باشد، معادله ۲۸ معنی‌اش این می‌شود که وقتی هیچ نیروی خارجی خالصی روی ذره اثر نکند تکانه آن ثابت می‌ماند، که (برای یک ذره تنها) معادل آن است که بگویم سرعتش ثابت می‌ماند. این صرفاً بیان دیگری از قانون اول نیوتون است.

معادله ۲۷ می‌گوید که برآیند نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر با آهنگ تغییر تکانه خطی آن سیستم است. این معادله، تعمیم معادله مربوط به تک‌ذره، یعنی $\Sigma \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادله ۲۰)، به سیستمی است که شامل تعداد زیادی ذره باشد. فرض کرده‌ایم که هیچ جرمی به این سیستم وارد یا از آن خارج نمی‌شود. معادله ۲۷ در مورد خاص تک‌ذره به معادله ۲۰ تبدیل می‌شود، زیرا هر نیروی وارد بر سیستم یک‌ذره‌ای حتماً خارجی است. در بخش ۸-۹ شکل اصلاح شده معادله ۲۷ را برای سیستمهایی که جرمشان متغیر است به دست خواهیم آورد.

۹-۶ پایستگی تکانه خطی

فرض کنید حاصل جمع نیروهای خارجی وارد بر یک سیستم برابر صفر باشد. در این صورت، از معادله ۲۷ داریم

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0 \quad \text{یا} \quad \mathbf{P} = a \text{ const.}$$

اگر نیروی خارجی خالص وارد بر یک سیستم صفر باشد، بردار تکانه کل سیستم ثابت می‌ماند.

این نتیجه ساده ولی کاملاً عام، قانون پایستگی تکانه خطی نامیده می‌شود. قانون پایستگی تکانه خطی هم (مانند قانون پایستگی انرژی) در گستره بسیار وسیعی از پدیده‌های فیزیکی معتبر است و هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است.

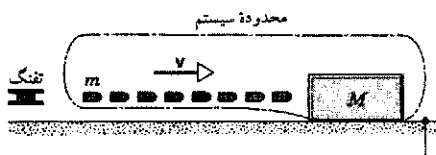
قوانین پایستگی (مانند قوانین پایستگی انرژی و تکانه خطی، که با آنها آشنا شده‌ایم، و قوانین پایستگی تکانه زاویه‌ای و بار الکتریکی که بعداً در این کتاب به آنها خواهیم رسید) در فیزیک به لحاظ نظری و عملی بسیار با اهمیت‌اند زیرا هم ساده‌اند و هم عمومیت دارند. قوانین پایستگی انرژی و تکانه خطی از محدوده مکانیک کلاسیک فراتر می‌روند و در حوزه‌های نسبیتی و کوانتومی هم صدق می‌کنند.

قوانین پایستگی همگی به این شکل‌اند: در سیستمی که دارد تغییر می‌کند، نمودی هست که تغییر نمی‌کند. اگر ناظران متفاوتی که هر کدام در چارچوب مرجع متفاوتی قرار دارند به یک سیستم در حال تغییر نگاه کنند، همگی توافق خواهند داشت که قوانین پایستگی در سیستم برقرار است. مثلاً در مورد پایستگی تکانه خطی، هر یک از ناظران چارچوبهای لخت متفاوت، مقدار متفاوتی به تکانه خطی سیستم نسبت می‌دهند، ولی جملگی توافق دارند (با فرض $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$) که ذرات تشکیل‌دهنده سیستم هر طور هم که حرکت کنند، \mathbf{P} تغییر نمی‌کند. نیروی \mathbf{F} نسبت به تبدیلهای گالیله‌ای ناورداست (همه ناظرهای لخت در مورد آن با هم توافق دارند). اگر در یک چارچوب لخت $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ باشد، همه ناظرهای لخت مشاهده خواهند کرد که $\Sigma \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0$ است و نتیجه خواهند گرفت که تکانه کل سیستم ثابت می‌ماند.

مثال ۶. رگباری از گلوله‌هایی به جرم $m = 3.8 \text{ g}$ به‌طور افقی با سرعت 110 m/s به قطعه چوب بزرگی به جرم $M = 12 \text{ kg}$ که در ابتدا روی سطح میزی افقی ساکن است، شلیک می‌شود (شکل ۱۳). اگر قطعه چوب بتواند بدون اصطکاک روی سطح میز بلغزد، سرعت آن پس از دریافت ۸ گلوله چقدر می‌شود؟

حل: معادله ۲۸ ($\mathbf{P} = \text{const.}$) فقط برای سیستمهای بسته معتبر است، یعنی سیستمهایی که هیچ ذره‌ای به آنها وارد یا از آنها خارج نمی‌شود. پس سیستم ما باید مجموعه‌ای شامل قطعه چوب و ۸ گلوله باشد. در شکل ۱۳، این سیستم را، با کشیدن یک منحنی بسته به دور آن، مشخص کرده‌ایم.

ابتدا فقط راستای افقی را بررسی می‌کنیم. هیچ نیروی خارجی افقی روی سیستم متشکل از چوب + گلوله‌ها اثر نمی‌کند. نیروهایی که هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب ایجاد می‌شوند نیروهای داخلی‌اند و در \mathbf{F}_{ext} که هیچ مؤلفه افقی ندارد سهم نیستند.



شکل ۱۳. مثال ۶. تفنگی رگباری از گلوله به‌سوی یک قطعه چوب شلیک می‌کند. سیستم را مرکب از قطعه چوب به‌علاوه گلوله‌های در حال پرواز گرفته‌ایم.

قبل و بعد از شلیک، تغییر می‌کند؟ آیا نیروی افقی خارجی‌ای به این سیستم وارد می‌شود؟

مثال ۷. شکل ۱۴ توبی به جرم $M = 1300 \text{ kg}$ را نشان می‌دهد که گلوله‌ای 72 کیلوگرمی را در راستای افقی با سرعت دهانه‌ای v برابر 55 m/s شلیک می‌کند. توب چنان مستقر شده است که می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت پس‌زنی توب (V) را نسبت به زمین پیدا کنید. (ب) سرعت اولیه گلوله توب (v_E) را نسبت به زمین پیدا کنید. حل: (الف) توب و گلوله را به عنوان سیستم اختیار می‌کنیم. با این کار، نیروهای مربوط به عمل شلیک توب، نیروهای داخلی سیستم‌اند و نیازی به بررسی آنها نیست. نیروهای خارجی وارد بر سیستم هیچ مؤلفه افقی ندارند. بنابراین مؤلفه افقی تکانه خطی کل سیستم باید در حین شلیک توب ثابت بماند.

چارچوب مرجعی، ساکن نسبت به زمین، اختیار می‌کنیم و سرعت‌های به سمت راست در شکل ۱۴ را مثبت می‌گیریم. قبل از اینکه گلوله شلیک شود، تکانه اولیه سیستم یعنی P_i ، برابر با صفر است. پس از شلیک، گلوله دارای سرعت افقی v نسبت به توب پس‌رونده است. v سرعت دهانه‌ای گلوله است. ولی، در چارچوب مرجع زمین، سرعت افقی گلوله برابر $v + V$ است. به این ترتیب تکانه خطی سیستم پس از شلیک برابر است با

$$P_f = MV + m(v + V)$$

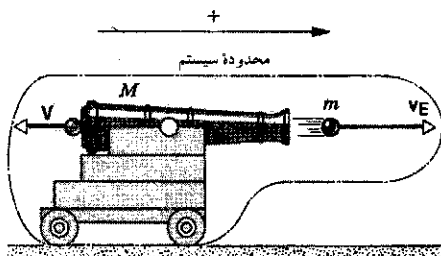
جمله اول سمت راست عبارت است از تکانه توب پس‌رونده و جمله دوم تکانه گلوله در حال پرواز است.

پایستگی تکانه خطی در راستای افقی ایجاب می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یعنی

$$0 = MV + m(v + V)$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود

$$V = -\frac{mv}{M + m} = -\frac{(72 \text{ kg})(55 \text{ m/s})}{1300 \text{ kg} + 72 \text{ kg}} = -2.9 \text{ m/s}$$



شکل ۱۴. مثال ۷. توبی به جرم M گلوله‌ای به جرم m شلیک می‌کند. سرعت‌های گلوله و توب پس‌رونده در چارچوب مرجع ساکن نسبت به زمین، v و V هستند. v و V را نسبت به زمین مثبت گرفته شده‌اند.

چون هیچ نیروی خارجی (افقی) اثر نمی‌کند، می‌توانیم قانون پایستگی تکانه (معادله ۲۸) را به‌کار بگیریم. تکانه اولیه (افقی)، مربوط به وقتی که هنوز گلوله‌ها در پروازند و چوب ساکن است، برابر است با

$$P_i = N(mv)$$

که mv تکانه هر کدام از گلوله‌های منفرد و $N = 8$ است. تکانه نهایی وقتی اندازه‌گیری می‌شود که همه گلوله‌ها در چوب جا گرفته‌اند و چوب با سرعت V روی سطح میز می‌لغزد. این تکانه برابر است با

$$P_f = (M + Nm)V$$

پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که داشته باشیم

$$P_i = P_f$$

یا

$$N(mv) = (M + Nm)V$$

از حل این معادله برای V نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \frac{Nm}{M + Nm} v \\ &= \frac{(8)(3.8 \times 10^{-2} \text{ kg})}{12 \text{ kg} + (8)(3.8 \times 10^{-2} \text{ kg})} \times (1100 \text{ m/s}) \\ &= 2.9 \text{ m/s} \end{aligned}$$

به دلیل نوع انتخاب سیستم، مجبور نبودیم که نیروهای اعمال شده در هنگام برخورد گلوله‌ها با چوب را در نظر بگیریم. همه آنها نیروهای داخلی بودند.

در راستای قائم، نیروهای خارجی عبارت‌اند از وزن گلوله‌ها، وزن قطعه چوب، و نیروی عمود بر سطح که به قطعه چوب وارد می‌شود. گلوله‌ها در طی پرواز، تحت تأثیر نیروی گرانی، تکانه کوچکی در راستای قائم به دست می‌آورند. وقتی گلوله‌ها به چوب برخورد می‌کنند، چوب باید به هر گلوله نیرویی وارد کند. این نیرو هم مؤلفه افقی و هم مؤلفه قائم دارد. همراه با نیروی قائم وارد بر گلوله که برای صفر کردن مؤلفه قائم تکانه آن لازم است باید (بنابر قانون سوم نیوتون) نیروی عمودی وارد بر چوب از طرف سطح هم افزایش پیدا کند. این افزایش نه فقط به خاطر وزن گلوله فروخته در چوب نیست، بلکه آهنگ تغییر مؤلفه قائم تکانه گلوله هم در آن سهمیم است. وقتی همه گلوله‌ها در داخل قطعه چوب متوقف شدند، نیروی عمودی برابر با مجموع وزن چوب و گلوله‌های جا گرفته در آن خواهد شد. به منظور ساده کردن حل این مسئله فرض کردیم که گلوله‌ها چنان سریع شلیک شوند که هر ۸ گلوله قبل از اینکه گلوله اول به چوب برخورد کند در پرواز باشند. آیا می‌توانید این مسئله را بدون این فرض حل کنید؟ فرض کنید مرز سیستم را چنان وسیع بگیریم که شامل تفنگ هم بشود. تفنگ به زمین محکم شده است. آن

از این رابطه نتیجه می‌شود

$$\frac{v_1}{v_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (29)$$

علامت منفی حاکی از آن است که سرعتها همواره در جهت‌های مخالف‌اند. رابطه بالا مربوط به سرعت‌های خاصی نیست و در هر لحظه پس از رها کردن قالبها صادق است.

انرژی جنبشی قالبها عبارت‌اند از $K_1 = \frac{1}{2}m_1v_1^2$ و $K_2 = \frac{1}{2}m_2v_2^2$. کسر مورد نظر ما برای قالب m_1 برابر است با

$$f_1 = \frac{K_1}{K_1 + K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2}$$

با جانشانی $v_2 = -v_1(m_1/m_2)$ در رابطه بالا و با کمی عملیات جبری نتیجه می‌شود

$$f_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}$$

به طریق مشابه، برای قالب m_2 خواهیم داشت

$$f_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}$$

به این ترتیب، اگرچه انرژی جنبشی سیستم نوسان‌کننده با زمان تغییر می‌کند، اما سهم هر یک از دو قالب از این انرژی، کسری ثابت و مستقل از زمان است. قالبی که جرمش کمتر است سهم بیشتری از انرژی جنبشی قابل حصول را دریافت می‌کند. مثلاً اگر $m_2 = 10m_1$ باشد، خواهیم داشت

$$f_1 = \frac{10m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.91 \quad \text{و} \quad f_2 = \frac{m_1}{m_1 + 10m_1} = 0.09$$

در این مورد، قالب سبکتر (m_1) حامل ۹۱٪ انرژی جنبشی سیستم و قالب سنگین‌تر (m_2) حامل ۹٪ باقی‌مانده است. در حد $m_2 \gg m_1$ ، قالب سبکتر اساساً تمام انرژی جنبشی را می‌گیرد.

عبارت‌های مربوط به f_1 و f_2 به همین صورت در مورد سنگی که در میدان گرانشی زمین سقوط می‌کند صادق است. فرض کنید که m_2 جرم زمین باشد و m_1 جرم سنگ. در چارچوب مرجع مرکز جرم آنها، سنگ تقریباً همه انرژی جنبشی را به خود اختصاص می‌دهد ($f_1 \approx 1$) و زمین سهم بسیار کوچکی دارد ($f_2 \approx 0$). مقادیر تکانه‌های خطی زمین و سنگ با هم برابرند، ولی سرعت بسیار کم زمین با جرم بسیار بزرگ آن جبران می‌شود. با همین استدلال بود که (در فصل ۸) وقتی پایستگی انرژی را در مورد اجسام سقوط‌کننده در میدان گرانش زمین به کار می‌بریم، انرژی جنبشی زمین را به حساب نمی‌آوریم.

مثال کاربردی دیگری از این اثر در شکافت هسته‌ای رخ می‌دهد، مانند ^{235}U به دو پاره سبکتر می‌شکافت.

علامت منفی حاکی از آن است که، همان‌طور که انتظار می‌رود، توپ شکل ۱۴ به سمت چپ پس می‌زند.

(ب) سرعت گلوله نسبت به توپ (پس‌رونده) همان سرعت دهانه‌ای است. سرعت گلوله، نسبت به زمین برابر است با

$$v_E = v + V \\ = 55\text{m/s} + (-2.9\text{m/s}) = 52\text{m/s}$$

به علت پس‌زدن توپ، سرعت گلوله نسبت به زمین کمی کمتر از سرعت دهانه‌ای است. در این مسئله، توجه کنید که انتخاب معقول سیستم (توپ + گلوله) اهمیت دارد و چارچوب مرجعی (زمین یا توپ پس‌رونده) که اندازه‌گیری نسبت به آن انجام می‌شود باید کاملاً مشخص باشد.

مثال ۸. شکل ۱۵ دو قالب را که توسط فنری به هم متصل شده‌اند، نشان می‌دهد. این دو قالب می‌توانند آزادانه روی سطح افقی بدون اصطکاک بلغزند. قالبها را که جرم آنها برابر m_1 و m_2 است از همدیگر دور می‌کشیم و سپس از حال سکون رها می‌کنیم. در زمانهای بعدی هر کدام از دو قالب حامل چه کسری از انرژی جنبشی کل سیستم خواهند بود؟

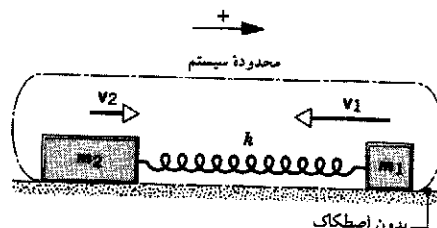
حل: دو قالب و فنر را (که بدون جرم فرض شده است) به عنوان سیستم می‌گیریم و سطح افقی‌ای را که این دو قالب روی آن می‌لغزند به عنوان چارچوب مرجع انتخاب می‌کنیم. جهت مثبت سرعتها را، در شکل ۱۵، به طرف راست اختیار می‌کنیم.

تکانه اولیه سیستم، P_i ، در لحظه رها شدن قالبها، صفر است. تکانه نهایی سیستم در هر زمان بعدی، برابر است با

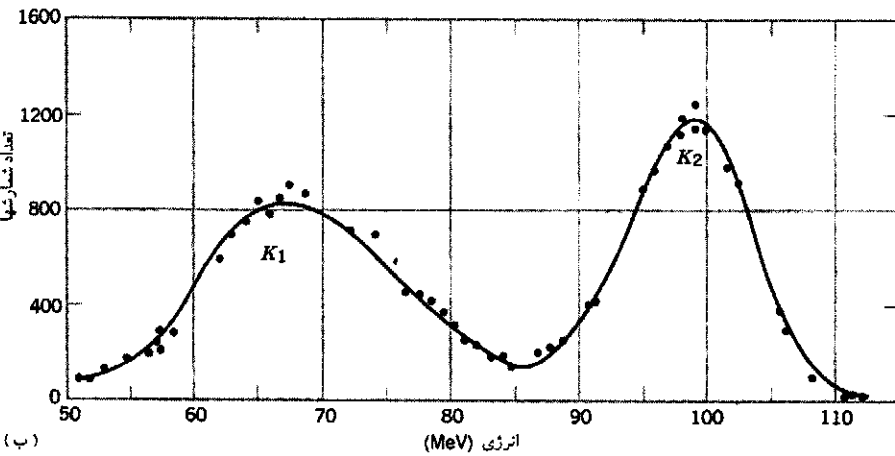
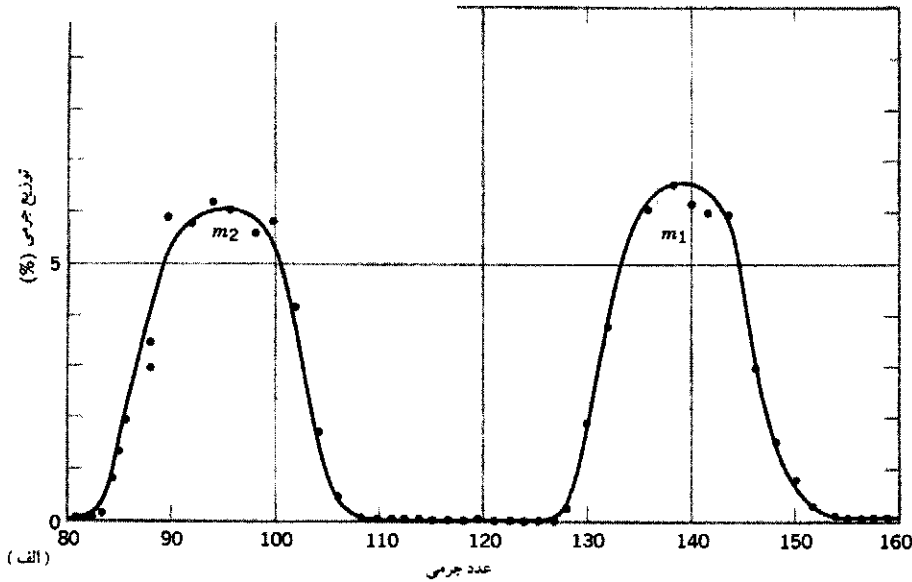
$$P_f = m_1v_1 + m_2v_2$$

که v_1 و v_2 سرعت‌های دو قالب‌اند. پایستگی تکانه ایجاب می‌کند که $P_i = P_f$ باشد، یا

$$0 = m_1v_1 + m_2v_2$$



شکل ۱۵. مثال ۸. دو قالب را که روی سطح بدون اصطکاک توسط فنری به هم متصل‌اند از همدیگر دور کرده و از حالت سکون رها کرده‌ایم. تکانه کل در حالت اول (در لحظه رها شدن سیستم) صفر است و بنابراین باید در همه زمانهای بعدی هم صفر بماند. سرعت‌های به سمت راست را مثبت در نظر گرفته‌ایم.



شکل ۱۶. (الف) توزیع جرمی پاره‌های گسیل‌شده در یک شکافت هسته‌ای. مقیاس قائم، آن کسری از شکافتها را نشان می‌دهد که به پاره‌ای با عدد جرمی نشان داده شده روی مقیاس افقی بینجامد. (ب) توزیع انرژی پاره‌های گسیل‌شده در شکافت.

می‌رود) برابر با همان نسبت جرمی نوعی است. پس سهم انرژی جنبشی هر یک از پاره‌های شکافت هم بنابر قید پایستگی تکانه تعیین می‌شود.

پاره‌ها که در اثر رانش الکتریکی از همدیگر دور می‌شوند، در ابتدا خیلی به هم نزدیک و تقریباً ساکن‌اند. از معادله ۲۹ انتظار داریم که نسبت انرژیهای جنبشی پاره‌ها پس از شکافت به صورت زیر باشد

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}m_1v_1^2}{\frac{1}{2}m_2v_2^2} = \left(\frac{m_1}{m_2}\right) \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^2 = \frac{m_2}{m_1}$$

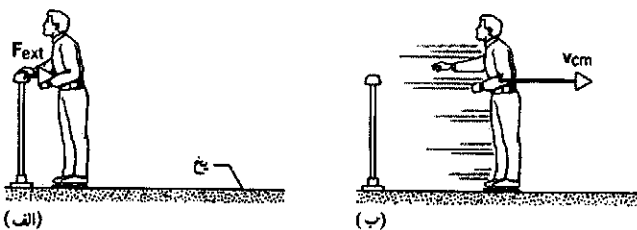
یعنی، پاره سنگین‌تر انرژی جنبشی کمتری کسب می‌کند.

شکافت یک فرایند آماری است، یعنی برای پاره‌های شکافت یک توزیع جرم و متناظر با آن یک توزیع انرژی جنبشی داریم. در شکل ۱۶ الف توزیع جرم و در شکل ۱۶ ب توزیع انرژی جنبشی نشان داده شده است. توجه داشته باشید که شکافت به پاره‌هایی با جرمهای مساوی پدیده‌ای بسیار نادر است. معمولاً عدد جرم یکی از پاره‌ها در حدود ۱۳۸ و عدد جرم دیگری در حدود ۹۴ است.

به این ترتیب، نسبت جرمی نوعی حدوداً برابر است با $\frac{138}{94} = 0.68$ ، و نسبت انرژی جنبشی نوعی $\frac{K_1}{K_2} = 0.68$ حدوداً برابر با $\frac{99\text{MeV}}{67\text{MeV}} = 0.68$ ، یعنی (همان‌طور که انتظار

۹-۷ کار و انرژی در سیستمی از ذرات (اختیاری)

شکل ۱۷ اسکیت‌بازی را نشان می‌دهد که به زنده‌ای فشار می‌آورد و



شکل ۱۷. (الف) اسکیت‌بازی زنده‌ای را هل می‌دهد. زنده نیروی F_{ext} بر اسکیت‌باز اعمال می‌کند. (ب) اسکیت‌باز پس از آنکه به عقب رانده شد با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

در بیاورد. در نتیجه، ممکن است اعضای مختلف بدن او به هنگام هل دادن نرده، جابه‌جاییها، سرعتها و شتابهای متفاوت داشته باشند. پس اسکیت‌باز را نباید به صورت تک‌ذره در نظر گرفت، بلکه باید او را به شکل سیستمی از ذرات بررسی کرد. در این مورد، با استفاده از معادله ۱۶ می‌توانیم شتاب مرکز جرم اسکیت‌باز را معین کنیم مشروط بر آنکه نیروی خارجی اعمال شده از طرف نرده بر او را بدانیم

$$F_{\text{ext}} = M a_{\text{cm}} \quad (۳۳)$$

برای تک‌ذره دریافتیم که قضیه کارانرژی ($W = \Delta K$) نتیجه مفیدی است. روشن است که نمی‌توانیم این قضیه را در مورد اسکیت‌باز به‌کار ببریم، زیرا اسکیت‌باز مانند تک‌ذره حرکت نمی‌کند. چنانکه قبلاً نتیجه گرفته‌ایم $W = 0$ است ولی $\Delta K \neq 0$ است. بنابراین، صورت تک‌ذره‌ای قضیه کارانرژی در این مورد معتبر نیست. حالا سعی می‌کنیم رابطه‌ای به‌دست بیاوریم که برای سیستمی از ذرات قابل استفاده باشد.

فرض کنید نیروی خارجی خالص F_{ext} بر سیستمی از ذرات وارد شود. در حالت کلی، در چارچوب مرجع لخت انتخابی ما، ممکن است نقطه اثر نیرو حرکت بکند یا (مانند مورد اسکیت‌باز شکل ۱۷) حرکت نکند. فرض می‌کنیم که همه نیروها و حرکتها در جهت x باشند. از آنجا که با سیستمی از ذرات سروکار داریم، به حرکت نقطه اثر نیروی خارجی توجه نمی‌کنیم بلکه حرکت مرکز جرم سیستم را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید مرکز جرم سیستم به اندازه dx_{cm} در امتداد محور x حرکت کند. اگر طرفین معادله ۳۳ را در dx_{cm} ضرب کنیم نتیجه می‌شود

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M a_{\text{cm}} dx_{\text{cm}} = M \frac{dv_{\text{cm}}}{dt} v_{\text{cm}} dt$$

که در آن dv_{cm}/dt را به جای a_{cm} و $v_{\text{cm}} dt$ را به جای dx_{cm} گذاشته‌ایم. معادله ۳۳ را می‌توانیم به این صورت هم بنویسیم

$$F_{\text{ext}} dx_{\text{cm}} = M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} \quad (۳۴)$$

فرض کنید در حینی که این نیرو اثر می‌کند مرکز جرم از x_i تا x_f حرکت می‌کند. از معادله ۳۴، بین این حدود، انتگرال می‌گیریم

$$\begin{aligned} \int_{x_i}^{x_f} F_{\text{ext}} + dx_{\text{cm}} &= \int_{v_{\text{cm},i}}^{v_{\text{cm},f}} M v_{\text{cm}} dv_{\text{cm}} \\ &= \frac{1}{2} M v_{\text{cm},f}^2 - \frac{1}{2} M v_{\text{cm},i}^2 \end{aligned} \quad (۳۵)$$

طرف راست معادله ۳۵ را با استفاده از معادله ۳۱ می‌شود به صورت $K_{\text{cm},f} - K_{\text{cm},i} = \Delta K_{\text{cm}}$ نوشت. این عبارت تغییر انرژی جنبشی ذره‌ای به جرم M را، در اثر تغییر سرعت آن از $v_{\text{cm},i}$ به $v_{\text{cm},f}$ نشان می‌دهد.

در این فرایند انرژی جنبشی کسب می‌کند. اگر از اسکیت‌باز بپرسیم که این انرژی جنبشی از کجا می‌آید، او با توجه به فعالیت عضلانی‌اش، احتمالاً پاسخ خواهد داد که انرژی مورد نیاز باید از ذخیره انرژی داخلی خودش آمده باشد. می‌خواهیم صحت ادعای اسکیت‌باز را با به‌کار بردن پایستگی انرژی در مورد سیستمی که فقط شامل اسکیت‌باز است، تحقیق کنیم.

از معادله ۲۸ فصل ۸ داریم

$$\Delta U + \Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W \quad (۳۰)$$

در استنتاج معادله ۳۳ فصل ۸، انرژی جنبشی سیستم را به دو بخش تقسیم کردیم: ΔK_{int} ، که نماینده حرکت‌های داخلی ذرات در سیستم است و ΔK ، که نماینده حرکت "کلی" سیستم است. در اینجا به صراحت می‌گوییم که این حرکت "کلی" در واقع همان حرکت مرکز جرم است، و انرژی جنبشی متناظر با آن عبارت است از

$$K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \quad (۳۱)$$

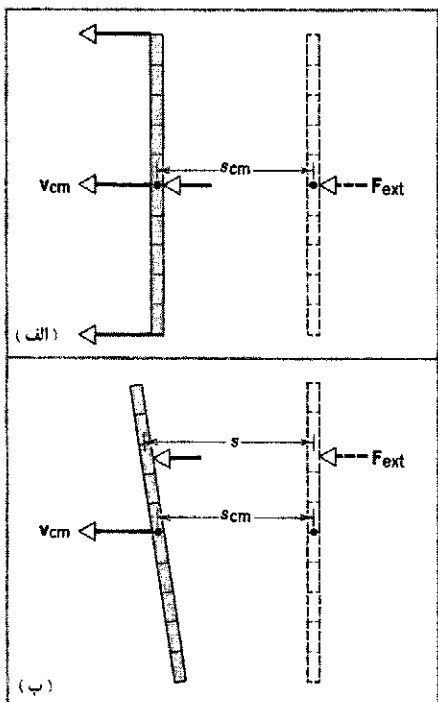
این انرژی سیستمی است به جرم کل M ، اگر به صورت ذره‌ای با سرعت v_{cm} حرکت کند. انرژی جنبشی داخلی در معادله ۳۰ به صورت بخشی از ΔE_{int} منظور شده است. (مسئله ۴۹ به استخراج این قسمت از انرژی جنبشی مربوط است.)

چون سطح یخ افقی است تغییری در انرژی پتانسیل اسکیت به‌وجود نمی‌آید، بنابراین $\Delta U = 0$ است. به‌علاوه، چون نقطه اعمال نیرو حرکت نمی‌کند نرده کاری روی اسکیت‌باز انجام نمی‌دهد. در بحث مربوط به شکل ۱۳ در فصل ۸ گفتیم که هرگاه کار خارجی روی سیستمی انجام شود، انرژی از طریق مرزهای سیستم به آن منتقل می‌شود. هیچ انرژی‌ای از طریق نرده به اسکیت‌باز منتقل نشده است، بنابراین نرده هیچ کار خارجی‌ای روی اسکیت‌باز انجام نداده است. به این ترتیب $W = 0$ است و معادله ۳۰ به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta K_{\text{cm}} = -\Delta E_{\text{int}} \quad (۳۲)$$

از آنجا که ΔK_{cm} کمیتی مثبت است (اسکیت‌باز در اثر هل دادن نرده انرژی جنبشی کسب می‌کند)، ΔE_{int} باید کمیتی منفی باشد. این مطلب ادعای اسکیت‌باز را تأیید می‌کند که: انرژی جنبشی کسب شده بر اثر هل دادن نرده از ذخیره انرژی داخلی خود او حاصل می‌شود، نه از منبع خارجی.

تحلیل مبتنی بر انرژی مفید است، ولی گاهی ممکن است مایل باشیم سیستم را برحسب نیروها و شتابها هم تحلیل کنیم. می‌خواهیم ببینیم که از کاربرد قانون دوم نیوتون در مورد اسکیت‌باز چه چیزی عایدمان می‌شود. نرده نیروی F_{ext} را به اسکیت‌باز (که همچنان آن را سیستم در نظر می‌گیریم) اعمال می‌کند. برای اینکه اسکیت‌باز از نرده رانده شود باید بازوهای خود را به‌صورت کشنده



شکل ۱۸. (الف) چوب متری را با نیروی F_{ext} روی سطح افقی بدون اصطکاکی هل می‌دهیم. نیرو در نقطه نشانه 50 cm وارد می‌شود. (ب) نیرو در نقطه نشانه 25 cm وارد می‌شود. در این حالت، چوب متر علاوه بر حرکت انتقالی به چرخش هم در می‌آید و دیگر مانند ذره عمل نمی‌کند. در این مورد نیرو در فاصله s که بزرگتر از جابه‌جایی مرکز جرم (s_{cm}) است اثر می‌کند.

چرخش آن حول مرکز جرم. نقطه‌ای که به آن نیرو وارد می‌شود مسافتی بیشتر از s_{cm} می‌پیماید (شکل ۱۸ ب). بنابراین کاری که روی چوب متر انجام می‌دهیم بیشتر از $F_{ext}s_{cm}$ است. برای تحلیل این حرکت باید از هر دو معادله ۳۰ و ۳۶ استفاده کنیم. حاصل ضرب $F_{ext}s_{cm}$ ، بنابه معادله ۳۶، تغییر در انرژی جنبشی انتقالی چوب متر را به دست می‌دهد. حاصل ضرب $F_{ext}s$ ، که در آن s مسافتی است که نقطه اثر نیرو (نشانه 25 cm) طی می‌کند، کار W را به دست می‌دهد که در معادله ۳۰ آمده است، و معادله ۳۰ بیانی است از پایستگی انرژی. در فصل ۱۲ خواهیم دید که می‌توانیم بخشی از انرژی جنبشی کل را به حرکت انتقالی و بخشی را به حرکت چرخشی نسبت بدهیم.^۱

مثال ۹. یک اسکیت‌باز 72 کیلوگرمی نیروی ثابت $F = 55\text{ N}$ را به نرده‌ای وارد می‌کند (شکل ۱۷). مرکز جرم او تا زمانی که تماسش با نرده

۱. بعضی مؤلفان برای توصیف طرف چپ معادله ۳۵ از اصطلاح شبه‌کار، یا کار مرکز جرم استفاده می‌کنند. این معادله گاهی معادله مرکز جرم نامیده می‌شود. ما ترجیح می‌دهیم برای توصیف کمیتی که ارتباطی با کار در مفهوم پذیرفته شده آن ندارد، از هیچ اصطلاحی که شامل واژه کار باشد استفاده نکنیم. مرور جامعی بر مفاهیم کار و انرژی در مورد سیستم‌های ذرات در مرجع زیر یافت می‌شود:

“Developing the Energy Concepts in Introductory Physics,”
A. B. Arons, *The Physics Teacher*, October 1989, p. 506.

طرف چپ معادله ۳۵ قدری شبیه به تعریف کار است، و در واقع این انتگرال دارای بعد کار هم هست. ولی این عبارت، به آن مفهومی که قبلاً کار را تعریف کرده‌ایم، کار نیست زیرا dx_{cm} جابه‌جایی نقطه اثر نیروی خارجی نیست. (در تعریف کار به صورت $W = \int F dx$ که در فصل ۷ داشتیم، عبارت بود از جابه‌جایی نقطه اثر نیروی F). توجه داشته باشید که جابه‌جایی نقطه اثر نیروی خارجی در شکل ۱۷ صفر است؛ پس در این مورد $W = 0$ است ولی طرف چپ معادله ۳۵ صفر نیست.^۱

در بسیاری از مواردی که با آنها سروکار داریم، نیروی خارجی ثابت است و در معادله ۳۵ می‌شود آن را از زیر علامت انتگرال بیرون آورد. انتگرال به‌جا مانده جابه‌جایی خالص s_{cm} مرکز جرم سیستم را به دست می‌دهد. در این‌گونه موارد، معادله ۳۵ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$F_{ext}s_{cm} = \Delta K_{cm} \quad (36)$$

معادله ۳۵ شبیه قضیه کار-انرژی برای تک‌ذره است، و اگر سیستم ما فقط شامل یک ذره باشد (یا از جسمی تشکیل شده باشد که بتوان آن را مثل ذره در نظر گرفت)، در واقع به همان نتیجه هم می‌رسد. با این همه، بین معادله ۳۵ و قضیه کار-انرژی برای تک‌ذره، اختلاف مهمی وجود دارد. قضیه کار-انرژی برای تک‌ذره، بیانی درباره پایستگی انرژی در حرکت یک ذره هم هست، زیرا انرژی انتقالی تنها نوع انرژی‌ای است که یک ذره می‌تواند داشته باشد. اما معادله ۳۵ به هیچ وجه بیان مناسبی برای پایستگی انرژی نیست، زیرا یک سیستم متشکل از ذرات می‌تواند شامل شکلهای دیگری از انرژی — از جمله انرژیهای داخلی، پتانسیل، و چرخشی — هم باشد. در مورد یک سیستم متشکل از ذرات، معادله ۳۵ و پایستگی انرژی (معادله ۳۰) را می‌شود به عنوان دو رابطه جدا و مستقل از هم به کار برد.

به عنوان مثالی از کاربرد این اصول، می‌خواهیم حاصل اعمال نیرو به یک چوب متر را که در ابتدا ساکن است و می‌تواند آزادانه روی یک سطح افقی بدون اصطکاک بلغزد، بررسی کنیم. نیروی ثابتی به مقدار F_{ext} به این جسم اعمال می‌کنیم. اگر این نیرو را در محل علامت 50 cm وارد کنیم (شکل ۱۸ الف)، چوب متر مانند یک ذره با شتاب $a_{cm} = F_{ext}/m$ به حرکت در می‌آید، و تمام نقاط آن با همین شتاب حرکت می‌کنند. جابه‌جایی s نقطه‌ای که نیرو به آن وارد می‌شود برابر است با جابه‌جایی s_{cm} مرکز جرم. در این حالت، وقتی همه چوب متر (که به صورت یک ذره حرکت می‌کند) به اندازه s_{cm} جابه‌جا شد، کاری به اندازه $F_{ext}s$ انجام داده‌ایم. می‌توانیم صورت ذره‌ای قضیه کار-انرژی را به کار ببریم و سرعت v همه نقاط چوب متر را به دست بیاوریم. اکنون حالتی را در نظر می‌گیریم که نیرو در محل علامت 25 cm اثر می‌کند (شکل ۱۸ ب). اگر خودتان این آزمایش را انجام بدهید می‌بینید که چوب متر دیگر مانند یک ذره حرکت نمی‌کند. همان‌طور که در فصل ۱۲ خواهیم دید، این حرکت پیچیده را می‌توانیم به دو بخش تقسیم کنیم — یکی انتقال جسم به عنوان ذره، و دیگری

را، که در واقع مقدار کشیده شدن دستان دو نفر است، طی کرده است. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز پس از قطع تماس چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی داخلی اسکیت‌باز در طی این فرایند چقدر است؟
 حل: (الف) اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. توجه داشته باشید که در این مورد کار خارجی روی سیستم انجام شده است، بنابراین از طریق مرز سیستم باید انتقال انرژی صورت گرفته باشد. از معادله ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \Delta K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - 0$$

یا

$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2 F_{\text{ext}} s_{\text{cm}}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{N})(0.58\text{m})}{72\text{kg}}} = 0.94\text{m/s}$$

(ب) از معادله پایستگی انرژی داریم

$$\Delta K_{\text{cm}} + \Delta E_{\text{int}} = W$$

که در آن W (یعنی $F_{\text{ext}} s$) کار خارجی انجام شده روی اسکیت‌باز توسط همبازی‌اش است. این معادله را برای تغییر انرژی داخلی ΔE_{int} حل می‌کنیم و با استفاده از قسمت الف، به جای ΔK_{cm} مقدار معادلش $F_{\text{ext}} s_{\text{cm}}$ را قرار می‌دهیم. نتیجه می‌شود

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= W - \Delta K_{\text{cm}} = F_{\text{ext}} s - F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} \\ &= (55\text{N})(0.32\text{m}) - (55\text{N})(0.58\text{m}) \\ &= +17.6\text{J} - 31.9\text{J} = -14.3\text{J} \end{aligned}$$

به این ترتیب اسکیت‌باز برای کسب انرژی جنبشی نهایی‌اش باید 14.3J از انرژی داخلی‌اش را مصرف کند. همبازی با انجام کار روی اسکیت‌باز 17.6J انرژی به او می‌دهد، که البته این انرژی از ذخیره انرژی داخلی همبازی تأمین می‌شود. اگر همبازی حضور نداشت و اسکیت‌باز می‌خواست همین انرژی جنبشی را با هل دادن دیوار کسب کند می‌بایست تمام 31.9J انرژی جنبشی را از انرژی داخلی خودش فراهم می‌کرد.

مثال ۱۱. قطعه‌ای به جرم 5.2 کیلوگرم با سرعت اولیه افقی 0.65 متر بر ثانیه روی سطح افقی پرتاب می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان سطح و قطعه 0.12 است. (الف) چه بر سر انرژی جنبشی اولیه قطعه می‌آید؟ (ب) قطعه قبل از اینکه متوقف شود چه مسافتی را می‌پیماید؟

حل: (الف) برای حل این مسئله با پایستگی انرژی، مناسبترین سیستمی که می‌توانیم در نظر بگیریم عبارت است از قطعه به اضافه آن قسمتی از سطح افقی که قطعه روی آن می‌لغزد. چون در سطح

قطع می‌شود به اندازه $s_{\text{cm}} = 32\text{cm}$ جابه‌جا می‌شود. (الف) سرعت مرکز جرم اسکیت‌باز در هنگام جدا شدن او از نرده چقدر است؟ (ب) در این فرایند انرژی داخلی اسکیت‌باز چقدر تغییر می‌کند؟
 حل: (الف) این بار هم اسکیت‌باز را به عنوان سیستم در نظر می‌گیریم. بنابر قانون سوم نیوتن، نرده هم نیروی 55N به سمت راست (در شکل ۱۷) به اسکیت‌باز وارد می‌کند. این نیرو تنها نیروی خارجی است که باید آن را در نظر بگیریم. از معادله ۳۶ داریم

$$F_{\text{ext}} s_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 - 0$$

یا

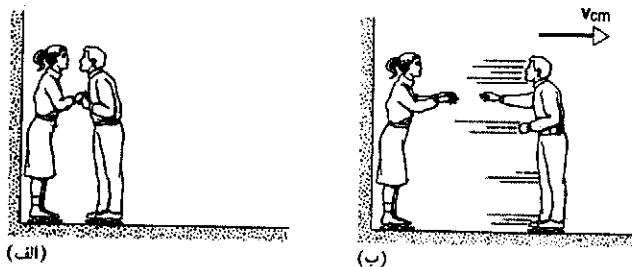
$$v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{2 F_{\text{ext}} s_{\text{cm}}}{M}} = \sqrt{\frac{2(55\text{N})(0.32\text{m})}{72\text{kg}}} = 0.70\text{m/s}$$

(ب) حالا قانون پایستگی انرژی را، که در شرایط این مسئله به صورت معادله ۳۲ در می‌آید، به کار می‌بریم

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{int}} &= -\Delta K_{\text{cm}} = -\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 \\ &= -\frac{1}{2} (72\text{kg})(0.70\text{m/s})^2 = -17.6\text{J} \end{aligned}$$

این مقدار انرژی داخلی را می‌شود با خوردن تقریباً یک چهارم فاشنگ چایخوری سودای رژیمی جبران کرد.

مثال ۱۰. در این مورد، اسکیت‌باز با هل دادن همبازی‌اش که پشت به دیوار ایستاده است به حرکت در می‌آید (شکل ۱۹ الف). در آغاز دستهای هر دوی آنها خمیده است. تا زمانی که دستهایشان به حالت کشیده درمی‌آید و تماسشان با هم قطع شود یکدیگر را هل می‌دهند (شکل ۱۹ ب). همبازی اسکیت‌باز نیروی ثابت $F_{\text{ext}} = 55\text{N}$ را در طی مسافت $s = 32\text{cm}$ بر او وارد می‌کند؛ این همان مسافتی است که دستهای همبازی تا زمانی که به حالت کاملاً کشیده در می‌آید طی می‌کند. تا زمانی که تماس قطع می‌شود. مرکز جرم اسکیت‌باز مسافت کل $s_{\text{cm}} = 58\text{cm}$



شکل ۱۹. مثال ۱۰. (الف) اسکیت‌باز و همبازی‌اش، تا کشیده شدن کامل دستهایشان، به یکدیگر نیرو وارد می‌کنند. همبازی پشت به دیوار ایستاده است و در نتیجه حرکت نمی‌کند. (ب) پس از آنکه دستها به حالت کشیده در آمدند، اسکیت‌باز با سرعت v_{cm} حرکت می‌کند.

استفاده از زبان آشنای فیزیک نیوتونی، این تغییر تکانه را به نیروی مناسبی نسبت بدهیم. در این مورد، نیرویی که توپ را شتاب می‌دهد یک نیروی واکنشی است: توپ توسط خرج انفجارش به گلوله‌ها نیرو وارد می‌کند و آنها را از دهانه لوله به بیرون پرتاب می‌کند و نیروی واکنش (گلوله‌ها هم به توپ نیرو وارد می‌کنند) توپ را به سمت چپ می‌راند.

با شلیک پیاپی توپ، جرم کل ارابه به اندازه مجموع جرم گلوله‌هایی که پرتاب شده‌اند کاهش می‌یابد. روش ارائه شده در مثال ۷ را نمی‌توان به همین سادگیها برای حل این مسئله هم به کار برد، زیرا جرم جسم پس‌رونده، با شلیک هر گلوله، تغییر می‌کند.

در اینجا سیستم S را که شامل توپ به اضافه ارابه است، به عنوان سیستمی "با جرم متغیر" در نظر می‌گیریم. البته سیستم بزرگتر S' مشتمل بر ارابه، توپ، و گلوله‌های شلیک شده، سیستمی است با جرم ثابت، که (در نبود نیروی خارجی) تکانه آن هم ثابت است. ولی سیستم کوچکتر S ، جرم ثابتی ندارد. به علاوه، گلوله‌های شلیک شده حامل تکانه‌اند، و تکانه خالصی که از S بیرون می‌رود موجب می‌شود که این سیستم شتاب بگیرد.

مثال بالا تصور نسبتاً روشنی از چگونگی عملکرد موشک به دست می‌دهد. سوخت می‌سوزد و با سرعت خیلی زیادی به بیرون رانده می‌شود؛ محصولات سوخت نقش گلوله‌های توپ را دارند. شتاب موشک (منهای سوخت مصرف شده) به آهنگ مصرف سوخت و به سرعت خروج محصولات سوخت وابسته است.

هدف از تحلیل سیستمهایی نظیر موشک این نیست که سینماتیک کل سیستم S' را مطالعه کنیم، بلکه می‌خواهیم توجه‌مان را به سیستم مشخص S معطوف کنیم و ببینیم که وقتی توزیع جرم در داخل سیستم کلی S' ، و در نتیجه جرم زیر سیستم S تغییر می‌کند، حرکت S چگونه است. جرم کل در داخل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S که مورد نظر ماست ممکن است با افزایش یا کاهش جرم (و تکانه) وضعیت حرکتی‌اش را تغییر بدهد.

شکل ۲۰ طرحی از یک سیستم تعمیم‌یافته را نشان می‌دهد. در زمان t ، از چارچوب مرجع خاصی که در آن قرار داریم، مشاهده می‌کنیم که زیرسیستم S دارای جرم M است و با سرعت v حرکت می‌کند. در زمان $t + \Delta t$ ، جرم S به اندازه ΔM (که در صورت بیرون رفتن جرم، مقداری منفی است) تغییر کرده و به $M + \Delta M$ رسیده است، در حالی که جرم باقی‌مانده سیستم S' به اندازه $-\Delta M$ تغییر کرده است. اکنون سیستم S با سرعت $v + \Delta v$ و ماده بیرون رانده شده با سرعت u حرکت می‌کند. این اندازه‌گیریها در چارچوب مرجع خودمان انجام می‌شود.

برای اینکه مسئله حتی‌الامکان کلی‌تر باشد، فرض می‌کنیم که یک نیروی خارجی F_{ext} هم می‌تواند روی کل سیستم اثر کند. این نیرو نیرویی نیست که موشک را به پیش می‌راند (نیروی پیشران برای S' یک نیروی داخلی است) بلکه نیروی ناشی از یک عامل

داریم $\Delta U = 0$. به علاوه، چون هیچ نیروی خارجی به این سیستم اثر نمی‌کند، داریم $W = 0$. (سیستم را چنان تعریف کرده‌ایم که برای آن اصطکاک یک نیروی داخلی است.) به این ترتیب معادله 30° به صورت زیر در می‌آید

$$\Delta E_{int} = -\Delta K_{cm}$$

که خود ΔK_{cm} منفی است، چون انرژی جنبشی کم می‌شود. با جانشانی مقادیر معلوم داریم

$$\begin{aligned} \Delta E_{int} &= -\left(0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2\right) = +\frac{1}{2} (0.2 \text{ kg}) (0.65 \text{ m/s})^2 \\ &= +0.0425 \text{ J} \end{aligned}$$

این افزایش انرژی داخلی سیستم به صورت افزایش کوچکی در دمای قطعه و سطح ظاهر می‌شود. محاسبه چگونگی تقسیم این انرژی بین قطعه و سطح دشوار است؛ و بیشتر به خاطر اجتناب از این دشواری بود که سیستم را، به جای قطعه تنها، شامل قطعه و سطح در نظر گرفتیم. (ب) در این مورد قطعه تنها را به عنوان سیستم انتخاب می‌کنیم. در اینجا نمی‌توانیم قطعه را مانند ذره در نظر بگیریم، زیرا شکلهای دیگر تبادل انرژی، غیر از انرژی جنبشی انتقالی (در این مورد انرژی داخلی) هم در کارند. با استفاده از معادله ۲۶ داریم

$$F_{ext} s_{cm} = \Delta K_{cm}$$

در این مورد F_{ext} نیروی اصطکاک است (برابر با $-\mu Mg$) اگر جهت حرکت قطعه را مثبت بگیریم) که از خارج بر قطعه اثر می‌کند و s_{cm} جابه‌جایی مرکز جرم قطعه است. به این ترتیب داریم

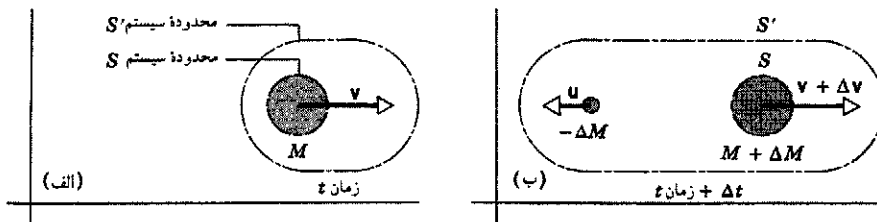
$$(-\mu Mg)(s_{cm}) = 0 - \frac{1}{2} M v_{cm}^2$$

یا

$$s_{cm} = \frac{v_{cm}^2}{2\mu g} = \frac{(0.65 \text{ m/s})^2}{2(0.12)(9.8 \text{ m/s}^2)} = 0.18 \text{ m}$$

۸-۹ سیستمهای با جرم متغیر (اختیاری)

تصور کنید ارابه حامل توپ شکل ۱۴، حامل تعداد زیادی گلوله توپ هم باشد. وقتی که توپ به‌طور پیاپی شلیک می‌کند، ارابه (که فرض می‌کنیم بدون اصطکاک حرکت می‌کند) به سمت چپ پس می‌زند و در هر پس‌زنی سرعتش زیادتر می‌شود. با مرز رسم شده در شکل ۱۴، می‌دانیم که تکانه افقی کل باید صفر باشد و می‌دانیم که هیچ نیروی خالص افقی بر سیستم اثر نمی‌کند. ولی اگر سیستم را چنان در نظر بگیریم که فقط شامل ارابه و توپ باشد، گفته بالا دیگر درست نیست. هر بار که توپ شلیک می‌کند تکانه‌اش افزایش می‌یابد، و هست لست یا



شکل ۲۰. (الف) سیستم S' در زمان t از جرم M تشکیل شده است که با سرعت v حرکت می‌کند. (ب) اندک زمانی بعد، Δt جرمی به اندازه $-\Delta M$ از سیستم بیرون رانده شده است. در این هنگام، جرم باقی مانده، $M + \Delta M$ ، که ما آن را زیرسیستم S می‌نامیم، با سرعت $v + \Delta v$ حرکت می‌کند.

می‌کند. در معادله ۴۱، M جرم زیرسیستم S در زمان t و dv/dt شتاب S در وقتی است که جرمی را با سرعت u (در چارچوب مرجع خودمان) و با آهنگ $|dM/dt|$ به بیرون می‌راند. معادله ۴۱ را می‌توانیم به صورت کمی کلی‌تر هم بنویسیم

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d}{dt}(M\mathbf{v}) - \mathbf{u} \frac{dM}{dt} \quad (42)$$

معادله ۴۲ اصلاً شباهتی به $\mathbf{F}_{\text{ext}} = M\mathbf{a}$ یا $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ که قبلاً برای بررسی حرکت ذرات یا سیستمهای با جرم ثابت به کار بردیم، ندارد. این معادله را فقط در دو مورد خیلی خاص می‌توانیم به صورت قانون دوم نیوتون برای ذره در بیاریم: ۱. وقتی $dM/dt = 0$ یعنی M ثابت باشد، که در این صورت به همان مورد سیستمهای با جرم ثابت بازگشته‌ایم، یا ۲. وقتی $\mathbf{u} = 0$ باشد، که در این صورت در واقع داریم سیستم با جرم متغیر را از چارچوب مرجع خیلی خاصی، که در آن جرم بیرون رانده شده ساکن است، مشاهده می‌کنیم.

به طور کلی، وقتی قانون $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d\mathbf{P}/dt$ را در مورد سیستمی مانند S که جرم آن افزایش یا کاهش می‌یابد به کار می‌بریم، باید تغییر در تکانه جرم افزوده یا کاسته شده را هم در نظر بگیریم. یعنی همان طور که در معادله ۴۲ و شکل ۲۰ می‌بینیم، باید سیستم بزرگتر S' را که شامل سیستم S و جرم اضافی است، بررسی کنیم. این رهیافت در مورد دینامیک سیستمهای با جرم متغیر، اهمیت قانون پایستگی انرژی را به خوبی نشان می‌دهد و دستورالعمل نسبتاً ساده‌ای برای بررسی سیستمهای پیچیده در اختیار ما می‌گذارد.

معادله ۴۱ را به صورت خاصی به دست آورده‌ایم که می‌توانیم از آن در بررسی حرکت موشک به راحتی استفاده کنیم. کمیت $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ برابر با v_{rel} ، یعنی سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک است. وارد کردن این کمیت کار معقولی است زیرا سرعت گازهای خروجی یک مشخصه اساسی در طراحی موتور موشک است و نباید به صورتی

۱. یک مرجع عمومی خیلی خوب درباره سیستمهای با جرم ثابت و سیستمهای با جرم متغیر عبارت است از

"Force, Momentum Change, and Motion," *American Journal of Physics*, January 1969, p. 82. Martin S. Tiersten.

خارجی، مانند گرانش یا مقاومت جواست. تکانه کل مربوط به سیستم S' برابر است با \mathbf{P} ، و قانون دوم نیوتون را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} \quad (37)$$

در بازه زمانی Δt ، تغییر تکانه برابر است با

$$\Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \quad (38)$$

که در آن \mathbf{P}_f تکانه نهایی سیستم S' در لحظه $t + \Delta t$ و \mathbf{P}_i تکانه اولیه سیستم S' در لحظه t است. این تکانه‌ها از روابط زیر حاصل می‌شوند

$$\mathbf{P}_i = M\mathbf{v} \quad (39\text{الف})$$

$$\mathbf{P}_f = (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} \quad (39\text{ب})$$

پس تغییر تکانه سیستم S' برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{P} &= \mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i \\ &= (M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v} \end{aligned} \quad (40)$$

در معادله ۳۷ مشتق را به صورت حد می‌نویسیم و $\Delta \mathbf{P}$ را از معادله بالا در آن قرار می‌دهیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{\text{ext}} &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{P}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(M + \Delta M)(\mathbf{v} + \Delta \mathbf{v}) + (-\Delta M)\mathbf{u} - M\mathbf{v}}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left[M \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{\Delta M}{\Delta t} + \Delta \mathbf{v} \frac{\Delta M}{\Delta t} \right] \\ &= M \frac{d\mathbf{v}}{dt} + (\mathbf{v} - \mathbf{u}) \frac{dM}{dt} \end{aligned} \quad (41)$$

توجه داشته باشید که در انجام عمل حدگیری، آخرین جمله داخل کروشه صفر می‌شود، زیرا وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ برود، Δt $\rightarrow 0$.

زیر می‌رسیم

$$\int_{v_i}^{v_f} dv = -v_{rel} \int_{M_o}^{M_o - m_b} \frac{dM}{M}$$

$$v_f - v_i = -v_{rel} \ln M \Big|_{M_o}^{M_o - m_b}$$

$$= -v_{rel} [\ln(M_o - m_b) - \ln M_o]$$

$$= -v_{rel} \ln \left(\frac{M_o - m_b}{M_o} \right) \quad (46)$$

معادله ۴۶ تغییر سرعت موشک را، پس از مصرف شدن مقدار m_b از سوخت، به دست می‌دهد.

فرض کنید موشک از حال سکون ($v_i = 0$) با جرم اولیه M_o شروع به حرکت کند و پس از مصرف تمامی سوخت با جرمی که اکنون برابر با $M_f = M_o - m_b$ است به سرعت پایانی v_f برسد. در این صورت معادله ۴۶ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$\frac{M_f}{M_o} = e^{-v_f/v_{rel}} \quad (47)$$

تشابه میان موشک و توپ پس‌رونده از شکل ۲۱ آشکار است. در هر دو مورد تکانه کل سیستم، متشکل از جرم بیرون رانده شده (گلوله‌ها یا سوخت) به اضافه جرمی که جرم را به بیرون رانده است، پایسته می‌ماند. وقتی که توپ یا موشک را در داخل سیستم بزرگتر بررسی می‌کنیم می‌بینیم که جرم آنها تغییر می‌کند و نیرویی بر آنها وارد می‌آید؛ نیروی "پس‌ران" در مورد توپ و نیروی "پیشران" در مورد موشک. اگر سیستم را از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده کنیم، در آن صورت با گذشت زمان جرم بیشتری از آن به بیرون رانده شده و این جرم (در شکل ۲۱) بیشتر به سمت چپ حرکت کرده است؛ یعنی که جسم باید بیشتر به سمت راست حرکت کرده باشد تا مرکز جرم ثابت بماند.

مثال ۱۲. جرم موشکی، که به طور کامل سوختگیری شده، 13600 kg است. این موشک در امتداد قائم به سوی بالا پرتاب می‌شود و تا هنگام اتمام سوخت، مقدار 9100 kg محصولات سوخت را به خارج می‌ریزد. گازها با آهنگ 146 kg/s و با سرعت 1520 m/s ، نسبت به موشک، از آن خارج می‌شوند. فرض می‌کنیم که این دو کمیت در طی عمل احتراق ثابت بمانند. (الف) نیروی پیشران چقدر است؟ (ب) اگر می‌شد از همه نیروهای خارجی منجمله گرانش و مقاومت هوا چشمپوشی کرد، سرعت موشک در هنگام اتمام سوخت چقدر می‌بود؟

ح.ا.: (الف) ندوی پیشران F برابر است با آخرین جمله معادله ۴۳.

بیان شود که به چارچوب مرجعی غیر از خود موشک وابسته باشد. برحسب v_{rel} ، معادله ۴۱ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$M \frac{dv}{dt} = F_{ext} + v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (43)$$

آخرین جمله معادله ۴۳ آهنگ انتقال تکانه به داخل (یا خارج از) زیرسیستم S را به دست می‌دهد. این جمله را می‌توان به عنوان نیروی اعمال شده بر S توسط جرمی که به آن وارد یا از آن خارج می‌شود تعبیر کرد. در مورد موشک، این نیرو را نیروی پیشران می‌نامیم؛ برای اینکه نیروی پیشران هر چه بیشتر باشد، طراحان موشک می‌کوشند که هم v_{rel} (سرعت خروج گاز) و هم $|dM/dt|$ (آهنگ بیرون راندن جرم) را حتی الامکان زیاد کنند.

معادله موشک

موشکی را در فاصله دوری در فضا، جایی که هیچ نیروی خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند، در نظر بگیرید. برای سادگی محاسبات فرض می‌کنیم حرکت به یک بعد محدود باشد، و فرض می‌کنیم dv/dt جهت مثبت را، که موشک در آن شتاب می‌گیرد، معین می‌کند و بنابراین v_{rel} در جهت منفی است. معادله ۴۳ را در این مورد می‌شود به صورت زیر نوشت

$$M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt} \quad (44)$$

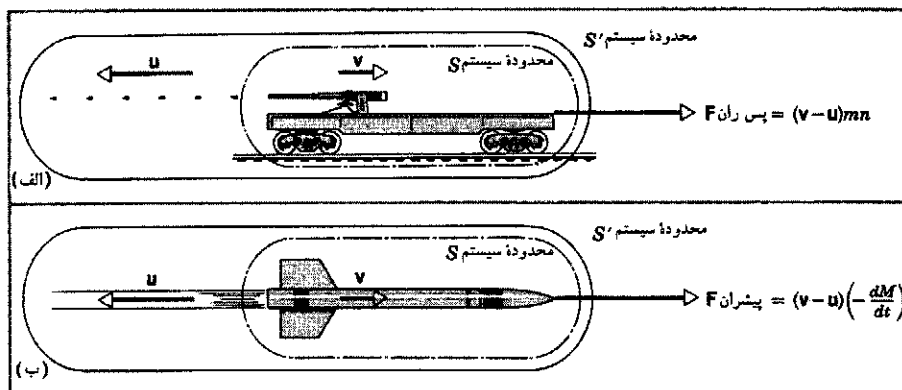
که در آن v_{rel} سرعت گازهای خروجی است. توجه کنید که dM/dt منفی است و در نتیجه، طرف راست معادله ۴۴ هم مانند طرف چپ آن مثبت است.

معادله ۴۴ معادله اساسی حاکم بر رفتار موشک است. در حین عملکرد پیوسته موتور، نیروی پیشران (طرف راست معادله ۴۴) ثابت است (ولی شتاب حاصل برای موشک، dv/dt ، ثابت نیست چون جرم M با مصرف شدن سوخت تغییر می‌کند).

می‌خواهیم تغییر در سرعت موشک را به ازای مصرف مقدار معینی از سوخت، m_b ، است بررسی کنیم. سرعت اولیه v_i و سرعت نهایی پس از مصرف سوخت v_f است. معادله ۴۴ را به صورت زیر می‌نویسیم

$$dv = -v_{rel} \frac{dM}{M} \quad (45)$$

در معادله بالا M ، جرم کل موشک، متغیر است. اگر جرم اولیه موشک به اضافه سوخت در شروع حرکت برابر با M_o باشد، در هر زمان دیگر مانند t ، باید جرم باقی‌مانده M به اضافه جرم سوخت مصرف شده تا آن زمان، m_b ، برابر با M_o باشد؛ پس $M = M_o - m_b$ است. از معادله ۴۵ بین دو حد v_i وقتی جرم موشک برابر M_o است، و v_f وقتی جرم کل برابر $M_o - m_b$ است، انتگال. م.گ. به نتیجه



شکل ۲۱. (الف) سلسله‌ی رگباری از گلوله با آهنگ n گلوله در واحد زمان شلیک می‌کند. تکانه کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر نیروی پس‌زنی قرار می‌گیرد و تکانه‌اش تغییر می‌کند. تغییر تکانه S در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه‌ای که گلوله‌ها (در خلاف جهت پس‌زنی) حمل می‌کنند، یعنی $mn \mathbf{u} dt$. (ب) موشک جریانی از محصولات احتراق را به بیرون می‌راند. تکانه کل سیستم S' ثابت می‌ماند، ولی زیرسیستم S تحت تأثیر یک نیروی پیشران است که تکانه‌اش را تغییر می‌دهد. تغییر تکانه موشک در زمان dt دقیقاً برابر است با تکانه $\mathbf{u} dM$ که گازهای خروجی در خلاف جهت حرکت موشک حمل کرده‌اند.

است که روی تسمه ریخته می‌شود. سیستم S' شامل تسمه نقاله و همه ماسه موجود در قیف در آغاز حرکت است. سیستم S (تسمه نقاله و ماسه روی آن) با جرم متغیر M را به عنوان جسم در نظر می‌گیریم. در این مورد، در معادله (۴۱)، $d\mathbf{v}/dt = 0$ است، زیرا سرعت تسمه نقاله ثابت است، و $\mathbf{u} = 0$ است، زیرا ماسه در چارچوب مرجع آزمایشگاه سرعت افقی ندارد. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \frac{dM}{dt}$$

در این مثال، dM/dt مثبت است چون جرم سیستم با گذشت زمان زیاد می‌شود. پس، همان‌طور که انتظار می‌رود، نیروی خارجی مورد نیاز هم باید در جهت حرکت تسمه باشد. توجه داشته باشید که جرم تسمه در مسئله دخالتی ندارد، چون فرض کرده‌ایم که تسمه با سرعت ثابت حرکت می‌کند.

توانی که نیروی خارجی تولید می‌کند عبارت است از

$$P_{\text{ext}} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F}_{\text{ext}} = \mathbf{v} \cdot \left(\mathbf{v} \frac{dM}{dt} \right) = v^2 \left(\frac{dM}{dt} \right)$$

و چون v ثابت است می‌توانیم رابطه بالا را به صورت زیر بنویسیم

$$P_{\text{ext}} = \frac{d(Mv^2)}{dt} = 2 \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Mv^2 \right) = 2 \frac{dK}{dt}$$

یعنی که توان خارجی مورد نیاز برای در حرکت نگه داشتن تسمه، دو برابر آهنگ افزایش انرژی جنبشی سیستم است؛ توجه داشته باشید که لازم نیست انرژی جنبشی خود تسمه نقاله را هم در نظر بگیریم زیرا ساعت آن ثابت است. در نتیجه انرژی جنبشی‌اش تغییر نمی‌کند.

یعنی

$$F = v_{\text{rel}} \left| \frac{dM}{dt} \right| = (1520 \text{ m/s})(146 \text{ kg/s}) \\ = 2.22 \times 10^5 \text{ N}$$

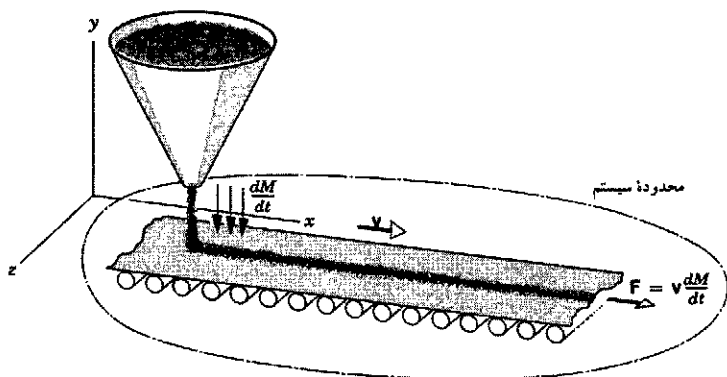
توجه داشته باشید که در ابتدا وقتی مخزنهای سوخت پر هستند، نیروی خالص بالاسویی که به موشک وارد می‌شود (با چشمپوشی از مقاومت هوا) برابر است با نیروی پیشران منهای وزن اولیه Mg ، یعنی برابر است با 88600 N . در لحظه قبل از اتمام سوخت نیروی خالص بالاسو عبارت است از نیروی پیشران منهای وزن نهایی موشک، یعنی $1.78 \times 10^5 \text{ N}$. (ب) از معادله ۴۶ می‌توانیم سرعت موشک در لحظه اتمام سوخت را محاسبه کنیم

$$v_f = -v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0 - m_b}{M_0} \right) \\ = -(1520 \text{ m/s}) \ln \left(\frac{13600 \text{ kg} - 9100 \text{ kg}}{13600 \text{ kg}} \right) \\ = 1680 \text{ m/s}$$

اگر نیروهای خارجی گرانش و مقاومت هوا را در نظر بگیریم، سرعت نهایی کمتر از این مقدار می‌شود.

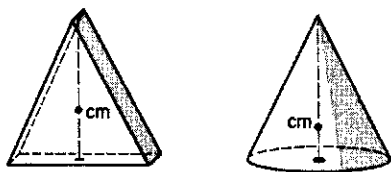
مثال ۱۳. از قیف ساکنی ماسه با آهنگ dM/dt روی تسمه نقاله‌ای که با سرعت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند، ریخته می‌شود (شکل ۲۲). توان لازم برای اینکه تسمه با سرعت v به حرکتش ادامه بدهد چقدر است؟

حل: شکل ۲۲ وضعیت را نشان می‌دهد. سیستم S شامل تسمه نقاله و ماسه انباشته شده است و ΔM نشاندهنده ماسه اضافه شده است.



شکل ۲۲. مثال ۱۳. از قیفی با آهنگ dM/dt ماسه روی تسمه نقاله‌ای که با سرعت ثابت v در چارچوب مرجع آزمایشگاه حرکت می‌کند می‌ریزد. نیروی لازم برای اینکه تسمه نقاله با سرعت ثابت به حرکت خود ادامه بدهد برابر است با $v dM/dt$. قیف در چارچوب مرجع آزمایشگاه ساکن است.

می‌دهد. مرکز جرم مثلث در فاصله $1/3$ ارتفاع از قاعده قرار دارد در حالی که مرکز جرم مخروط در فاصله $1/4$ ارتفاع از قاعده واقع است. آیا می‌توانید علت این اختلاف را توضیح بدهید؟

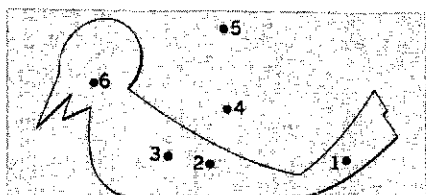


شکل ۲۳. پرسش ۲

۳. مفهوم مرکز جرم با مفهوم مرکز جغرافیایی کشور چه ارتباطی دارد؟ با مفهوم مرکز جمعیتی چگونه؟ از اینکه مرکز جغرافیایی غیر از مرکز جمعیتی است چه نتیجه‌ای می‌شود گرفت؟

۴. مرکز جرم جو زمین کجاست؟

۵. مجسمه‌ساز آماتوری می‌خواهد ماکت پرنده‌ای را بسازد. خوشبختانه، مدل نهایی او (شکل ۲۴) می‌تواند سرپا بایستد. مدل با استفاده از یک ورق فلزی ضخیم با ضخامت یکنواخت ساخته شده است. کدام یک از نقطه‌های نشان داده شده روی شکل با احتمال بیشتری می‌تواند مرکز جرم باشد؟



شکل ۲۴. پرسش ۵

روشن است که در این مورد انرژی مکانیکی پایسته نیست. تنها نصف کار انجام شده توسط موتور محرک تسمه به صورت انرژی مکانیکی سیستم ظاهر می‌شود. چه بر سر نصف دیگر کار انجام شده آمده است؟ برای پاسخگویی به این پرسش، معادله پایستگی انرژی (معادله ۳) را در مورد یک عنصر جرم کوچک dM که روی تسمه نقاله می‌افتد به کار می‌بریم. فرض می‌کنیم این عنصر از ارتفاع خیلی کمی سقوط می‌کند و بنابراین می‌شود از تغییر انرژی پتانسیل آن چشمپوشی کرد. در بازه زمانی dt که طول می‌کشد تا dM با سرعت تسمه به حرکت در بیاید، کار انجام شده توسط منبع خارجی برابر است با $dW = P_{ext} dt = v^2 dM$. انرژی جنبشی این عنصر هم برابر با $\frac{1}{2} (dM) v^2 +$ است. از معادله ۳ نتیجه می‌شود

$$\Delta E_{int} = v^2 dM - \frac{1}{2} (dM) v^2 = \frac{1}{2} (dM) v^2$$

یعنی انرژی داخلی سیستم به اندازه انرژی جنبشی آن افزایش می‌یابد. به این ترتیب نصف توان داده شده به سیستم صرف انرژی جنبشی ماسه متحرک می‌شود، در حالی که نصف دیگر آن به انرژی داخلی ماسه و تسمه تبدیل می‌شود (که می‌تواند ناشی از اصطکاک میان ماسه و تسمه، بعد از افتادن ماسه روی تسمه ولی قبل از حرکت آن با سرعت تسمه، باشد).

در این مثال جرم تغییر می‌کرد ولی سرعت ثابت بود. در مواردی ممکن است سرعت سیستمی با جرم متغیر، در نتیجه افزودن جرم به سیستم کاهش یابد. چنین چیزی در واقع معکوس عمل موشک است.^۱

پرسشها

۱. آیا مرکز جرم اجسام جامد الزاماً در داخل آنها واقع می‌شود؟ اگر نمی‌شود، مثالی بزنید.

۲. شکل ۲۳ یک منشور مثلث متساوی‌الساقین و یک مخروط دوار قائم را که قطر آن برابر قاعده مثلث متساوی‌الساقین است نشان

۱. یک مقاله مفید در این مورد عبارت است از

"The Falling Raindrop: Variations on a Theme of Newton,"

K. S. Krane, *American Journal of Physics*, February 1981,

p. 113.

ولی حتی الامکان دقیق، توصیف کنید. مناسبترین کار این است که هر حرکت را در حین هر یک از بازه‌های زمانی زیر توصیف کنید: (الف) پس از پرتاب فشفشه، ولی قبل از انفجار آن؛ (ب) از زمان انفجار تا وقتی که اولین قطعه فشفشه به یخ برخورد می‌کند؛ (ج) از لحظه برخورد اولین پاره به یخ تا لحظه‌ای که آخرین پاره به زمین می‌خورد؛ و (د) در زمانی که همه پاره‌های فشفشه بر یخ فرود آمده‌اند ولی هیچ‌کدام به لبه یخ نرسیده‌اند.

۱۵. درستی عبارت زیر را تحقیق کنید. "قانون پایستگی تکانه خطی وقتی در مورد یک تک‌ذره به کار گرفته شود، هم‌ارز قانون اول حرکت نیوتون است."

۱۶. قطعه یخی را با سرعت v به فضای تخلیه شده و آزاد از گرانشی که داغ هم هست پرتاب می‌کنیم. یخ کم‌کم ذوب و به آب تبدیل می‌شود و بعد می‌جوشد و بخار می‌شود. (الف) آیا این مجموعه در تمام مدت فرایند سیستمی از ذرات است؟ (ب) اگر چنین است، آیا همواره همان سیستم از ذرات است؟ (ج) آیا حرکت مرکز جرم دچار تغییر ناگهانی می‌شود؟ (د) آیا تکانه خطی کل تغییر می‌کند؟

۱۷. ذره‌ای به جرم $m = 0$ (مثلاً، یک نوترینو) حامل تکانه است. از دیدگاه معادله ۲۲ که در آن می‌بینیم تکانه مستقیماً متناسب با جرم است، چگونه چنین چیزی ممکن است؟

۱۸. اگر فقط نیروی خارجی است که می‌تواند وضعیت حرکتی مرکز جرم یک جسم را تغییر بدهد، پس چگونه نیروی داخلی ترمزها می‌تواند اتومبیل را متوقف کند؟

۱۹. می‌گوییم که اتومبیل از نیروهای داخلی شتاب نمی‌گیرد بلکه به نیروهای خارجی وارد از جاده است که به آن شتاب می‌دهد. پس چرا اتومبیلها نیاز به موتور دارند؟

۲۰. آیا کاری که نیروهای داخلی انجام می‌دهند می‌تواند انرژی جنبشی جسمی را کاهش بدهد؟ ... افزایش بدهد؟

۲۱. (الف) اگر روی سیستمی کار انجام شود، آیا آن سیستم الزاماً انرژی جنبشی کسب می‌کند؟ (ب) اگر سیستمی انرژی جنبشی کسب کند، آیا الزاماً معنی‌اش این است که یک عامل خارجی روی آن کار انجام داده است؟ مثال بیاورید. (اینجا منظور ما از "انرژی جنبشی"، انرژی جنبشی وابسته به حرکت مرکز جرم است.)

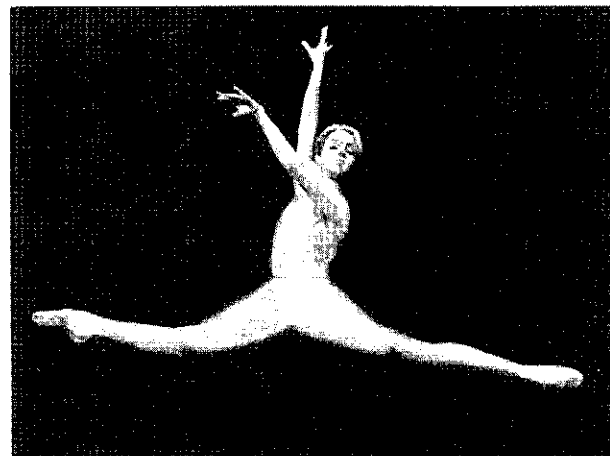
۲۲. در مثال ۹، شاهد موردی بودیم (اسکیت‌باز) که در آن انرژی جنبشی پدید آمد ولی هیچ کار خارجی انجام نشده بود. حالا برعکس این مورد را در نظر بگیرید. یک آچار پیچ‌گوشتی را محکم در برابر یک سنگ سنباده چرخان نگه می‌داریم. در اینجا کار خارجی انجام می‌شود ولی انرژی جنبشی آچار پیچ‌گوشتی تغییر نمی‌کند. این تناقض ظاهری را توضیح بدهید.

۲۳. آیا می‌توانید نمونه‌های دیگری غیر از آنچه در متن این کتاب ارائه

۶. کسی می‌گوید که وقتی یک قهرمان پرش ارتفاع از روی میله نشان می‌گذرد، مرکز جرم او در واقع از زیر میله عبور می‌کند. آیا چنین چیزی امکان دارد؟

۷. بالرینی در حال یک "پرش بزرگ" (شکل ۲۵) است. در قسمتی میانی این پرش به نظر می‌رسد که او به‌طور افقی حرکت می‌کند. نشان بدهید که بالرین می‌تواند پاهایش را در حین پرواز حرکت طوری حرکت بدهد که مرکز جرم او واقعاً مسیر سهمی را طی کند، ولی قسمت بالای سرش کم‌وبیش در حرکت افقی باشد.^۱

۸. یک جسم سبک و یک جسم سنگین انرژی جنبشی انتقالی یکسان دارند. تکانه کدام یک از این دو جسم بیشتر است؟



شکل ۲۵. پرش ۷

۹. پرنده‌ای در یک قفس سیمی است که از یک ترازوی فنری آویخته شده است. وقتی این پرنده در حال پرواز است آیا عددی که ترازو نشان می‌دهد بیشتر، کمتر، یا برابر با وقتی است که پرنده در قفس نشسته است؟

۱۰. آیا می‌شود یک قایق بادبانی را با دمیدن هوا به بادبانهای آن توسط بادبزن‌ی که به قایق متصل است، به حرکت در آورد؟ پاسخ خودتان را توضیح بدهید.

۱۱. آیا جسمی که تکانه ندارد می‌تواند انرژی داشته باشد؟ آیا جسمی که انرژی ندارد می‌تواند تکانه داشته باشد؟ در هر مورد توضیح بدهید.

۱۲. قایقران می‌تواند، در آب آرام، با کشیدنهای تند و کوتاه (ضربه‌ای) طنابی که به دماغه قایق بسته شده است، خودش را به ساحل برساند (واقعاً می‌تواند)؟ چگونه چنین کاری ممکن است؟

۱۳. شخصی که ساکن روی سطح افقی بدون اصطکاک‌ی نشسته است چگونه می‌تواند از جا برخیزد؟

۱۴. شخصی روی قطعه یخ بزرگ لغزنده‌ای ایستاده است و فشفشه ترقه‌ای روشنی در دست دارد. او فشفشه را در زاویه‌ای (که قائم نیست) به هوا پرتاب می‌کند. حرکت مرکز جرم فشفشه و حرکت مرکز جرم سیستم مشتمل بر شخص و فشفشه را به‌طور خلاصه،

۱. نگاه کنید به

"The Physics of Dance", Kenneth Laws, *Physics Today*, February 1985, p. 24.

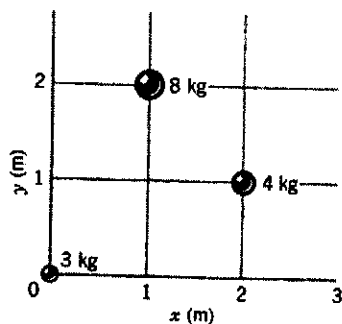
می‌توان معادله بالا را برای $u(t)$ حل کرد و به دست آورد

$$u(t) = m_1 d_i \cos \omega t$$

که در آن $\omega = \sqrt{k/\mu}$ است. (ج) از جواب فوق $x_1(t)$ ، $x_2(t)$ ، $v_1(t)$ و $v_2(t)$ را به دست بیاورید. این مسئله نشان می‌دهد که با معادله مرکز جرم می‌توانیم حرکت‌های مربوط به m_1 و m_2 در وضعیت شکل ۱ را تحلیل کنیم.

بخش ۹-۲ سیستم‌های بس-ذره‌ای

۲. مرکز جرم سه ذره نشان داده شده در شکل ۲۶ در کجا واقع است؟



شکل ۲۶. مسئله ۲

۳. مرکز جرم سیستم زمین-ماه در چه فاصله‌ای از مرکز زمین واقع است؟ (برای تعیین جرم‌های زمین و ماه و فاصله مرکز به مرکز زمین-ماه به پیوست ج رجوع کنید. مقایسه جواب این مسئله با شعاع زمین جالب است.)

۴. نشان بدهید نسبت فاصله‌های x_1 و x_2 دو ذره از مرکز جرم آنها برابر با عکس نسبت جرم‌های آنهاست: یعنی $x_1/x_2 = m_2/m_1$.
۵. اتومبیلی به جرم 2210 kg در جاده مستقیمی با سرعت 105 km/h در حرکت است. اتومبیل دیگری به جرم 2080 kg با سرعت 435 km/h در پی آن در حرکت است. مرکز جرم سیستم متشکل از دو اتومبیل با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶. دو اسکیت‌باز، یکی به جرم 65 kg و دیگری به جرم 42 kg ، روی سطح یخزده ایستاده‌اند و دو انتهای تیری به طول 9.7 m را، که جرم آن قابل چشم‌پوشی است، در دست دارند. آنها "با کشیدن" تیر به طرف یکدیگر شروع به حرکت می‌کنند تا به هم برسند. اسکیت‌باز 42 کیلوگرمی چه مسافتی را طی می‌کند؟

۷. مردی به جرم m در پایین نردبان طنابی آویخته از بالونی به جرم M ایستاده است (شکل ۲۷). بالون نسبت به زمین ساکن است. (الف) اگر این مرد با سرعت v (نسبت به نردبان) از نردبان بالا برود، بالون در چه جهتی و با چه سرعتی (نسبت به زمین) حرکت خواهد کرد؟ (ب) وقتی که مرد از صعود باز می‌ایستد وضعیت حرکت چگونه خواهد بود؟

شده است برای سیستم‌های با جرم متغیر معرفی کنید؟
۲۴. همان‌طور که در متن کتاب مطرح شد، نمی‌توانیم از معادله $\mathbf{F}_{\text{ext}} = d(M\mathbf{v})/dt$ برای سیستمی با جرم متغیر استفاده کنیم. برای نشان دادن این مطلب (الف) معادله بالا را به صورت $(\mathbf{F}_{\text{ext}} - M d\mathbf{v}/dt)/(dM/dt) = \mathbf{v}$ می‌نویسیم و (ب) نشان می‌دهیم که یک طرف این معادله در همه چارچوب‌های لخت مقدار یکسانی دارد در صورتی که طرف دیگر چنین نیست. پس این معادله در حالت کلی برقرار نیست. (ج) نشان بدهید که معادله ۴۲ به چنین تناقضی منجر نمی‌شود.

۲۵. در سال ۱۹۲۰ یک روزنامه مشهور درباره اولین آزمایش‌های موشک که توسط رابرت اچ گودارد انجام می‌شد مقاله‌ای چاپ کرد که در آن تصور اینکه موشک می‌تواند در خلأ کار کند مردود دانسته شده بود: "پروفسور گودارد، با آن "گرسی" اش در کالج کلارک و با آن حمایتی که مؤسسه اسمیتسونی از او می‌کند، هنوز رابطه بین کنش و واکنش را نمی‌داند، و نمی‌داند که به چیزی بهتر از خلأ نیاز دارد تا در برابر کنش آن واکنشی در کار باشد سواکنش به خلأ مهمل است. البته، ندانسته‌های او ظاهراً فقط همین چیزهایی است که در دبیرستان درس داده می‌شود." کجای این استدلال غلط است؟

۲۶. سرعت نهایی مرحله آخر یک موشک چند مرحله‌ای خیلی بیشتر از سرعت نهایی یک موشک تک‌مرحله‌ای با همان جرم کل و همان مقدار سوخت است. در این مورد توضیح بدهید.

۲۷. آیا یک موشک می‌تواند به سرعتی بیشتر از سرعت گازهای خروجی که آن‌را به حرکت در می‌آورد، برسد؟ در هر صورت توضیح بدهید که چرا.

۲۸. آیا، غیر از موشک، روش دیگری برای پیشروی در فضای بیرونی وجود دارد. اگر چنین روش‌هایی وجود دارند، کدام‌اند و چرا از آنها استفاده نمی‌شود؟

۲۹. معادله ۴۹ حاکی از آن است که اگر به قدر کافی سوخت مصرف شود سرعت موشک می‌تواند بدون محدودیت افزایش یابد. آیا این گفته منطقی است؟ محدودیت کاربرد معادله ۴۶ کدام است؟ موقع به دست آوردن معادله ۴۶ در کجا این محدودیت را اعمال کردیم؟

مسئله‌ها

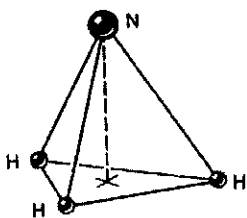
بخش ۹-۱ سیستم‌های دو ذره‌ای

۱. (الف) x_1 را از معادله ۴ و v_1 را از معادله ۵ به دست بیاورید و این نتایج را همراه با معادله ۳ در معادله ۲ قرار بدهید، تا ببینید که

$$m_1 k d_i^2 = k u^2 + \mu \left(\frac{du}{dt} \right)^2$$

که در آن $\mu = m_1 m_2 / M$ و $u = M x_2 - M x_{\text{cm}} - m_1 L$ است. (ب) نشان بدهید که با استفاده از روش‌های ارائه شده در بخشی ۸-۴

مرکز جرم این مولکول را نسبت به اتم نیتروژن معین کنید.

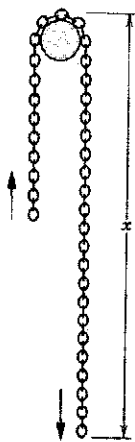


شکل ۲۹. مسئله ۱۰

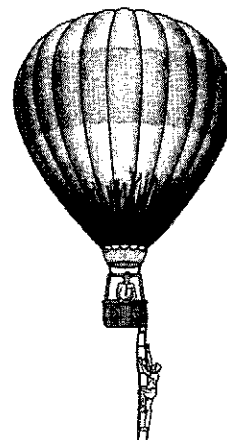
۱۱. دو جسم، که هرکدام از مجموعه‌ای از وزنه‌ها تشکیل شده‌اند، به وسیله نخ سبک‌وزنی به هم متصل شده‌اند. این نخ از روی یک قرقره سبک وزن بدون اصطکاک به قطر 56 mm می‌گذرد. هر دو جسم در یک ترازو قرار دارند. جرم هر یک از دو جسم در آغاز 85 g است. (الف) موقعیت مرکز جرم آنها را معین کنید. (ب) سی و چهار گرم از یک جسم را به دیگری منتقل می‌کنیم، ولی نمی‌گذاریم اجسام حرکت کنند. مرکز جرم سیستم کجاست؟ (ج) اکنون دو جسم را رها می‌کنیم. حرکت مرکز جرم سیستم را توصیف کنید و شتاب آن را به دست بیاورید.

۱۲. خمپاره‌ای توسط خمپاره‌اندازی با سرعت دهانه‌ای 466 m/s در امتداد 57.4° بالای افق شلیک می‌شود. در بالاترین نقطه مسیر، خمپاره منفجر و به دو پاره با جرمهای مساوی تقسیم می‌شود. یکی از دو پاره که سرعتش بلافاصله پس از انفجار صفر است، در امتداد قائم سقوط می‌کند. با فرض مسطح بودن زمین، پاره دوم در چه فاصله‌ای از خمپاره‌انداز با زمین برخورد می‌کند؟

۱۳. زنجیر یکنواخت قابل انعطافی که طول آن L و وزن واحد طولش λ است از روی میخ بدون اصطکاک کوچکی می‌گذرد (شکل ۳۰). این زنجیر وقتی که طول x از یک طرف و طول $L - x$ از طرف دیگر میخ آویخته است، از حالت سکون رها می‌شود. شتاب a را به صورت تابعی از x پیدا کنید.



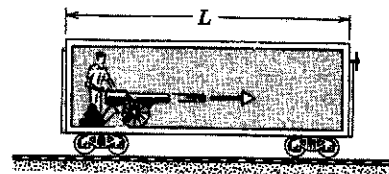
شکل ۳۰. مسئله ۱۳



شکل ۲۷. مسئله ۷

۸. دو ذره P و Q در ابتدا ساکن‌اند و 1.64 m از هم فاصله دارند. جرم ذره P برابر 1.43 kg و جرم ذره Q برابر 4.29 kg است. این دو ذره همدیگر را با نیروی ثابت $1.79 \times 10^{-2} \text{ N}$ جذب می‌کنند. هیچ نیروی خارجی روی این سیستم عمل نمی‌کند. (الف) حرکت مرکز جرم را توصیف کنید. (ب) در چه فاصله‌ای از مکان اولیه ذره P ، دو ذره با هم برخورد می‌کنند؟

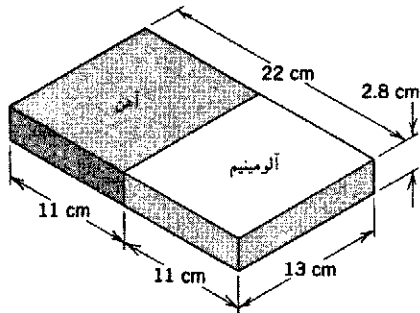
۹. یک توپ و انبوهی گلوله توپ در یک واگن قطار در بسته به طول L قرار گرفته‌اند (شکل ۲۸). توپ به سمت راست شلیک می‌کند و واگن به سمت چپ پس می‌رود. گلوله‌ها پس از برخورد با دیوار مقابل در داخل واگن باقی می‌مانند. (الف) پس از آنکه همه گلوله‌ها شلیک شد، بیشترین فاصله‌ای که واگن از موقعیت اولیه‌اش جابه‌جا می‌شود، چقدر است؟ (ب) سرعت واگن پس از آنکه همه گلوله‌ها شلیک شد چقدر است؟



شکل ۲۸. مسئله ۹

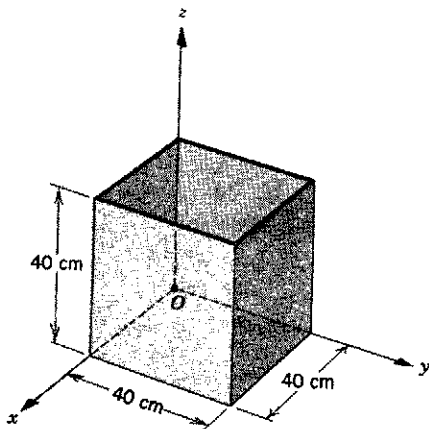
۱۰. در مولکول آمونیاک (NH_3)، سه اتم هیدروژن (H) تشکیل یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌دهند، فاصله بین مرکزهای آنها برابر با $1.628 \times 10^{-11} \text{ m}$ است، به طوری که مرکز مثلث در فاصله $1.0 \times 10^{-11} \text{ m}$ از هر یک از هیدروژن‌ها قرار می‌گیرد. اتم نیتروژن (N) در رأس هرمی قرار دارد که سه هیدروژن قاعده آن را تشکیل می‌دهند (شکل ۲۹). فاصله بین نیتروژن-هیدروژن برابر با $1.014 \times 10^{-11} \text{ m}$ است و نسبت جرم اتمی نیتروژن به هیدروژن 13.9 است. موقعیت

۱۸. شکل ۳۳ تیغه مرکبی به ابعاد $22\text{ cm} \times 13\text{ cm} \times 2.8\text{ cm}$ را نشان می‌دهد. نصف تیغه از آلومینیم با چگالی (2.7 g/cm^3) ساخته شده است و نصف دیگر از آهن (با چگالی 7.85 g/cm^3)؛ (شکل ۳۳). مرکز جرم تیغه در کجاست؟



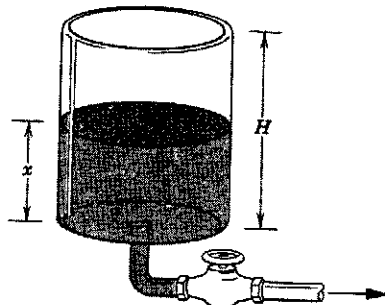
شکل ۳۳. مسئله ۱۸

۱۹. یک جعبه مکعبی شکل به ضلع 40 cm از ورق فلزی نازکی ساخته‌ایم. این جعبه سر ندارد. مختصات مرکز جرم جعبه را در دستگاه مختصات شکل ۳۴ معین کنید.



شکل ۳۴. مسئله ۱۹

۲۰. بشکه استوانه‌ای شکلی پر از بنزین هواپیماست. این بشکه را از طریق شیریه که در ته آن تعبیه شده است تخلیه می‌کنیم (شکل ۳۵).



شکل ۳۵. مسئله ۲۰

از ساحل فاصله دارد. این سگ 8.5 ft به طرف ساحل حرکت می‌کند و سپس می‌ایستد. وزن قایق 464 lb است و می‌توان فرض کرد که بین آب و قایق اصطکاک وجود ندارد. در این موقع فاصله سگ از ساحل چقدر است؟ (راهنمایی: مرکز جرم قایق و سگ حرکت نمی‌کند. چرا؟) در طرف چپ شکل ۳۱ هم ساحل هست.



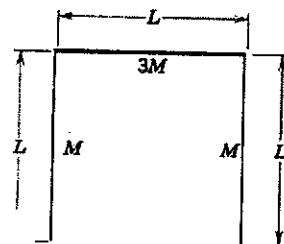
شکل ۳۱. مسئله ۱۴

۱۵. دو محیط‌بان یکی به جرم 78.4 kg و دیگری که سبکتر است در یک قایق به جرم 316 kg مشغول گشت‌زنی روی دریاچه‌اند. وقتی قایق در آب آرام دریاچه ساکن است، آنها جاهایشان را که 2.93 m از هم فاصله دارند نسبت به مرکز قایق متقارن‌اند، با هم عوض می‌کنند. محیط‌بان اول متوجه می‌شود قایق نسبت به یک کنده شناور در آب 412 cm جابه‌جا شده است و از آنجا جرم محیط‌بان دوم را حساب می‌کند. جرم دومی چقدر است؟

۱۶. شخصی به جرم 844 kg در قسمت عقب یک سورت‌م‌های 425 kg کیلوگرمی که با سرعت 416 m/s روی یخ بدون اصطکاک حرکت می‌کند، ایستاده است. این شخص تصمیم می‌گیرد که به جلوی این قایق که 182 m طول دارد برود، و این کار را با سرعت 208 m/s نسبت به قایق انجام می‌دهد. در حینی که این شخص به سمت جلو می‌رود، قایق چقدر روی یخ جابه‌جا می‌شود؟

بخش ۳-۹ مرکز جرم اجسام جامد

۱۷. با سه میله نازک، هر یک به طول L ، یک "مربع" سه ضلعی ساخته‌ایم (شکل ۳۲). جرم هر یک از دو میله متقابل M و جرم میله سوم برابر با $3M$ است. مرکز جرم این مجموعه در کجا واقع شده است؟



شکل ۳۲. مسئله ۱۷

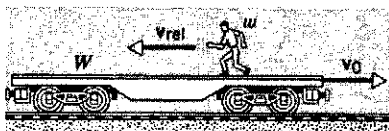
۲۸. سرعت الکترونی برابر با $0.99c$ است. (الف) تکانه خطی آن را برحسب $\text{kg} \cdot \text{m/s}$ به دست بیاورید. (ب) این تکانه را برحسب یکای MeV/c بیان کنید.

بخش ۹-۶ پایستگی تکانه خطی

۲۹. یک مرد ۱۹۵ پوندی روی سطحی با اصطکاک ناچیز ایستاده است. این مرد به یک سنگ ۱۵۸ پوندی که پیش پایش قرار گرفته ضربه می‌زند و به آن سرعت 12.7 ft/s می‌دهد. در نتیجه این کار، مرد با چه سرعتی به حرکت در می‌آید؟

۳۰. یک مرد ۷۵٫۲ کیلوگرمی سوار بر گاری‌ای است به جرم ۳۸٫۶ کیلوگرم که با سرعت 2.33 m/s در حرکت است. این مرد چنان از گاری به بیرون می‌پرد که با سرعت افقی صفر بر زمین فرود می‌آید. سرعت گاری در اثر این کار چقدر تغییر می‌کند؟

۳۱. یک واگن روباز قطار به وزن W می‌تواند روی خط آهن افقی و مستقیمی بدون اصطکاک به حرکت دربیاید. در آغاز شخصی به وزن w روی این واگن که با سرعت v به سمت راست می‌رود ایستاده است. اگر این شخص به سمت چپ بدود و قبل از اینکه از انتهای واگن به خارج بیرد، سرعت او نسبت به واگن برابر v_{rel} باشد (شکل ۳۷)، تغییر در سرعت واگن چقدر است؟



شکل ۳۷. مسئله ۳۱

۳۲. یک سورتمه موشکی به جرم 2870 kg با سرعت 252 m/s روی یک ریل حرکت می‌کند. در یک نقطه معین، چمچه‌ای که به سورتمه وصل است در گودال پر از آبی که بین ریلها واقع شده است فرو می‌رود و آب به داخل یک مخزن خالی سوار بر سورتمه می‌ریزد. سرعت سورتمه را پس از آنکه 917 kg آب به مخزن ریخته شد پیدا کنید.

۳۳. یک مسلسل مخصوص در هر دقیقه 220 گلوله لاستیکی 12.6 g گرمی را با سرعت دهانه‌ای 975 m/s شلیک می‌کند. با این مسلسل چند گلوله باید به یک جانور 847 kg کیلوگرمی که با سرعت 387 m/s به طرف ما هجوم می‌آورد شلیک کنیم تا جانور در مسیر خودش متوقف شود؟ (فرض کنید گلوله‌ها افقی حرکت می‌کنند و پس از برخورد با هدف به زمین می‌افتند.)

۳۴. فضاپیمایی با سرعت 3860 km/h نسبت به زمین در حرکت است. موتور موشکی آن که سوختش تمام شده است از سفینه فرمان جدا می‌شود و با سرعت 125 km/h نسبت به سفینه به عقب رانده می‌شود. جرم موتور چهار برابر جرم سفینه است. سرعت سفینه فرمان پس از جدا شدن موتور چقدر است؟

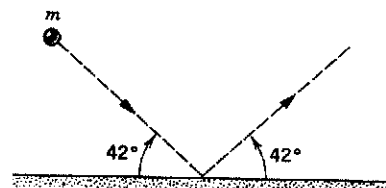
(الف) حرکت مرکز جرم بشکه و باقی مانده محتوای آن را، در حین تخلیه بنزین، به طور کیفی توصیف کنید. (ب) وقتی مرکز جرم بشکه و باقی مانده محتوای آن به پایین‌ترین جای ممکن می‌رسد، عمق x بنزین باقی مانده در بشکه چقدر است؟ جواب را برحسب ارتفاع بشکه (H) ، جرم بشکه (M) ، و جرم بنزینی که بشکه را پر می‌کند (m) بیان کنید. ۲۱. مرکز جرم یک ورق نیمدایره‌ای همگن را تعیین کنید. شعاع دایره را R بگیرید.

بخش ۹-۴ تکانه خطی یک ذره

۲۲. یک اتومبیل فولکس واگن 816 kg کیلوگرمی با چه سرعتی حرکت کند تا (الف) تکانه آن برابر تکانه اتومبیل کادیلاک 2650 kg کیلوگرمی که با سرعت 16 km/h حرکت می‌کند باشد، و (ب) انرژی جنبشی آن با انرژی جنبشی همین کادیلاک برابر باشد؟ (ج) همین محاسبات را به جای کادیلاک برای یک کامیون 9080 kg کیلوگرمی انجام بدهید.

۲۳. یک وانت 2000 kg کیلوگرمی که با سرعت 40 km/h به سمت شمال در حرکت است به طرف شرق می‌پیچد و سرعتش به 50 km/h می‌رسد. (الف) تغییر انرژی جنبشی وانت چقدر است؟ (ب) مقدار و جهت تغییر تکانه وانت را پیدا کنید.

۲۴. جسمی به جرم 488 kg با سرعت 31.4 m/s و با زاویه 42° به یک صفحه فولادی می‌خورد و با همان سرعت و تحت همان زاویه باز می‌جهد (شکل ۳۶). تغییر تکانه خطی جسم (مقدار و جهت) را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئله ۲۴

۲۵. یک گوی 524 g گرمی با سرعت اولیه 163 m/s و با زاویه 4° بالای افق از زمین پرتاب می‌شود. (الف) مقدار انرژی جنبشی گوی در آغاز پرتاب، و درست قبل از اینکه به زمین برخورد کند چقدر است؟ (ب) تکانه‌های (مقدار و جهت) متناظر با حالت‌های بالا و تغییر تکانه را تعیین کنید. (ج) نشان بدهید که تغییر تکانه برابر است با وزن گوی ضربدر زمان پرواز آن، و از آنجا زمان پرواز را تعیین کنید.

۲۶. تکانه خطی، p ، ذره‌ای به جرم m برابر است با mc . سرعت آن برحسب c ، سرعت نور، چقدر است؟

۲۷. نشان بدهید که معادله ۲۳ در سرعت‌های $v \ll c$ به معادله ۲۱ تبدیل می‌شود. راهنمایی: نشان بدهید که معادله ۲۳ را می‌توان به صورت زیر نوشت

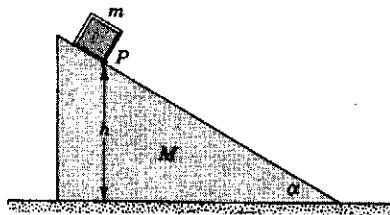
$$K = mc^2 \left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1 \right)$$

۴۰. جسمی به جرم 8 kg که تحت تأثیر هیچ نیروی خارجی نیست، با سرعت 2 m/s حرکت می‌کند. در یک زمان معین یک انفجار داخلی روی می‌دهد و جسم به دو پاره تقسیم می‌شود. جرم هر یک از دو پاره 4 kg است، و بر اثر انفجار به این سیستم دوپاره‌ای 16 J انرژی جنبشی انتقالی داده می‌شود. هیچ یک از دوپاره از خط اولیه حرکت خارج نمی‌شود. سرعت و جهت حرکت هر پاره را تعیین کنید.

۴۱. فرض کنید واگن مسئله ۳۱ در ابتدا ساکن باشد. این واگن حامل n نفر، هر کدام به وزن w است. افراد یک به یک و به دنبال هم با سرعت نسبی v_{rel} می‌دوند و از واگن پایین می‌پرند. آیا سرعت واگن در این صورت بیشتر است یا وقتی که همه n نفر با هم با سرعت v_{rel} واگن را ترک کنند؟

۴۲. یک توپ 1400 kg که گلوله‌های 70 kg کیلوگرمی را با سرعت دهانه‌ای 556 m/s شلیک می‌کند، در امتداد 39° بالای افق نشانه‌روی شده است. توپ روی ریل‌های بدون اصطکاک قرار گرفته است و در نتیجه می‌تواند آزادانه پس بزند. (الف) سرعت گلوله توپ نسبت به زمین چقدر است؟ (ب) گلوله با چه زاویه‌ای نسبت به زمین پرتاب شده است؟ (راهنمایی: مؤلفه افقی تکانه سیستم به هنگام شلیک توپ ثابت می‌ماند.)

۴۳. قالبی به جرم m روی گوه‌ای به جرم M واقع شده و گوه هم روی یک میز افقی قرار گرفته است (شکل ۳۹). سطح‌های تماس بدون اصطکاک‌اند. اگر این سیستم از حال سکون از وضعیتی که نقطه P در ارتفاع h از سطح میز قرار دارد شروع به حرکت کند، سرعت گوه در لحظه‌ای که نقطه P به سطح میز می‌رسد چقدر است؟



شکل ۳۹. مسئله ۴۳

بخش ۹-۷ کار و انرژی در سیستم ذرات

۴۴. اتومبیلی که با مسافران 3680 lb (یعنی 1640 N) وزن دارد، با سرعت 70 mi/h (یعنی 113 km/h) در حرکت است که راننده ترمز می‌کند. جاده نیروی 1850 lb (یعنی 823 N) را بر چرخ‌ها وارد می‌کند و لغزشی هم در کار نیست. این اتومبیل قبل از توقف چه مسافتی را طی می‌کند؟

۴۵. از وضعیت ایستاده به حالت نیم‌خیز در می‌آیید و در این فرایند مرکز جرم خودتان را 18 cm پایین می‌آورید. بعد در راستای قائم به بالا می‌پرید. نیرویی که از طرف زمین در حین پرش بر شما وارد می‌شود سه برابر وزن شماست. سرعت شما به طرف بالا، وقتی از وضعیت "تمام قد" می‌گذرید و زمین را ترک می‌کنید، چقدر است؟

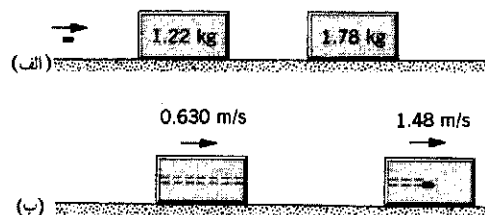
۳۵. مرحله نهایی موشکی با سرعت 7600 m/s در حرکت است. این مرحله نهایی متشکل از دو قسمت است که به هم چفت شده‌اند، یک قسمت بدنه موشک با جرم 290 kg و قسمت دیگر کلاهک با جرم 150 kg . وقتی چفت آزاد می‌شود، فنر فشرده‌ای موجب می‌شود که دو قسمت با سرعت نسبی 910 m/s از هم‌دیگر جدا شوند. (الف) سرعت هر قسمت پس از جدا شدن چقدر است؟ فرض کنید تمام سرعتها موازی باشند. (ب) انرژی جنبشی کل دو قسمت را پیش و پس از جدایی تعیین کنید و در صورتی که اختلافی وجود دارد علت آن را بگویید.

۳۶. مخزنی در حال سکون منفجر و به سه پاره تقسیم می‌شود. دو پاره آن که جرم یکی دو برابر دیگری است عمود بر هم و با سرعت یکسان 314 m/s به پرواز در می‌آیند. جرم پاره سوم سه برابر پاره سبکتر است. بزرگی و جهت سرعت پاره سوم را، بلافاصله پس از انفجار، پیدا کنید. (جهت این پاره را با تعیین زاویه امتداد حرکت آن با امتداد حرکت سبکترین پاره مشخص کنید.)

۳۷. یک هسته پرتوزای ساکن با گسیل یک الکترون و یک نوترینو در جهتهای عمود بر هم، وامی‌باشد. تکانه الکترون برابر با $6.4 \times 10^{-23} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ و تکانه نوترینو برابر با $1.2 \times 10^{-22} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$ است. (الف) بزرگی و جهت تکانه هسته پس‌زده را پیدا کنید. (ب) جرم هسته به‌جا مانده $5.8 \times 10^{-26} \text{ kg}$ است. انرژی جنبشی پس‌زنی آن چقدر است؟ نوترینو یکی از ذرات بنیادی طبیعت است.

۳۸. یک واگن رولاب به جرم 1930 kg ، که می‌تواند روی خط آهن عملاً بدون اصطکاک حرکت کند، در کنار سکوی ایستگاه متوقف است. یک فوتبالیست 108 kg کیلوگرمی که با سرعت 9.74 m/s در امتداد سکو و موازی با ریل‌ها می‌دود، روی واگن می‌پرد. (الف) سرعت واگن پس از آنکه این شخص بر آن سوار و در آن ساکن شد چقدر است؟ (ب) این مسافر حالا شروع به راه رفتن به سمت جلو با سرعت 520 m/s نسبت به واگن می‌کند. سرعت واگن در حین راه رفتن او چقدر است؟

۳۹. یک گلوله 3.54 kg گرمی به‌طور افقی به طرف دو قالب که روی میز بدون اصطکاک در حال سکون قرار دارند شلیک می‌شود (شکل ۳۸ الف). گلوله از قالب اول که جرم آن 1.22 kg است می‌گذرد و در داخل قالب دوم که جرم آن 1.78 kg است متوقف می‌شود. بر اثر این برخوردها قالبها به ترتیب سرعتهای 0.630 m/s و 1.48 m/s را کسب می‌کنند (شکل ۳۸ ب). با چشمپوشی از مقدار جرمی که گلوله از قالب اول برداشته است، کمیت‌های زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله بلافاصله پس از خروج از قالب اول و (ب) سرعت اولیه گلوله.



شکل ۳۸. مسئله ۳۹

۴۶. شخصی به جرم 55° کیلوگرم از وضعیت نیم‌خیزی که در آن مرکز جرم او 40°cm بالای سطح زمین است به طور قائم به بالا می‌پرد. مرکز جرم او که در لحظه جدا شدن از زمین 90°cm بالای سطح زمین است، در این پرش تا ارتفاع 120°cm بالا می‌رود. (الف) زمین چه نیروی بالاسویی (فرض می‌کنیم ثابت باشد) بر شخص وارد می‌کند؟ (ب) حداکثر سرعتی که شخص به دست می‌آورد چقدر است؟

۴۷. یک بازیکن هاکی روی یخ به جرم 116kg با سرعت 324m/s به طرف زده‌ای در مرز یخ حرکت می‌کند و با دستهای کشیده شده زده را می‌گیرد و متوقف می‌شود. در حین این توقف، مرکز جرم او 340°cm به سمت زده حرکت می‌کند. (الف) متوسط نیرویی که شخص به زده وارد می‌کند چقدر است؟ (ب) این شخص چقدر انرژی داخلی مصرف می‌کند؟

۴۸. در یک آزمایش ایمنی، یک اتومبیل 2340° کیلوگرمی را با سرعت 126km/h به یک دیوار برخورد می‌دهند. در طی مدت برخورد، مرکز جرم اتومبیل به اندازه 640°cm به طرف جلو جابه‌جا می‌شود، و دیوار به اندازه 830°cm فشرده می‌شود. از اصطکاک اتومبیل و جاده چشم‌پوشید. (الف) نیروی وارد بر اتومبیل از دیوار را (که فرض می‌کنیم ثابت است) حساب کنید. (ب) انرژی داخلی اتومبیل چقدر افزایش پیدا می‌کند؟

۴۹. فرض کنید انرژی کل یک سیستم N ذره‌ای در چارچوب مرجع دلخواهی به صورت $K = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2$ اندازه‌گیری می‌شود. در چارچوب مرجع مرکز جرم، سرعتها عبارت‌اند از $v_i' = v_i - v_{\text{cm}}$ ، که در آن v_{cm} سرعت مرکز جرم نسبت به چارچوب مرجع اصلی است. با در نظر گرفتن اینکه $v_i' = v_i \cdot v_z$ است، نشان بدهید که انرژی جنبشی را می‌شود به صورت زیر نوشت

$$K = K_{\text{int}} + K_{\text{cm}}$$

که در آن $K_{\text{cm}} = \frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2$ و $K_{\text{int}} = \sum \frac{1}{2} m_i v_i'^2$ است. این رابطه نشان می‌دهد که، همان‌طور که در بخش ۹-۷ بیان شد، انرژی جنبشی سیستم ذرات را می‌شود به دو قسمت تقسیم کرد؛ یک بخش انرژی داخلی و یک بخش انرژی مرکز جرم. انرژی جنبشی داخلی در چارچوبی اندازه‌گیری می‌شود که در آن مرکز جرم ساکن است؛ مثلاً حرکت‌های کتره‌ای مولکولهای گاز در یک مخزن ساکن، عامل به وجود آورنده انرژی جنبشی انتقالی داخلی است.

بخش ۹-۸ سیستمهای با جرم متغیر

۵۰. موشکی در فضا، در جایی که عملاً گرانشی وجود ندارد، ساکن است. جرم این موشک $255 \times 10^5 \text{kg}$ است که مقدار $181 \times 10^5 \text{kg}$ آن را مواد سوختنی تشکیل می‌دهد. موتور با آهنگ 480kg/s سوخت را مصرف می‌کند و سرعت خروج گازها 327km/s است. موتور به مدت 250s کار می‌کند. (الف) نیروی پیشران موتور را محاسبه کنید (ب) جرم موشک پس از این مدت چقدر است؟ (ج) سرعت نهایی موشک چقدر است؟

۵۱. موشک ساکنی را در فضای تهی در نظر بگیرید. برای آنکه سرعت موشک پس از اتمام سوخت (الف) برابر سرعت گازهای خروجی و (ب) دو برابر سرعت گازهای خروجی شود، نسبت جرم (نسبت جرم اولیه به نهایی) آن باید چقدر باشد؟

۵۲. در میانهٔ مأموریتی به ماه، یک تغییر سرعت به اندازه 226m/s برای سفینه‌ای که با سرعت 388m/s در حرکت است لازم می‌شود. سرعت گازهای خروجی موتور موشک برابر 1230m/s است. چه کسری از جرم اولیه سفینهٔ فضایی را باید، به عنوان جرم زاید، از آن بیرون ریخت؟

۵۳. قرار است موشکی به جرم کل $11 \times 10^5 \text{kg}$ که $870 \times 10^4 \text{kg/s}$ ثابت از آن مواد سوختنی است به طور قائم پرتاب شود. سوخت با آهنگ 870kg/s مصرف می‌شود. حداقل سرعت گازهای خروجی نسبت به موشک چقدر باشد تا موشک بتواند شروع به پرواز کند؟

۵۴. یک سورتمهٔ 54 کیلوگرمی که حامل 35kg ماسه است از حال سکون روی یک سطح شیبدار یخزده به طول 93 متر که زاویه شیب آن 26° است به پایین می‌لغزد. ماسه با آهنگ 23kg/s از عقب سورتمه بیرون می‌ریزد. چه مدت طول می‌کشد تا سورتمه به پایین شیب برسد؟

۵۵. برای در حرکت نگه داشتن یک تسمهٔ نقاله، وقتی بار حمل می‌کند نیروی محرک بیشتری لازم است تا وقتی که خالی است. اگر تسمه با سرعت ثابت 15m/s در حرکت باشد و بار را با آهنگ 20kg/s از یک سر تسمه روی آن قرار دهیم و از سر دیگر برداریم، چه نیروی محرک اضافی برای ثابت نگه داشتن سرعت حرکت تسمه لازم داریم؟ فرض کنید بار به طور قائم روی تسمه انداخته می‌شود و کارگرها قبل از بلند کردن بار از روی تسمه، آن را با دست می‌گیرند و نسبت به خودشان به حال سکون در می‌آورند.

۵۶. یک بارکش رویاب به وزن 975 تن متریک، با دندهٔ خلاص در یک مسیر افقی با اصطکاک ناچیز با سرعت 136 متر بر ثانیه در حرکت است که باران تندی شروع می‌شود. قطره‌های باران در امتداد قائم نسبت به زمین فرو می‌ریزند. سرعت این بارکش وقتی به اندازه 50° تن متریک آب در آن جمع شده است چقدر است؟ برای به دست آوردن این جواب چه فرضی (اگر لازم باشد) کرده‌اید؟

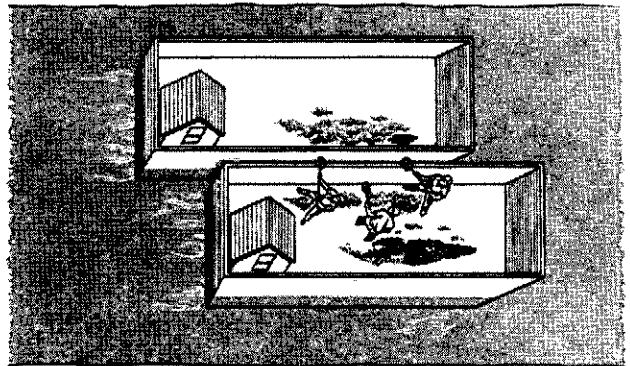
۵۷. موشکی به جرم 5860kg آماده پرواز قائم است. سرعت خروج گازها 17km/s است. برای اینکه در هر یک از موارد زیر نیروی پیشران کافی باشد، چه مقدار جرم باید در هر ثانیه از موشک خارج شود؟ (الف) برای خنثی کردن نیروی وزن، (ب) برای اینکه موشک با شتاب اولیه 183m/s^2 شروع به حرکت کند. توجه داشته باشید که، بر خلاف مثال ۱۲، در این مورد گرانش به عنوان یک نیروی خارجی روی موشک عمل می‌کند.

۵۸. دو پدک‌کش دراز در آب ساکن در یک جهت در حرکت‌اند. سرعت یکی 965km/h و سرعت دیگری 212km/h است. وقتی از کنار هم می‌گذرند زغال سنگ با آهنگ 925 کیلوگرم در دقیقه از پدک‌کش کندتر به داخل پدک‌کش تندتر ریخته می‌شود؛ (شکل ۴۰).

مصرف می‌شود. با استفاده از انرژی حاصل از احتراق سوخت، مواد حاصل از احتراق فشرده می‌شوند و از قسمت عقب موتور با سرعت 497 m/s (یعنی 1630 ft/s)، نسبت به هواپیما، به بیرون رانده می‌شوند. (الف) نیروی پیشران موتور چقدر است؟ (ب) توانی که به هواپیما داده می‌شود چقدر است؟

۶۰. ریسمان قابل انعطاف ناکشسانی به طول L را از داخل لوله صافی می‌گذرانیم و ریسمان می‌تواند به راحتی در لوله حرکت کند. لوله یک خم راستگوشه دارد که در صفحه قائم چنان قرار گرفته است که یک شاخه اش قائم و شاخه دیگرش افقی است. ابتدا، در $t = 0$ ، طول y از ریسمان در داخل لوله آویخته است. ریسمان را رها می‌کنیم تا شروع به لغزیدن در داخل لوله کند. t ثانیه پس از رها شدن، ریسمان با سرعت dy/dt حرکت می‌کند؛ $y(t)$ طول قسمت آویخته ریسمان است. (الف) نشان بدهید که بنابر فرمولبندی مسئله جرم متغیر، $v_{\text{rel}} = 0$ است و بنابراین، معادله حرکت به صورت $mdv/dt = F_{\text{ext}}$ در این مورد، عبارت است از $d^2y/dt^2 = gy$. (ج) نشان بدهید که پایستگی انرژی مکانیکی به معادله $(dy/dt)^2 - gy^2 = \text{const.}$ می‌انجامد، و این جواب با قسمت (ب) سازگار است. (د) نشان بدهید که $y = (y_0/2)(e^{\sqrt{g/L}t} + e^{-\sqrt{g/L}t})$ جوابی برای معادله حرکت است (با جانشانی در قسمت ب)، و درباره این معادله بحث کنید.

اگر قرار باشد سرعت هیچ کدام از یدک کشها تغییر نکند، چه مقدار نیروی اضافی باید توسط موتورهای آنها تأمین شود؟ فرض کنید که جابه جایی سنگ کاملاً به طور جانبی صورت می‌گیرد و نیروهای اصطکاکی بین یدک کشها و آب به وزن آنها بستگی ندارد.



شکل ۴۰. مسئله ۵۸

۵۹. هواپیمای جتی با سرعت 184 m/s (یعنی 604 ft/s) در حرکت است. موتور این هواپیما در هر ثانیه 6872 m^3 (یعنی 2410 ft^3) هوا به جرم 702 kg (یعنی 481 slug) را به داخل می‌کشد. این هوا برای سوزاندن 292 kg (یعنی 200 slug) سوخت در هر ثانیه

۱۰

برخورد

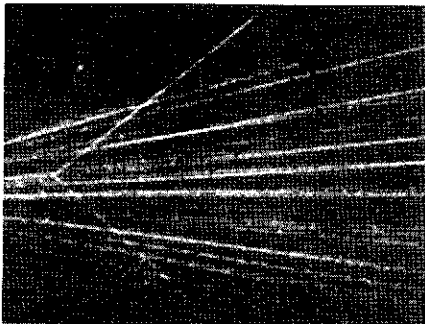
یکی از کاربردهای مهم پایستگی تکانه خطی، بررسی برخورد میان اجسام است. این اجسام به هر اندازه‌ای هم که باشند (از ذرات بنیادی گرفته تا کهکشانها) و هر نیرویی هم که دخیل باشد (از نیروی هسته‌ای، قوی‌ترین، تا نیروی گرانش، ضعیف‌ترین) قانون پایستگی تکانه خطی صادق است و امکان مطالعه این فرایندها را فراهم می‌کند. در این فصل نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرایندهای برخورد را با استفاده از قوانین پایستگی انرژی و تکانه تحلیل کرد، و مثالهایی از قلمرو فیزیک زیر اتمی می‌آوریم که نشان می‌دهد چگونه می‌توان از بررسی نتایج انواع مختلف برخوردها، اطلاعات اساسی درباره جهان فیزیکی به دست آورد.

۱-۱۰ برخورد چیست

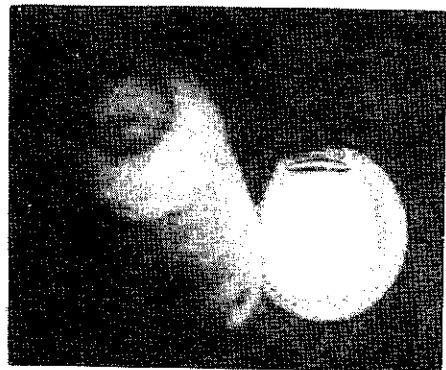
در برخورد، در زمانی نسبتاً کوتاه نیروی نسبتاً بزرگی به هر کدام از ذرات برخوردکننده اثر می‌کند. نظر اصلی درباره برخورد این است که حرکت ذره‌های برخوردکننده (با دست‌کم یکی از آنها) به‌طور تقریباً ناگهانی تغییر می‌کند و در نتیجه می‌توانیم، کم‌وبیش به وضوح، زمانهای "قبل از برخورد" و "بعد از برخورد" را از هم تفکیک کنیم.

مثلاً، وقتی چوبدست به توپ بیسبال برخورد می‌کند، آغاز و پایان برخورد را می‌توان به‌طور نسبتاً دقیق تعیین کرد. زمان تماس چوبدست و توپ در مقایسه با مدتی که ما توپ را زیر نظر داریم بسیار کوتاه است. در حین برخورد، چوبدست نیروی بزرگی به توپ وارد می‌کند (شکل ۱). این نیرو چنان پیچیده با زمان تغییر می‌کند که

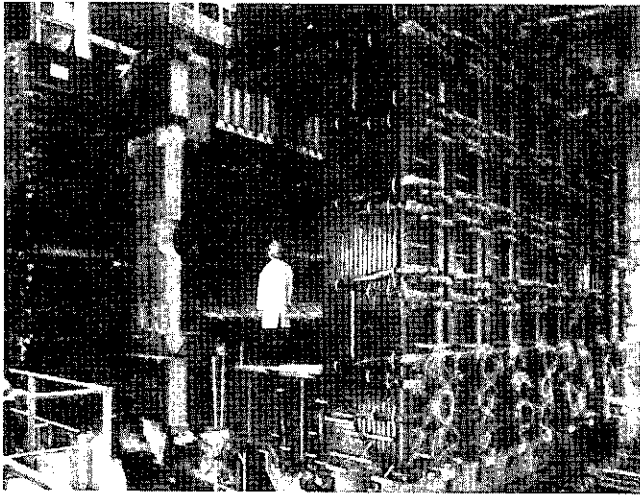
مشکل می‌توانیم اندازه‌گیری‌اش کنیم. هم توپ و هم چوبدست در حین برخورد تغییر شکل می‌دهند. به نیروهایی که مدت اثر آنها در مقایسه با مدت زمان مشاهده سیستم کوتاه باشد نیروهای ضربه‌ای می‌گوییم. وقتی یک ذره آلفا (هسته ${}^4\text{He}$) با هسته دیگری برخورد می‌کند (شکل ۲)، نیروی مؤثر میان آنها می‌تواند همان نیروی رانشی الکتروستاتیکی وابسته به بارهای این ذره‌ها باشد. ذره‌ها ممکن است عملاً در تماس با یکدیگر قرار نگیرند، اما باز هم این رویداد را برخورد می‌نامیم چون نیرویی نسبتاً قوی، در مدتی که در مقایسه با مدت مشاهده ذره آلفا کوتاه است، بر این ذره اثر می‌کند و تأثیری جدی بر حرکت آن می‌گذارد. اگر این آمادگی را داشته باشیم که مدت مشاهده را به مقیاس زمانی



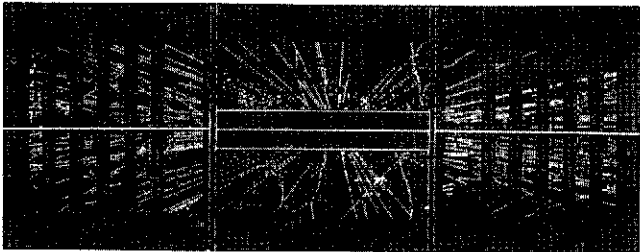
شکل ۲. یک ذره آلفا در اتاقک ابر با یک هسته هلیوم برخورد می‌کند. اغلب ذرات فرودی (که از سمت چپ می‌آیند) بدون برخورد از اتاقک



شکل ۱. عکسی که با سرعت زیاد از برخورد چوبدست با توپ بیسبال گرفته شده است. به تغییر شکل توپ توجه کنید؛ این تغییر شکل حاکی از نیروی ضربه‌ای بزرگی است که بر توپ وارد می‌شود.



(الف)



(ب)

شکل ۴. (الف) آشکارساز عظیم UA1 که در برخورددهنده پروتون-پروتون در سرن (CERN) از آن استفاده می‌شود. سرن یک مؤسسه تحقیقاتی در کار فیزیک ذرات است که در نزدیکی شهر ژنو در کشور سوئیس قرار دارد. (ب) یک بازسازی کامپیوتری از مسیرهای ذرات تولیدشده در یک برخورد پروتون-پروتون. چنین بازسازی‌هایی در سال ۱۹۸۳ برای اثبات وجود ذراتی که W و Z نامیده می‌شوند به‌کار گرفته شد. وجود این ذرات مؤید نظریه‌ای است که نیروی الکترومغناطیسی و نیروی هسته‌ای ضعیف را دو نمود متفاوت از یک نیروی واحد بنیادی‌تر می‌داند.

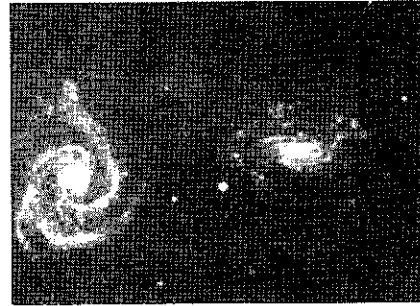
در لحظه t_f پایان می‌یابد. نیروهای مؤثر قبل و بعد از برخورد برابر با صفرند. از قانون دوم نیوتون به صورت $F = dp/dt$ ، می‌توانیم تغییر تکانه dp یک ذره را که به مدت dt تحت تأثیر نیروی F قرار گرفته است به شکل زیر بنویسیم

$$dp = F dt$$

تغییر تکانه یک جسم در خلال یک برخورد را می‌توانیم با انتگرال‌گیری روی مدت برخورد، یعنی، بین شرایط اولیه (تکانه p_i در زمان t_i) و شرایط نهایی (تکانه p_f در زمان t_f)، تعیین کنیم

$$\int_{p_i}^{p_f} dp = \int_{t_i}^{t_f} F dt \quad (1)$$

سمت چپ معادله ۱ همان تغییر تکانه، $p_f - p_i$ ، است. سمت راست معادله ۱، که هم به شدت نیرو و هم به مدت زمان اثر آن بستگی



شکل ۳. برخورد دو کهکشان.

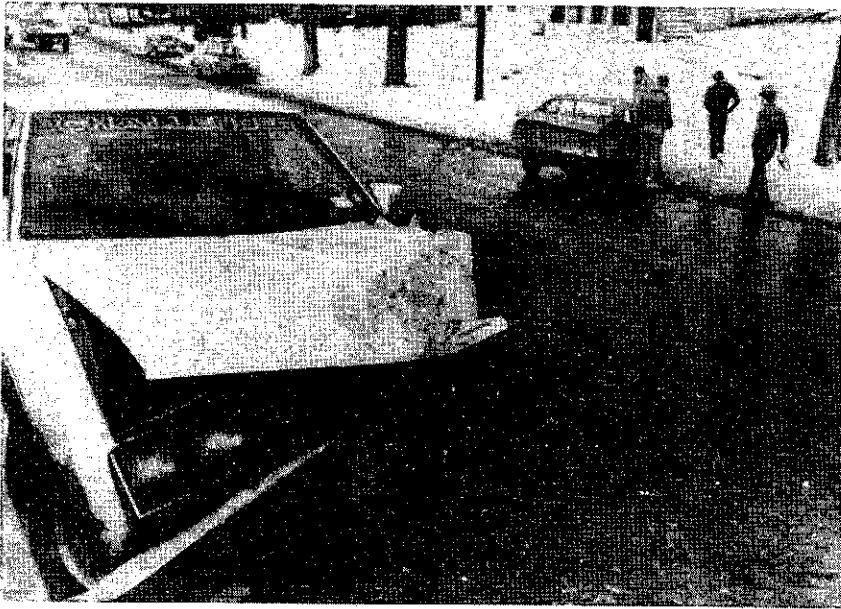
میلیونها یا میلیاردها، سال افزایش بدهیم، می‌توانیم حتی راجع به برخورد بین کهکشانها صحبت کنیم (شکل ۳). (البته یک راه عملی‌تر برای کوتاه کردن زمانهایی به این عظمت، استفاده از مدل‌سازی کامپیوتری است!) برخوردهای میان ذرات بنیادی، منبع اصلی اطلاعات درباره ساختار داخلی آنهاست. وقتی دو ذره با انرژی زیاد با هم برخورد می‌کنند، محصولات برخورد اغلب با ذره‌های اصلی کاملاً فرق دارند (شکل ۴). گاهی در این برخوردها صدها ذره محصول تولید می‌شود، که جرم کل آنها ممکن است خیلی بیشتر از جرم ذره‌های برخوردکننده باشد (در این مورد انرژی جنبشی ذره‌های برخوردکننده در فرایند برخورد به انرژی سکون تبدیل می‌شود). با مطالعه مسیر ذره‌های خروجی و به کار بردن قوانین بنیادی پایستگی، می‌توانیم رویداد اصلی را بازسازی کنیم.

در زمینه‌های دیگر، در بررسی تصادفات رانندگی هم سعی می‌کنند برخوردها را بازسازی کنند. از مسیرها و نقشهای برخورد اتومبیل‌های درگیر در برخورد (شکل ۵)، اغلب می‌توان جزئیات مهمی مانند سرعت و جهت حرکت دو اتومبیل در لحظات قبل از برخورد را استنتاج کرد. نوع دیگری از برخورد عبارت است از برخورد میان یک کاوه فضایی و یک سیاره، که به آن "اثر تیرکمان" گفته می‌شود. در این برخورد می‌توان سرعت و جهت کاوه فضایی را در "مواجهه نزدیک" با یک سیاره (متحرک) تغییر داد. کاوه فضایی واقعاً با سیاره تماس پیدا نمی‌کند، ولی در یک بازه زمانی کوتاه در مقایسه با کل مدت سفر، این کاوه به شدت تحت تأثیر گرانش سیاره قرار می‌گیرد. پس موجه است که چنین مواجهه‌ای را هم "برخورد" بنامیم (مسئله ۴).

۱-۲ ضربه و تکانه

منظور ما از مطالعه برخورد در این فصل آن است که ببینیم با استفاده از اصول پایستگی تکانه و انرژی و با دانستن حرکت اولیه ذرات برخوردکننده و با این فرض که چیزی از نیروهای مؤثر در حین برخورد نمی‌دانیم، چه اطلاعاتی درباره حرکت نهایی ذرات درگیر در برخورد می‌توانیم به دست بیاوریم.

فرض کنید شکل ۶ نمودار مقدار نیروی خالص وارد بر یک جسم در حین یک برخورد باشد. این برخورد در لحظه t_i شروع می‌شود و -



شکل ۵. برخورد بین دو اتومبیل. قسمت اعظم انرژی جنبشی اولیه به انرژی تغییر شکل دو اتومبیل تبدیل شده است. متخصصان بازسازی تصادفها از پایداری تکانه برای محاسبه سرعتهای قبل از برخورد استفاده می‌کنند.

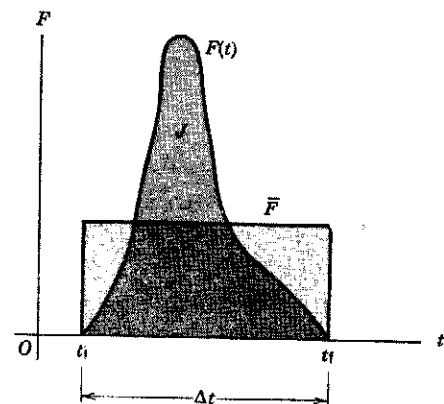
ضربه و تکانه هر دو بردارند و یکاها و ابعاد یکسان دارند. گرچه در این فصل از معادله ۳ فقط در مواردی استفاده می‌کنیم که نیروهای ضربه‌ای (یعنی نیروهایی که زمان تأثیر آنها در مقایسه با زمان مشاهده کوتاه است) در کارند، ولی چنین محدودیتی برای این معادله ذاتی نیست. معادله ۳ همان کلیت قانون دوم نیوتون را دارد، کما اینکه خودش هم از همین قانون به دست آمده است. مثلاً از معادله ۳ می‌توانیم برای پیدا کردن تکانه‌ای که جسمی بر اثر سقوط در میدان گرانشی زمین کسب می‌کند استفاده کنیم.

قضیه ضربه-تکانه خیلی شبیه قضیه کارانرژی است که در فصل ۷ به دست آوردیم. هر دو قضیه در مورد تک‌ذره به کار می‌روند و هر دو مستقیماً از قانون دوم نیوتون ناشی شده‌اند. کار شامل انتگرال نیروی خالص روی مکان است، در حالی که ضربه شامل انتگرال نیروی خالص روی زمان است. قضیه کارانرژی یک معادله اسکالر است که با تغییرات انرژی جنبشی ذره سروکار دارد، در حالی که قضیه ضربه-تکانه یک معادله برداری است که به تغییرات تکانه ذره مربوط می‌شود.

فرض کرده‌ایم نیروی ضربه‌ای که مقدار آن در شکل ۶ نشان داده شده است جهت ثابتی دارد. مقدار ضربه این نیرو با سطح زیرمنحنی $F(t)$ نشان داده می‌شود. این ساختار را می‌توانیم با مستطیل شکل ۶ به عرض Δt و ارتفاع \bar{F} نشان بدهیم، که \bar{F} مقدار نیروی متوسطی است که در طی بازه زمانی Δt اثر می‌کند. به این ترتیب

$$J = \bar{F} \Delta t \quad (4)$$

در برخوردهایی نظیر برخورد توپ و چوبدست (شکل ۱)، اندازه‌گیری مستقیم $F(t)$ دشوار است، ولی می‌توانیم Δt را تخمین بزنیم (شاید معقولی از \bar{F} به دست بیاوریم. این محاسبه



شکل ۶. نیروی ضربه‌ای $F(t)$ در حین برخوردی که از t_i تا t_f طول می‌کشد به شکل دلخواهی تغییر می‌کند. سطح زیرمنحنی $F(t)$ برابر ضربه J است و مستطیلی که به نیروی میانگین \bar{F} محدود شده است همان مساحت را دارد.

دارد، ضربه نیرو، J ، می‌نامند

$$J = \int_{t_i}^{t_f} F dt \quad (2)$$

و از معادله ۱ نتیجه می‌شود

$$J = p_f - p_i \quad (3)$$

معادله ۳ بیان ریاضی قضیه ضربه-تکانه است:

ضربه نیروی خالص وارد بر یک ذره در یک بازه زمانی معین برابر است با تغییر تکانه آن ذره در آن بازه زم

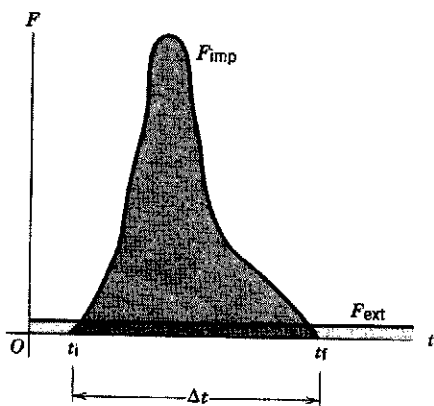
به‌کار گرفته شده است. نیروهای ضربه‌ای مؤثر در طی برخورد، نیروهای داخلی‌اند و اثری بر تکانه کل سیستم ندارند.

برخورد را به‌صورت برهم‌کنشی تعریف کردیم که در مدت زمان Δt ، که در مقایسه با زمانی که سیستم را مشاهده می‌کنیم قابل چشمپوشی است، انجام می‌شود. می‌توانیم آن را به‌صورت رویدادی هم که در آن نیروهای خارجی مؤثر بر سیستم در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد قابل چشمپوشی‌اند (مثال ۱) در نظر بگیریم. وقتی "چوبدست" به توپ بیسبال یا به توپ گلف برخورد می‌کند، یا دو گوی بلیارد به یکدیگر اصابت می‌کنند، نیروهای خارجی هم روی این سیستمها اثر می‌کند. مثلاً گرانش یا اصطکاک می‌توانند به سیستم نیرو وارد کنند؛ این نیروها ممکن است بر روی اجسام برخوردکننده یکسان نباشند و الزاماً توسط نیروهای خارجی دیگری خنثی نشوند. با این همه، صرفنظر کردن از نیروهای خارجی در حین برخورد کاملاً موجه است و می‌توان فرض کرد تکانه پایسته است مشروط بر اینکه این نیروهای خارجی در مقایسه با نیروهای ضربه‌ای برخورد خیلی کوچک باشند، که معمولاً هم هستند. در نتیجه، تغییر ناشی از نیروی خارجی در تکانه ذره در حین برخورد در مقایسه با تغییر ناشی از نیروی ضربه‌ای قابل چشمپوشی است (شکل ۸).

مثلاً در برخورد چوبدست به توپ بیسبال، که فقط چند میلی ثانیه طول می‌کشد، چون تغییر تکانه توپ بزرگ است و زمان برخورد کوچک، از رابطه

$$\Delta p = \bar{F} \Delta t$$

نتیجه می‌شود که نیروی ضربه‌ای متوسط، \bar{F} ، نسبتاً بزرگ است. نیروی خارجی گرانش در مقایسه با این نیرو، قابل اغماض است. برای تعیین تغییر حرکت توپ می‌توانیم از این نیروی خارجی بی‌هیچ نگرانی چشمپوشی کنیم؛ هر چه زمان برخورد کوتاهتر باشد این کار موجه‌تر است.



شکل ۸. نیروی ضربه‌ای F_{imp} در حین برخورد معمولاً خیلی شدیدتر از هر نیروی خارجی دیگری (F_{ext}) که در اینجا آن را ثابت گرفته‌ایم است که ممکن است بر سیستم اثر کند.

مبتنی بر ضربه‌ای است که بنا بر معادله ۳ از تغییر تکانه توپ محاسبه می‌شود (مثال ۱).

۳-۱۰ پایستگی تکانه در حین برخورد

اکنون برخورد بین دو ذره به جرمهای m_1 و m_2 را در نظر بگیرید (شکل ۷). در طی مدت کوتاه برخورد، این دو ذره نیروهای بزرگی بر یکدیگر وارد می‌کنند. در هر لحظه F_{12} نیرویی است که از ذره ۲ بر ذره ۱ وارد می‌شود و F_{21} نیرویی است که ذره ۱ بر ذره ۲ وارد می‌کند. بنا بر قانون سوم نیوتون این نیروها مساوی و در خلاف جهت یکدیگرند.

تغییر ناشی از برخورد در تکانه ذره ۱ برابر است با

$$\Delta p_1 = \int_{t_i}^{t_f} F_{12} dt = \bar{F}_{12} \Delta t \quad (5)$$

که در آن \bar{F}_{12} عبارت است از مقدار متوسط نیروی F_{12} در مدت برخورد، یعنی در $\Delta t = t_f - t_i$.

تغییر ناشی از برخورد در تکانه ذره ۲ برابر است با

$$\Delta p_2 = \int_{t_i}^{t_f} F_{21} dt = \bar{F}_{21} \Delta t \quad (6)$$

که در آن \bar{F}_{21} عبارت است از مقدار متوسط نیروی F_{21} در بازه زمانی $\Delta t = t_f - t_i$.

اگر هیچ نیروی دیگری بر این ذرات وارد نشود Δp_2 و Δp_1 تغییر تکانه کل هر یک از ذرات را به‌دست می‌دهد. دیدیم که در هر لحظه $F_{12} = -F_{21}$ و در نتیجه $\bar{F}_{12} = -\bar{F}_{21}$ است، پس

$$\Delta p_1 = -\Delta p_2 \quad (7)$$

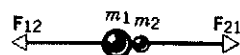
اگر دو ذره را به عنوان یک سیستم منزوی در نظر بگیریم، در آن صورت تکانه کل سیستم عبارت است از

$$P = p_1 + p_2 \quad (8)$$

و کل تغییر ناشی از برخورد در تکانه سیستم صفر است، یعنی

$$\Delta P = \Delta p_1 + \Delta p_2 = 0 \quad (9)$$

پس، اگر هیچ نیروی خارجی در کار نباشد، تکانه کل یک سیستم دو-ذره‌ای در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. این عبارت بیانی است از قانون پایستگی تکانه خطی (بخش ۹-۶) که در مورد یک سیستم دودره‌ای



شکل ۷. دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 در برخورد با یکدیگر نیروهای مساوی و مخالف مبادله می‌کنند.

اکنون می‌توانیم ضربه را به دست بیاوریم

$$J_x = p_{fx} - p_{ix} = 57 \text{ kgm/s} - (-59 \text{ kgm/s}) \\ = 116 \text{ kgm/s}$$

$$J_y = p_{fy} - p_{iy} = 40 \text{ kgm/s} - 0 = 40 \text{ kgm/s}$$

به شکل دیگر، مقدار ضربه برابر است با

$$J = \sqrt{J_x^2 + J_y^2} = \sqrt{(116 \text{ kgm/s})^2 + (40 \text{ kgm/s})^2} \\ = 123 \text{ kgm/s}$$

و راستای آن متناظر است با

$$\theta = \tan^{-1}(J_y/J_x) \\ = \tan^{-1}[(40 \text{ kgm/s})/(116 \text{ kgm/s})] = 19^\circ$$

این زاویه بالای افق است. شکل ۹ بردار ضربه را نمایش می‌دهد و، طبق تعریف معادله ۳، به صورت نموداری ثابت کنید که

$$\mathbf{J} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i = \mathbf{p}_f + (-\mathbf{p}_i)$$

(ب) می‌دانیم که $\mathbf{J} = \bar{\mathbf{F}}\Delta t$ و از آنجا $\bar{\mathbf{F}} = \mathbf{J}/\Delta t$ است. پس مقدار $\bar{\mathbf{F}}$ برابر است با

$$\bar{\mathbf{F}} = (123 \text{ kgm/s})/0.015 \text{ s} = 8200 \text{ N}$$

که تقریباً برابر با یک تن است. این نیرو در همان جهت \mathbf{J} ، یعنی، 19° بالای افق وارد می‌شود. توجه کنید که این نیرو متوسط است؛ همان‌طور که شکل ۶ نشان می‌دهد نیروی ماکزیموم به مقدار قابل ملاحظه‌ای از این نیرو بیشتر است. همچنین، توجه داشته باشید که $\bar{\mathbf{F}} (= 8200 \text{ N}) \gg mg (= 194 \text{ N})$ است. به این ترتیب با خیال آسوده می‌توانیم فرض کنیم که نیروی ضربه‌ای خیلی بزرگتر از نیروی خارجی (در این مورد گرانش) است و بنابراین با تقریب خوبی برابر است با همان نیروی خالصی که در حین برخورد وارد می‌شود. (ج) تغییر تکانه چویدست بنابر معادله ۷ برابر است با تغییر تکانه توپ ولی در جهت خلاف آن. به این ترتیب برای چویدست داریم

$$\Delta p_x = -116 \text{ kgm/s}$$

$$\Delta p_y = -40 \text{ kgm/s}$$

آیا این تغییر تکانه، تغییر کوچکی است یا تغییر بزرگی است؟ برای پاسخگویی به این پرسش سعی کنید تکانه چویدست در حال حرکت را تخمین بزنید.

بنابراین، در عمل می‌توانیم قانون پایستگی تکانه را در برخوردها به کار ببریم به این شرط که زمان برخورد به اندازه کافی کوتاه باشد. در این صورت می‌توانیم بگوییم که تکانه سیستم درست در لحظات قبل و بعد از برخورد ذرات، یکی است.

مثال ۱. توپ بیسبالی (که وزن آن حدوداً ۵ اونس است) با سرعت افقی 93 mi/h (حدود 15° کیلومتر بر ساعت) در حرکت است که با چویدستی به آن ضربه وارد می‌شود. این توپ چویدست را در امتداد زاویه $\phi = 35^\circ$ بالاتر از مسیر فرودش با سرعت 180 km/h ترک می‌کند. (الف) ضربه نیروی وارد بر توپ را تعیین کنید. (ب) فرض کنید برخورد 1.5 میلی‌ثانیه (0.0015 s) طول بکشد نیروی متوسط چقدر است؟ (ج) تغییر تکانه چویدست را پیدا کنید.

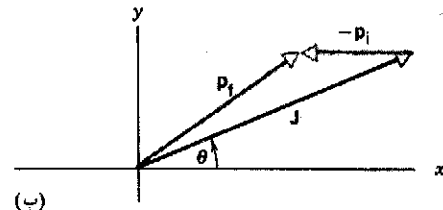
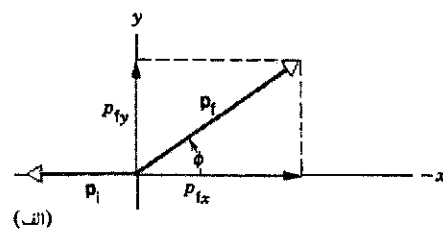
حل: (الف) شکل ۹ تکانه اولیه \mathbf{p}_i و تکانه نهایی \mathbf{p}_f مربوط به توپ بیسبال را نشان می‌دهد. جرم متناظر با 50 z برابر 0.14 kg است و سرعت نهایی توپ (برحسب یکای مناسبتر) 50 m/s است. مؤلفه‌های تکانه نهایی عبارت‌اند از

$$p_{fx} = mv_f \cos \phi = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\cos 35^\circ) \\ = 57 \text{ kgm/s}$$

$$p_{fy} = mv_f \sin \phi = (0.14 \text{ kg})(50 \text{ m/s})(\sin 35^\circ) \\ = 40 \text{ kgm/s}$$

در این دستگاه مختصات، تکانه اولیه فقط دارای مؤلفه x است، که مقدار آن (منفی) برابر است با

$$p_{ix} = mv_i = (0.14 \text{ kg})(-42 \text{ m/s}) = -59 \text{ kgm/s}$$



شکل ۹. مثال ۱. (الف) تکانه‌های اولیه و نهایی بیسبال. (ب) اختلاف $\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$ برابر است با ضربه \mathbf{J} .

۴-۱۰ برخورد در یک بعد

در این بخش اثر برخورد میان دو جسم را بررسی می‌کنیم. معمولاً، سرعت‌های اولیه دو جسم قبل از برخورد را می‌دانیم و منظورمان این است که با استفاده از قوانین پایستگی یا قوانین حرکت، سرعت‌های بعد از برخورد را تعیین کنیم.

اگر نیروهایی را که در حین برخورد اثر می‌کنند بشناسیم و اگر بتوانیم معادلات حرکت را حل کنیم، همیشه می‌توانیم حرکت پس از برخورد اجسام را از حرکت، قبل از برخوردشان محاسبه کنیم. اما در بیشتر برخوردها این نیروها را نمی‌شناسیم. قانون پایستگی تکانه باید در هر برخوردی که در آن فقط نیروهای داخلی شرکت دارند برقرار باشد، و حتی اگر این نیروها را نشناسیم هم می‌توانیم آن‌را به‌کار ببریم. اگرچه ممکن است جزئیات برهم‌کنش را ندانیم، ولی با استفاده از پایستگی تکانه و پایستگی انرژی در بسیاری موارد می‌توانیم نتایج برخورد را پیش‌بینی کنیم.

تکانه خطی همواره در برخوردها پایسته است. انرژی کل هم پایسته است: انرژی کل اولیه ذرات برخوردکننده برابر است با انرژی کل نهایی محصولات برخورد. این انرژی ممکن است علاوه بر انرژی جنبشی شامل شکلهای دیگر انرژی از جمله انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل، انرژی چرخشی، و انرژی تابشی باشد.

در رده خاصی از برخوردها، که برخورد کشسان نامیده می‌شوند، از همه اشکال دیگر انرژی چشمپوشی می‌کنیم و فقط انرژی مکانیکی، $U + K$ ، را در نظر می‌گیریم. بعلاوه، فرض می‌کنیم در برخوردهای ضربه‌ای نیروهای داخلی به مدت کوتاهی عمل می‌کنند و بنابراین در مسافت کوتاهی مؤثرند؛ ما ذرات را فقط در فواصل نسبی بسیار بزرگتری مشاهده می‌کنیم و در نتیجه می‌توانیم از آثار مربوط به انرژی پتانسیل داخلی آنها را ندیده بگیریم. در برخورد کشسان، انرژی جنبشی انتقالی تنها شکلی از انرژی است که باید در محاسبات منظور شود، و بنابراین پایستگی انرژی مکانیکی در این مورد هم‌ارز پایستگی انرژی جنبشی است: در برخوردهای کشسان انرژی جنبشی اولیه K_i برابر است با انرژی جنبشی نهایی K_f .

در رده دیگری از برخوردها، که برخورد ناکشسان نامیده می‌شوند، اشکال دیگر انرژی هم پدید می‌آیند، و انرژیهای جنبشی اولیه و نهایی با هم برابر نیستند. در بعضی موارد $K_i > K_f$ است، مثلاً وقتی که انرژی جنبشی اولیه به انرژی داخلی محصولات برخورد تبدیل می‌شود؛ در موارد دیگر $K_i < K_f$ است، مانند وقتی که انرژی داخلی ذخیره شده در ذرات برخوردکننده آزاد می‌شود. در برخوردهای ناکشسان انرژی مکانیکی $U + K$ پایسته نیست، ولی انرژی کل پایسته است. (بخش ۸-۶). وقتی اجسام برخوردکننده ساده‌اند، مانند اتمها یا مولکولها، اغلب می‌توانیم اختلاف بین K_i و K_f را برحسب حالت‌های گسسته انرژی داخلی سیستم توجیه کنیم. در سیستمهای پیچیده‌تر، مانند اتمبیل‌های برخوردکننده، اختلاف انرژی را به صورت انرژی جنبشی "از دست رفته" یا "به دست آمده" در نظر می‌گیریم. همه برخوردهای میان اجسام واقعی، تا حدودی، ناکشسان‌اند.

در مورد اجسام خیلی صلب، مانند توپهای بیلیارد، اغلب می‌توانیم به‌طور تقریبی برخورد را کشسان در نظر بگیریم. در این مورد انرژی‌ای که از جنبشی به سایر اشکال تبدیل می‌شود (مثلاً به امواج صوتی که در برخورد گویها شنیده می‌شود) در مقایسه با انرژی جنبشی قابل اغماض است. توجه داشته باشید که طبقه‌بندی برخوردها به کشسان و ناکشسان مستقل از چارچوب مرجعی است که برخورد از آن مشاهده می‌شود.

اگر دو جسم برخوردکننده پس از برخورد به هم بچسبند، می‌گوییم برخورد کاملاً ناکشسان است. مثلاً برخورد بین یک گلوله و قطعه چوبی که گلوله به آن شلیک شده است کاملاً ناکشسان است مشروط بر اینکه گلوله در داخل قطعه چوب باقی بماند. عبارت "کاملاً ناکشسان" الزاماً به این معنی نیست که تمام انرژی جنبشی اولیه از دست می‌رود، بلکه، همان‌طور که خواهیم دید، به این معنی است که انرژی جنبشی تا بیشترین مقداری که پایستگی تکانه مجاز می‌دارد از دست می‌رود.

با آنکه نیروهای برخورد ناشناخته‌اند، از حرکت ذرات قبل از برخورد می‌توانیم حرکت بعد از برخورد آنها را تعیین کنیم، مشروط بر اینکه برخورد کاملاً ناکشسان باشد، یا، اگر برخورد کشسان است، مشروط بر اینکه برخورد فقط در یک بعد صورت بگیرد. در برخورد یک‌بعدی، حرکت نسبی بعد از برخورد در امتداد همان خطی است که حرکت نسبی قبل از برخورد. فعلاً بحث را به حرکت یک‌بعدی محدود می‌کنیم.

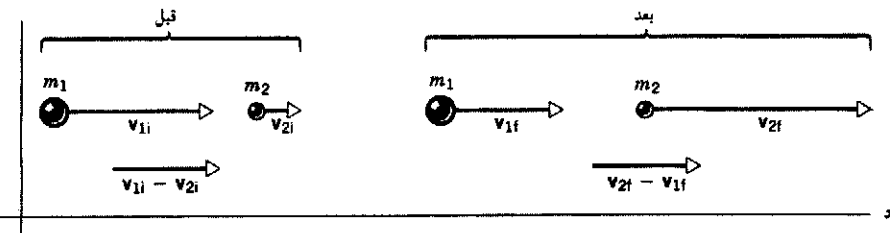
برخوردهای کشسان

ابتدا به برخورد کشسان یک‌بعدی می‌پردازیم. دو جسم را در نظر بگیرید که روی خط واصل بین مرکزهایشان در حرکت‌اند (مثلاً دو لغزنده روی یک ریل هوا)، و پس از برخورد رودرو در امتداد همان خط مستقیم به حرکت درمی‌آیند (شکل ۱۰). نیروهایی که این اجسام در حین برخورد به یکدیگر وارد می‌کنند در راستای خط اولیه حرکت است و بنابراین، حرکت نهایی هم در امتداد همین خط خواهد بود.

جرم ذرات برخوردکننده m_1 و m_2 است و سرعت آنها عبارت است از v_{1i} و v_{2i} قبل از برخورد و v_{1f} و v_{2f} بعد از برخورد. [در نمادگذاری این بخش، شاخصهای ۱ و ۲ ذرات را مشخص می‌کنند، و شاخصهای i و f به ترتیب مقادیر اولیه (قبل از برخورد) و نهایی (بعد از برخورد) را نشان می‌دهند.] جهت مثبت تکانه و سرعت را به طرف راست شکل ۱۰ می‌گیریم. فرض می‌کنیم سرعت ذرات برخوردکننده (در مقایسه با سرعت نور) آنقدر کم است که نیازی به استفاده از عبارتهای نسبیتی برای تکانه و انرژی جنبشی نداریم (مگر آنکه صریحاً غیر از این گفته باشیم). از پایستگی تکانه داریم

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (10)$$

حون برخورد را کشسان در نظر گرفته‌ایم، انرژی جنبشی بنا به تعریف



شکل ۱۰. دو ذره قبل و بعد از یک برخورد کشسان. توجه کنید که سرعت‌های نسبی قبل و بعد از برخورد با هم برابرند.

پایسته است و از $K_i = K_f$ نتیجه می‌شود

$$\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2i}^2 = \frac{1}{2}m_1v_{1f}^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2f}^2 \quad (11)$$

اگر جرمها و سرعت‌های اولیه را بدانیم، می‌توانیم از دو معادله بالا سرعت‌های نهایی v_{1f} و v_{2f} را محاسبه کنیم. می‌توانیم معادله مربوط به تکانه را به صورت

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i}) \quad (12)$$

و معادله مربوط به انرژی را به صورت

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2) \quad (13)$$

بنویسیم. از تقسیم معادله ۱۳ بر معادله ۱۲ و با این فرض که $v_{2f} \neq v_{2i}$ و $v_{1f} \neq v_{1i}$ است (پریش ۱۵)، به دست می‌آوریم

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} + v_{2i}$$

که می‌شود آن را به این صورت مرتب کرد

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f}) \quad (14)$$

این معادله حاکی از آن است که در برخورد کشسان یک بعدی، سرعت نسبی (نزدیک شدن) دو جسم قبل از برخورد برابر و در جهت مخالف سرعت نسبی (دور شدن) آنها بعد از برخورد است، فرقی هم نمی‌کند که ذرات برخوردکننده چه جرمی داشته باشند.

برای اینکه سرعت‌های بعد از برخورد، یعنی v_{1f} و v_{2f} را از سرعت‌های قبل از برخورد، یعنی v_{1i} و v_{2i} تعیین کنیم معادله‌های ۱۴ و ۱۲ را ترکیب می‌کنیم تا v_{2f} را حذف و v_{1f} را به دست بیاوریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad (15)$$

به همین ترتیب، می‌توانیم v_{2f} را حذف و v_{1f} را تعیین کنیم

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} + \left(\frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{2i} \quad (16)$$

روابط ۱۵ و ۱۶، که در تمام چارچوب‌های لخت برقرارند، نتایج کلی هستند که امکان محاسبه سرعت‌های نهایی را در

کشسان فراهم می‌آورند. اغلب با انتخاب چارچوب مرجعی که در آن ذره هدف (مثلاً m_2) در آغاز ساکن است معادله‌های بالا را ساده می‌کنیم. به این ترتیب می‌توانیم v_{2i} را در معادلات ۱۵ و ۱۶ برابر با صفر بگیریم. در اینجا چند مورد خاص را که بیشتر مورد توجه‌اند بررسی می‌کنیم.

۱. جرم‌های مساوی. وقتی ذرات برخوردکننده دارای جرم‌های برابر باشند ($m_1 = m_2$)، روابط ۱۵ و ۱۶ به صورت ساده زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} = v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = v_{1i} \quad (17)$$

یعنی، ذرات سرعت‌هایشان را مبادله می‌کنند: سرعت نهایی یک ذره برابر است با سرعت اولیه ذره دیگر.

۲. ذره هدف ساکن. حالت جالب توجه دیگر آن حالتی است که در آن ذره m_2 در ابتدا ساکن است. پس $v_{2i} = 0$ است و داریم

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2}\right)v_{1i} \quad (18)$$

از ترکیب این مورد خاص با مورد قبلی معلوم می‌شود که در برخورد بین دو ذره با جرم‌های مساوی که یکی از آنها در آغاز ساکن باشد، ذره اول "یکباره متوقف" می‌شود و ذره دوم با سرعت اولیه ذره اول "یکباره به راه می‌افتد". این اثر را اغلب در برخورد گویهای بیلیارد، اگر چرخان نباشند، می‌توانیم مشاهده کنیم.

۳. ذره هدف پرچرم. اگر $m_2 \gg m_1$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به صورت‌های ساده زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx -v_{1i} + 2v_{2i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx v_{2i} \quad (19)$$

وقتی ذره پرچرم به آرامی حرکت می‌کند یا ساکن است، داریم

$$v_{1f} \approx -v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} = 0 \quad (20)$$

این وقتی است که یک پرتابه سبک با یک جسم ساکن خیلی پرچرم برخورد می‌کند، در این مورد سرعت جسم سبک "تقریباً معکوس" می‌شود و جسم پرچرم تقریباً ساکن می‌ماند. مثلاً، تویی که از ارتفاع h سقوط می‌کند پس از برخورد با زمین سرعتش معکوس می‌شود و از زمین باز می‌جهد و اگر برخورد کاملاً کشسان باشد و مقاومت هوا هم در کار نباشد، به همان ارتفاع h برمی‌گردد. حرکت الکترون کاتد (نسبتاً پرچرم) وارونه می‌شود (از اتم

سرعت v_{1i} حرکت می‌کند و پارهٔ دیگر به جرم $m_2 (= M - m_1)$ با سرعت v_{2i} در خلاف جهت به حرکت درمی‌آید. این نتیجه، حتی اگر انفجار مقدار معتدایی انرژی جنبشی به پاره‌ها بدهد، به همین صورت معتبر است. در حالت خاصی که $v_f = 0$ (جسم اولیه در حال سکون) باشد، داریم $v_{1i}/v_{2i} = -m_2/m_1$. یعنی، همان‌طور که انتظار می‌رود و لازمهٔ صفر شدن تکانهٔ کل است، ذرهٔ سنگینتر سرعت کمتری دارد و دو ذره در جهت‌های مخالف هم حرکت می‌کنند. در بخش ۱۰-۷ کاربرد این اصل را در مورد فرایندهای واپاشی خودبه‌خود بررسی خواهیم کرد.

مثال ۲. (الف) انرژی جنبشی یک نوترون (جرم m_1) در برخورد رود روی کشتان با یک هستهٔ اتم (به جرم m_2) که در ابتدا ساکن است، با چه کسری کاهش می‌یابد؟ (ب) این کاهش نسبی انرژی نوترون را برای برخوردهای کشتان با هستهٔ سرب، هستهٔ کربن، و هستهٔ هیدروژن پیدا کنید. نسبت جرم هسته به جرم نوترون (m_2/m_1) برای سرب ۲۰۶، برای کربن ۱۲ و برای هیدروژن برابر با ۱ است.

حل: (الف) انرژی جنبشی اولیهٔ نوترون، K_i (که نانسیتی فرض می‌شود) برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1i}^2$. انرژی جنبشی نهایی نوترون برابر است با $\frac{1}{2}m_1v_{1f}^2$. کاهش نسبی در انرژی جنبشی عبارت است از

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{v_{1i}^2 - v_{1f}^2}{v_{1i}^2} = 1 - \frac{v_{1f}^2}{v_{1i}^2}$$

اما برای چنین برخوردی می‌دانیم (معادلهٔ ۱۸) که

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i}$$

پس نتیجه می‌شود

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = 1 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 = \frac{4m_1m_2}{(m_1 + m_2)^2}$$

(ب) در مورد سرب داریم $m_2 = 206m_1$ و

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(206m_1)}{(207m_1)^2} = 0.02 = 2\%$$

در مورد کربن $m_2 = 12m_1$ است، پس

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(12m_1)}{(13m_1)^2} = 0.28 = 28\%$$

و برای اتم هیدروژن داریم $m_2 = m_1$ ، یعنی

$$\frac{K_i - K_f}{K_i} = \frac{4m_1(m_1)}{(2m_1)^2} = 1 = 100\%$$

این نتایج نشان می‌دهند که چرا موادی مانند پارافین، که هیدروژن زیادی دارد، در کند کردن نوترونها بسیار مؤثرتر از مواد سنگینی نظیر

باز می‌جهد) در حالی که اتم هدف اساساً از برخورد تأثیر نمی‌پذیرد و برجا می‌ماند.

۴. پرتابهٔ پرجرم. وقتی $m_1 \gg m_2$ باشد، روابط ۱۵ و ۱۶ به صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1f} \approx v_{1i} \quad \text{و} \quad v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i} \quad (21)$$

ذرهٔ هدف کم‌جرم اگر در آغاز ساکن باشد (یا خیلی کندتر از m_1 حرکت کند)، پس از برخورد با سرعتی معادل دو برابر سرعت m_1 به حرکت درمی‌آید. ذرهٔ m_1 پس از برخورد به هدف (که خیلی سبکتر است) تقریباً بدون تغییر سرعت به حرکتش ادامه می‌دهد.

در پراکندگی ذرهٔ آلفا (شکل ۲)، ذرهٔ آلفا فرودی (که جرم آن تقریباً ۸۰۰۰ برابر جرم الکترون است) اساساً حرکتش در برخورد با الکترونهای اتمهای هدف، تغییر نمی‌کند (شاهدش تعداد زیاد ردهای مستقیم‌الخط در شکل ۲ است). ذرهٔ آلفا فقط در برخوردهای نادر با هستهٔ سنگین اتم هدف منحرف می‌شود.

برخوردهای ناکشتان

اکنون برخوردهای ناکشتان را، که در آنها بنا به تعریف انرژی جنبشی پایسته نیست و البته تکانهٔ کل همچنان پایسته است، بررسی می‌کنیم. اگرچه پایستگی انرژی کل هم معتبر است. ولی منظور کردن صورتهای دیگر انرژی، جز انرژی جنبشی، جملات دیگری به معادلهٔ ۱۱ می‌افزاید و تا توانیم تبدیلات انرژی (مثلاً اینکه چقدر انرژی داخلی به انرژی جنبشی تبدیل شده است) را دقیقاً مشخص کنیم، دستگاه معادلات قابل حل نخواهیم داشت.

در یک مورد خاص، یعنی در برخورد کاملاً ناکشتان، نتیجهٔ نهایی را می‌توانیم از مقادیر اولیه پیدا کنیم. در این مورد، ذرات پس از برخورد به هم می‌چسبند و با سرعت نهایی v_f به حرکت درمی‌آیند. به این ترتیب تنها یک مجهول داریم که معادلهٔ تکانه (معادلهٔ ۱۰) برای پیدا کردن آن کنفایت می‌کند. اگر در این معادله به جای v_{1f} و v_{2f} سرعت مشترک v_f را قرار بدهیم نتیجه می‌شود

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (22)$$

وقتی جسم m_2 در ابتدا ساکن باشد، معادله بالا به صورت زیر درمی‌آید

$$v_f = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (23)$$

سرعت جسم m_1 به نسبت $m_1/(m_1 + m_2)$ کم می‌شود. هر چه m_1 بزرگتر باشد، مجموعه تندتر حرکت می‌کند؛ و هر چه m_1 کوچکتر باشد کندتر.

معادلهٔ ۲۲ را می‌توانیم به همین خوبی به صورت وارونه هم به کار ببریم: یعنی به این صورت که جسمی به جرم M که با سرعت v_f در حرکت است به دو پاره تقسیم می‌شود، یک پاره به جرم m_1 یا

در راستای افقی داریم

$$mv = (M + m)V$$

که در آن v سرعت گلوله قبل از برخورد و V سرعت مجموعه گلوله و قطعه چوب پس از برخورد است. انرژی مکانیکی در حین برخورد گلوله و قطعه چوب مطمئناً پایسته نیست، اما بعد از برخورد برای آونگی که تاب می خورد پایسته است. به این ترتیب انرژی جنبشی مجموعه، وقتی در پایین ترین نقطه مسیر قوسی اش واقع می شود، باید برابر با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطه این مسیر باشد، یعنی

$$\frac{1}{2}(M + m)V^2 = (M + m)gh$$

اگر V را از دو معادله بالا حذف کنیم نتیجه می گیریم که

$$\begin{aligned} v &= \left(\frac{M + m}{m}\right) \sqrt{2gh} \\ &= \left(\frac{5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg}}{0.0095 \text{ kg}}\right) \sqrt{(2)(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m})} \\ &= 63.0 \text{ m/s} \end{aligned}$$

می توانیم آونگ بالیستیک را نوعی میدل بدانیم که سرعت زیاد یک جسم سبک (گلوله) را به سرعت کم یک جسم سنگین (قطعه چوب) تبدیل می کند تا اندازه گیری آسانتر باشد.
(ب) انرژی جنبشی گلوله برابر است با

$$K_b = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}(0.0095 \text{ kg})(63.0 \text{ m/s})^2 = 190.0 \text{ J}$$

انرژی مکانیکی آونگ در حال تاب خوردن برابر است با انرژی پتانسیل آن در بالاترین نقطه مسیر، یعنی

$$\begin{aligned} E &= (M + m)gh \\ &= (5.4 \text{ kg} + 0.0095 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)(0.063 \text{ m}) \\ &= 3.3 \text{ J} \end{aligned}$$

به این ترتیب فقط $3.3/190.0$ یا 2% از انرژی جنبشی اولیه گلوله به انرژی مکانیکی آونگ تبدیل شده است. بقیه انرژی در داخل قطعه چوب به صورت انرژی داخلی ذخیره می شود، یا به صورت گرما و امواج صوتی به محیط منتقل می شود.

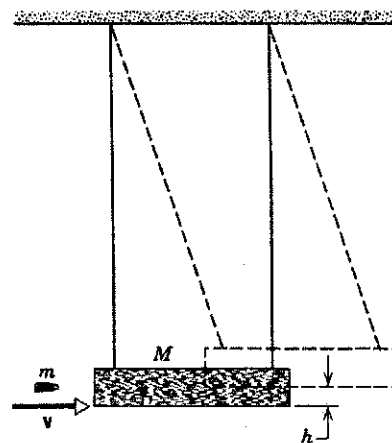
۱۰-۵ برخورد در دو بعد

اگر دو ذره به صورتی غیر از رودرو با هم برخورد کنند، ممکن است در راستاهایی غیر از راستاهای اولیه شان به حرکت در بیایند. شکل ۱۲ چنین برخوردی را نشان می دهد. دستگاه مختصات را چنان اختیار داشته باشد، و محاسبات تا حدودی ساده تر

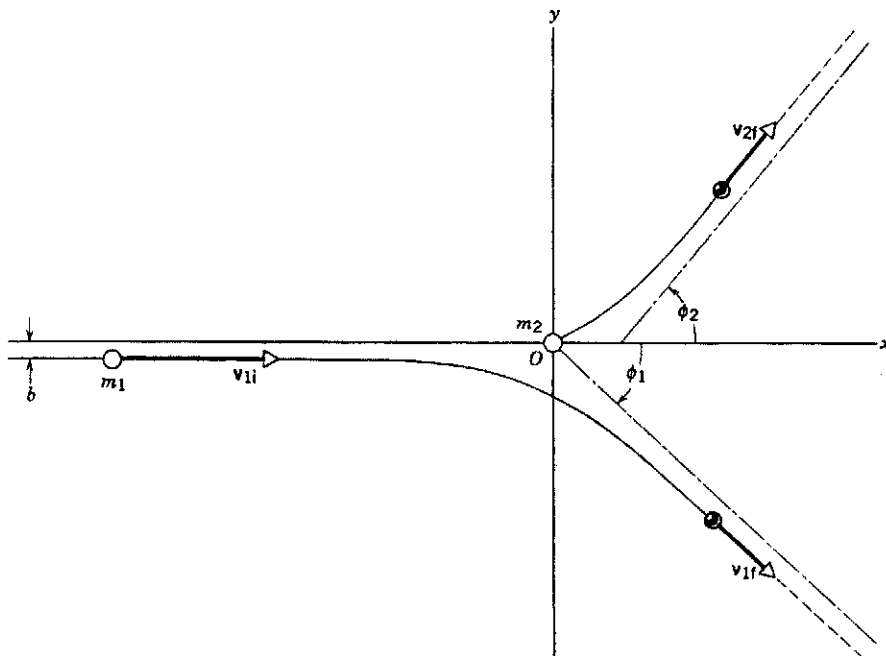
سرب هستند. توجه داشته باشید که برخوردها، آن طور که ما در این بخش فرض کردیم، همیشه هم "رودرو" نیستند. در برخوردهای "یکبری" که معمول تر است، اگرچه نوترون همه انرژی اش را به هیدروژن ساکن نمی دهد، اما به هر حال در مواد هیدروژن دار انرژی بیشتری از دست می دهد تا در موادی نظیر کربن یا سرب.

از شکافت اورانیم در راکتور هسته ای نوترونیایی با انرژی جنبشی نسبتاً زیاد، در محدوده MeV، تولید می شود و برای ایجاد واکنش زنجیره ای، باید از این نوترونها برای شکافتهای دیگر استفاده کرد، ولی با افزایش انرژی جنبشی نوترون، احتمال وقوع شکافت سریعاً کاهش پیدا می کند. بنابراین لازم است که نوترونها را کند یا آرام کنیم تا انرژی آنها به محدوده eV برسد، که در این محدوده احتمال وقوع شکافت تقریباً سه مرتبه بزرگی بیشتر است. محاسبه بالا، با آنکه مبتنی بر فرضهای ساده کننده است، نشان می دهد که مواد غنی از هیدروژن، مانند آب یا پارافین، "آرامساز"های مناسبتری هستند.

مثال ۳. آونگ بالیستیک (شکل ۱۱) ابزاری است که از آن، قبل از به میدان آمدن زمان سنجهای الکترونیکی، برای تعیین سرعت گلوله ها استفاده می شود. این وسیله تشکیل شده است از یک قطعه چوب بزرگ به جرم M ، که با دو رشته ریسمان آویزان شده است. گلوله ای به جرم m به قطعه چوب شلیک می شود و سریعاً نسبت به آن به حال سکون درمی آید. مجموعه قطعه چوب و گلوله به طرف بالا تاب می خورد، و مرکز جرم مجموعه، قبل از سکون لحظه ای، به اندازه مسافت h در راستای قائم جابه جا می شود. فرض کنید جرم قطعه چوب $M = 5.4 \text{ kg}$ و جرم گلوله $m = 9.5 \text{ g}$ باشد. (الف) اگر قطعه چوب تا ارتفاع $h = 6.3 \text{ cm}$ سانتی متر بالا برود، سرعت اولیه گلوله چقدر بوده است؟ (ب) انرژی جنبشی اولیه گلوله چقدر است؟ چه مقدار از این انرژی به صورت انرژی مکانیکی در آونگ باقی می ماند؟ حل: (الف) وقتی گلوله با آونگ برخورد می کند، از پایستگی تکانه



شکل ۱۱. مثال ۳. آونگ بالیستیک، که برای اندازه گیری سرعت گلوله از آن استفاده می شود.



شکل ۱۲. دو ذره با هم برخورد می‌کنند. مکان آنها قبل از برخورد با دایره‌های توخالی و بعد از برخورد با دایره‌های تیره نشان داده‌ایم. پارامتر برخورد، b ، در واقع فاصله "بری بودن" از برخورد رودروست.

طرف محور x اند، بنابراین جمع مؤلفه‌های y تبدیل به تقاضل جبری می‌شود:

$$p_{iy} = p_{fy} \\ 0 = m_1 v_{1f} \sin \phi_1 - m_2 v_{2f} \sin \phi_2 \quad (25)$$

اگر برخورد کشسان باشد، پایداری انرژی برقرار است. از برابر قرار دادن انرژی جنبشی اولیه با انرژی جنبشی نهایی داریم

$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (26)$$

اگر شرایط اولیه معلوم باشد (v_{1i} و m_1 ، m_2 و v_{1i})، در معادله‌های ۲۴ تا ۲۶ چهار مجهول وجود دارد (v_{1f} ، v_{2f} ، ϕ_1 ، ϕ_2) ولی فقط سه معادله داریم که آنها را به هم مربوط می‌کند. برای چنین دستگاهی از معادلات چند مجهولی نامعین هیچ جواب منحصر به فردی وجود ندارد؛ یا در واقع بینهایت جواب وجود دارد. برای رسیدن به یک جواب واحد باید یک قید یا یک محدودیت دیگر به شرایط اولیه اضافه کنیم. مثلاً می‌توانیم انتخاب کنیم که ذره ۱ را تحت زاویه مشخص ϕ_1 مشاهده کنیم (مثال ۴). چنین شرطی را که اعمال کردیم، می‌توانیم سه معادله را برای به‌دست آوردن سه مجهول باقی‌مانده حل کنیم.

مثال ۴. یک مولکول گاز که با سرعت 322 m/s در حرکت است به‌طور کشسان با مولکول دیگری با همان جرم که ساکن است برخورد می‌کند. بعد از برخورد، مولکول اول در راستایی که با امتداد سرعت اولیه‌اش زاویه 30° می‌سازد، به حرکت درمی‌آید. سرعت هر یک از مولکولها را پس از برخورد و همچنین زاویه راستای حرکت مولکول هدف با راستای حرکت مولکول فرودی را تعیین کنید.

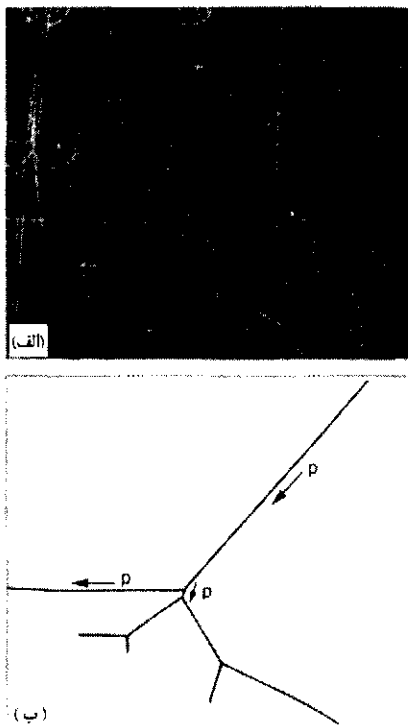
شود. فرض کرده‌ایم که ذره هدف، m_2 ، در ابتدا ساکن است. فاصله b بین خط حرکت ذره فرودی و خطی که به موازات آن از مرکز m_2 می‌گذرد، پارامتر برخورد نامیده می‌شود. برخورد رودرو متناظر است با $b = 0$ و مقادیر بزرگتر b معرف برخوردهای یکبرتری (سیکتر) اند. شکل ۱۲ می‌تواند مثلاً نشان‌دهنده برخورد دو هسته تحت تأثیر نیروی رانشی الکتروستاتیکی میان آنها باشد؛ نیرو به‌عکس مجذور فاصله بین دو هسته بستگی دارد، و برای برخورد لازم نیست که هسته‌ها واقعاً با هم تماس پیدا کنند. در فواصلی که به‌قدر کافی دور باشند، نیرو کوچک می‌شود و ذرات بی‌آنکه اساساً متأثر از نیرو باشند در امتداد خطهای راست حرکت می‌کنند.

صرفنظر از اینکه چه نیرویی بین ذرات اثر می‌کند، تکانه باید پایسته باشد. نیروی بین ذرات یک نیروی داخلی است، و نمی‌تواند تکانه کل سیستم دو ذره‌ای را تغییر بدهد. به‌علاوه، چون تکانه بردار است، می‌دانیم که مؤلفه‌های x و y دو معادله مستقل اسکالر به‌دست می‌دهند. در راستای x ، تکانه اولیه برابر است با $m_1 v_{1i}$ ، و تکانه نهایی کل برابر است با مجموع مؤلفه‌های x تکانه‌های نهایی دو ذره

$$p_{ix} = p_{fx} \\ m_1 v_{1i} = m_1 v_{1f} \cos \phi_1 + m_2 v_{2f} \cos \phi_2 \quad (27)$$

در اینجا جهت‌های بردارهای v_{1f} و v_{2f} را به‌ترتیب با زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 مشخص کرده‌ایم؛ پس در معادله ۲۴ کمیت‌های v_{1f} و v_{2f} مقدار سرعتها را نشان می‌دهند و همواره مثبت‌اند. این با معادله‌های ۱۵ و ۱۶ یا معادله ۲۲، که در آنها با مؤلفه بردار سرعت سروکار داشتیم که ممکن بود مثبت یا منفی باشند، فرق می‌کند.

مؤلفه y تکانه اولیه صفر است (البته به‌خاطر انتخاب مناسب محورهای مختصات) و مؤلفه y تکانه نهایی عبارت است از اختلاف بین مؤلفه‌های y تکانه‌های دو ذره (زاویه‌های ϕ_1 و ϕ_2 را در دو



شکل ۱۳. (الف) چهار برخورد پروتون-پروتون در یک اتاقک حباب. (ب) نمایش نموداری مسیرهای پروتونهای برخوردکننده. پروتون اصلی از قسمت بالا سمت راست وارد اتاقک می‌شود. همه ردها در صفحه تصویر قرار ندارند، و مشاهده استریوسکوپیکی نشان می‌دهد که، طبق انتظار، زاویه بین ذره فرودی و ذره هدف پس از هر برخورد 90° است. سایر ردهای موجود در تصویر ناشی از مزونها (انحنای جزئی) و الکترونها (حلزونیهای درهم فشرده) هستند.

این برخوردها وقتی روی می‌دهند که یک پروتون پراثری وارد اتاقک حبابی می‌شود که پر از هیدروژن مایع است. مولکولهای هیدروژن مایع نقش پروتونهای هدف را دارند. مسیر ذرات به وسیله رد حبابهای به جا مانده از آنها قابل مشاهده می‌شود. چون جرم ذرات برهم‌کنش کننده یکسان است و برخوردها هم کشسان‌اند، ذرات خروجی با هم زاویه قائمه می‌سازند؛ مسیرهای شکل ۱۳ با روش استریوسکوپیکی [برجسته‌نمایی] به خوبی آشکار می‌شوند. نمونه دیگری از این دست در شکل ۲ آمده است.

برخوردهای ناکشسان در دو بعد

در برخورد ناکشسان، دیگر معادله ۲۶ معتبر نیست. معمولاً می‌توانیم این معادله را با عبارت معادلی جایگزین کنیم که انرژی تبدیل شده به انرژی جنبشی یا انرژی جنبشی تبدیل شده به صورتهای دیگر را منظور کند و در نتیجه رابطه‌ای بین انرژی جنبشی اولیه و انرژی جنبشی نهایی به دست بدهد.

در برخورد کاملاً ناکشسان در دو بعد باید با دو جسم در حال حرکت آغاز شود. (چرا؟) باز هم دستگاه مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که یکی از ذرات محور x را تعریف کند و

حل: این مثال دقیقاً مربوط می‌شود به معادله‌های ۲۴ تا ۲۶. وقتی که $m_1 = m_2$ ، $v_{1i} = 322 \text{ m/s}$ و $\phi_1 = 30^\circ$ باشد. اگر m_1 را برابر m_2 بگیریم معادلات به صورت زیر درمی‌آیند

$$v_{1i} = v_{1f} \cos \phi_1 + v_{2f} \cos \phi_2 \quad (27)$$

$$v_{1f} \sin \phi_1 = v_{2f} \sin \phi_2 \quad (28)$$

و

$$v_{1i}^2 = v_{1f}^2 + v_{2f}^2 \quad (29)$$

حالا باید این معادله‌ها را برای به دست آوردن v_{1f} ، v_{2f} و ϕ_2 حل کنیم. برای انجام این کار ابتدا ϕ_2 را با مربع کردن معادله ۲۷ (که قبلاً آن را به صورت $v_{1i} - v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f} \cos \phi_2$ نوشته‌ایم) و افزودن آن به مربع معادله ۲۸، حذف می‌کنیم. با توجه به اینکه $\sin^2 \phi_2 + \cos^2 \phi_2 = 1$ داریم

$$v_{1i}^2 + v_{1f}^2 - 2v_{1i}v_{1f} \cos \phi_1 = v_{2f}^2$$

از ترکیب این رابطه با معادله ۲۹ (مشروط بر اینکه $v_{1f} \neq 0$ باشد) به دست می‌آوریم

$$v_{1f} = v_{1i} \cos \phi_1 = (322 \text{ m/s})(\cos 30^\circ) = 279 \text{ m/s}$$

از معادله ۲۹ نتیجه می‌شود که

$$v_{2f}^2 = v_{1i}^2 - v_{1f}^2 = (322 \text{ m/s})^2 - (279 \text{ m/s})^2$$

یا

$$v_{2f} = 161 \text{ m/s}$$

سرانجام، از معادله ۲۸ داریم

$$\begin{aligned} \sin \phi_2 &= \frac{v_{1f}}{v_{2f}} \sin \phi_1 \\ &= \frac{279 \text{ m/s}}{161 \text{ m/s}} \sin 30^\circ = 0.866 \end{aligned}$$

یا

$$\phi_2 = 60^\circ$$

دو مولکول در راستاهای متعامد از همدیگر دور می‌شوند (در شکل ۱۲ داریم $\phi_1 + \phi_2 = 90^\circ$).

باید بتوانید نشان بدهید که در برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای مساوی، که یکی از آنها در ابتدا ساکن است، امتدادهای حرکت ذرات خروجی همیشه با هم زاویه قائمه می‌سازند. شکل ۱۳ رشته‌ای از چهار برخورد کشسان پیاپی بین پرو

به سمت شرق، و دیگری که جرمش $m_B = 55 \text{ kg}$ است با سرعت $v_B = 8,8 \text{ km/h}$ به سمت شمال حرکت می‌کند. (الف) سرعت مشترک آنها پس از برخورد، V ، چقدر است؟ (ب) تغییر نسبی در انرژی جنبشی اسکیت‌بازان در اثر برخورد چقدر است؟
 حل: (الف) تکانه در طی برخورد پایسته است. برای دو مؤلفه تکانه می‌توانیم روابط زیر را بنویسیم

$$m_A v_A = M V \cos \phi \quad \text{مؤلفه } x \quad (32)$$

$$m_B v_B = M V \sin \phi \quad \text{مؤلفه } y \quad (33)$$

که در آن $M = m_A + m_B$ است. از تقسیم معادله ۳۳ بر معادله ۳۲ نتیجه می‌شود

$$\tan \phi = \frac{m_B v_B}{m_A v_A} = \frac{(55 \text{ kg})(8,8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg})(6,4 \text{ km/h})} = 0,911$$

یا

$$\phi = \tan^{-1} 0,911 = 42,3^\circ$$

از معادله ۳۳ نتیجه می‌گیریم که

$$V = \frac{m_B v_B}{M \sin \phi} = \frac{(55 \text{ kg})(8,8 \text{ km/h})}{(83 \text{ kg} + 55 \text{ kg})(\sin 42,3^\circ)} = 5,21 \text{ km/h}$$

(ب) انرژی جنبشی اولیه عبارت است از

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} m_A v_A^2 + \frac{1}{2} m_B v_B^2 \\ &= \frac{1}{2} (83 \text{ kg})(6,4 \text{ km/h})^2 + \frac{1}{2} (55 \text{ kg})(8,8 \text{ km/h})^2 \\ &= 3830 \text{ kg km}^2/\text{h}^2 \end{aligned}$$

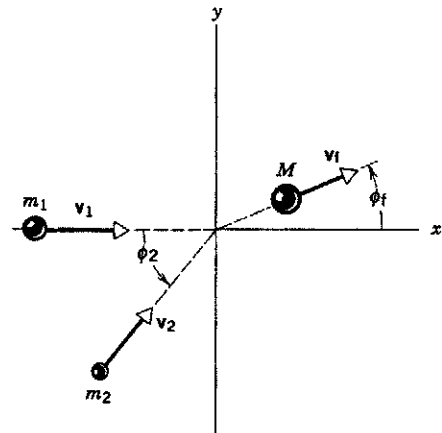
انرژی جنبشی نهایی برابر است با

$$\begin{aligned} K_f &= \frac{1}{2} M V^2 \\ &= \frac{1}{2} (83 \text{ kg} + 55 \text{ kg})(5,21 \text{ km/h})^2 \\ &= 1870 \text{ kg km}^2/\text{h}^2 \end{aligned}$$

آن کسری از انرژی که در جستجوی هشتم این است

$$\begin{aligned} f &= \frac{K_f - K_i}{K_i} = \frac{1870 \text{ kg km}^2/\text{h}^2 - 3830 \text{ kg km}^2/\text{h}^2}{3830 \text{ kg km}^2/\text{h}^2} \\ &= -0,51 \end{aligned}$$

یعنی ۵۱٪ از انرژی جنبشی اولیه در برخورد به هدر رفته است. این انرژی باید به هر حال به صورت انرژی داخلی دو اسکیت‌باز هدر شده باشد.



شکل ۱۴. یک برخورد کاملاً ناکشسان در دو بعد. ذراتی با جرمهای m_1 و m_2 با هم برخورد می‌کنند و تبدیل به جسم مرکبی به جرم M می‌شوند.

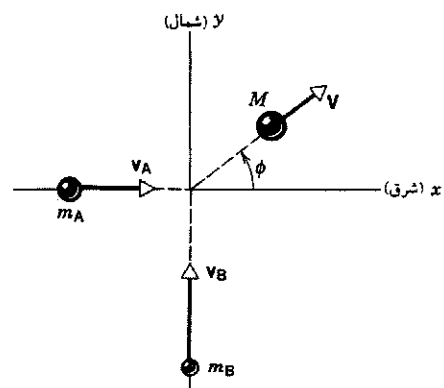
برخورد را چنان تنظیم می‌کنیم که دو ذره در مبدأ به هم برسند و با هم یکی شوند. در این صورت جسم مرکب با سرعت v_f در راستای ϕ_f حرکت می‌کند (شکل ۱۴). پایستگی تکانه برای مؤلفه‌های x و y نتایج زیر را به دست می‌دهد

$$m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \cos \phi_f = M v_f \cos \phi_f \quad \text{مؤلفه } x \quad (30)$$

$$m_2 v_{2y} \sin \phi_f = M v_f \sin \phi_f \quad \text{مؤلفه } y \quad (31)$$

که در آن $M = m_1 + m_2$ جرم کل مجموعه پس از برخورد است. چون پس از برخورد، فقط یک سرعت (مقدار و جهت) برای جسم مرکب داریم، چهار مجهول مورد مربوط به برخورد کشسان به دو مجهول، v_f و ϕ_f ، کاهش می‌یابد و فقط دو معادله (معادله‌های ۳۰ و ۳۱) برای به دست آوردن یک جواب یکتا کافی است.

مثال ۵. دو اسکیت‌باز یک برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند. یعنی پس از برخورد، دست در دست هم حرکت می‌کنند (شکل ۱۵). در ابتدا یکی از آنها به جرم $m_A = 83 \text{ kg}$ با سرعت $v_A = 6,4 \text{ km/h}$



شکل ۱۵. مثال ۵. دو اسکیت‌باز (A و B) برخوردی کاملاً ناکشسان انجام می‌دهند و پس از برخورد در راستای مشخص شده با ϕ به حرکت در می‌آیند.

۱۰-۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

در عمل، وقتی آزمایشهای برخورد انجام می‌شوند، اندازه‌گیریها به‌طور عادی در چارچوب مرجعی که در آزمایشگاه ساکن است (چارچوب آزمایشگاه) صورت می‌گیرند. این نوع آزمایشها در اغلب موارد شامل پرتابه‌ای است که به‌سوی هدفی ساکن در آزمایشگاه پرتاب می‌شود. از طرف دیگر، در اکثر آزمایشهای مربوط به فیزیک ذرات، دو ذره با جرم و سرعت یکسان (دو پروتون یا شاید دو الکترون) مستقیماً به‌سوی یکدیگر شلیک می‌شوند. صرف‌نظر از چگونگی انجام آزمایش، بررسی و تحلیل برخورد در چارچوب مرجعی که به مرکز جرم ذرات برخوردکننده متصل باشد (چارچوب مرکز جرم) عموماً ساده‌تر است، و درک فیزیکی روشنتری فراهم می‌کند.

مثلاً مورد ساده برخورد کشسان یک‌بعدی (رودرود) بین دو ذره یکسان را در نظر بگیرید. اگر یکی از ذرات (هدف) در چارچوب آزمایشگاه ثابت باشد، ذره دیگر (ذره فرودی) که در ابتدا با سرعت v در حرکت است) پس از برخورد متوقف می‌شود و ذره هدف با سرعت v به سمت جلو به حرکت درمی‌آید. اما در چارچوب مرجع مرکز جرم، دو ذره قبل از برخورد هر یک با سرعت $v/2$ به طرف همدیگر حرکت می‌کنند و پس از برخورد هم با همان سرعت از هم دور می‌شوند. دیگر بین پرتابه و هدف وجه تمایزی وجود ندارد و توصیف رویداد در این چارچوب کاملاً متقارن است.

در شکل ۱۶ الف یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" از یک برخورد کشسان بین یک ذره متحرک به جرم m_1 و یک ذره ساکن به جرم $m_2 = 3m_1$ را نشان داده‌ایم. چون در حین برخورد فقط نیروهای داخلی مؤثرند، همان‌طور که در شکل ۱۶ الف می‌بینیم، حرکت مرکز جرم در اثر برخورد تغییر نمی‌کند. مرکز جرم دو جسم m_1 و m_2 که با معادله ۴ فصل ۹ تعریف می‌شود، قبل و بعد از برخورد با همان سرعت ثابت v_{cm} حرکت می‌کند.

سرعت مرکز جرم از معادله ۵ فصل ۹ به‌دست می‌آید

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \quad (34)$$

که در این مورد $v_{2i} = 0$ بوده است. اکنون می‌خواهیم نمودار همین برخورد را از دیدگاه چارچوب مرجع متحرکی که نسبت به آزمایشگاه با سرعت v_{cm} در حرکت است رسم کنیم. این چارچوب همان چارچوب مرجع مرکز جرم است. سرعتهای اجسام m_1 و m_2 در این چارچوب را می‌توانیم از معادله ۴۳ بخش ۴-۶ (مربوط به تبدیلات سرعت بین چارچوبهای مرجع) به‌دست بیاوریم

$$v = v' + u \quad (35)$$

که در آن v سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب آزمایشگاه، v' سرعت اندازه‌گیری شده در چارچوب متحرک نسبت به آزمایشگاه، و u سرعت نسبی دو چارچوب مرجع است. در مورد مسئله‌ای که در دست بررسی داریم، چارچوب متحرک همان چارچوب مرکز جرم

حالا می‌توانیم سرعتهای اولیه جسمهای m_1 و m_2 را در چارچوب متحرک تعیین کنیم

$$\begin{aligned} v'_{1i} &= v_{1i} - v_{cm} = v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} v'_{2i} &= v_{2i} - v_{cm} = 0 - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (37)$$

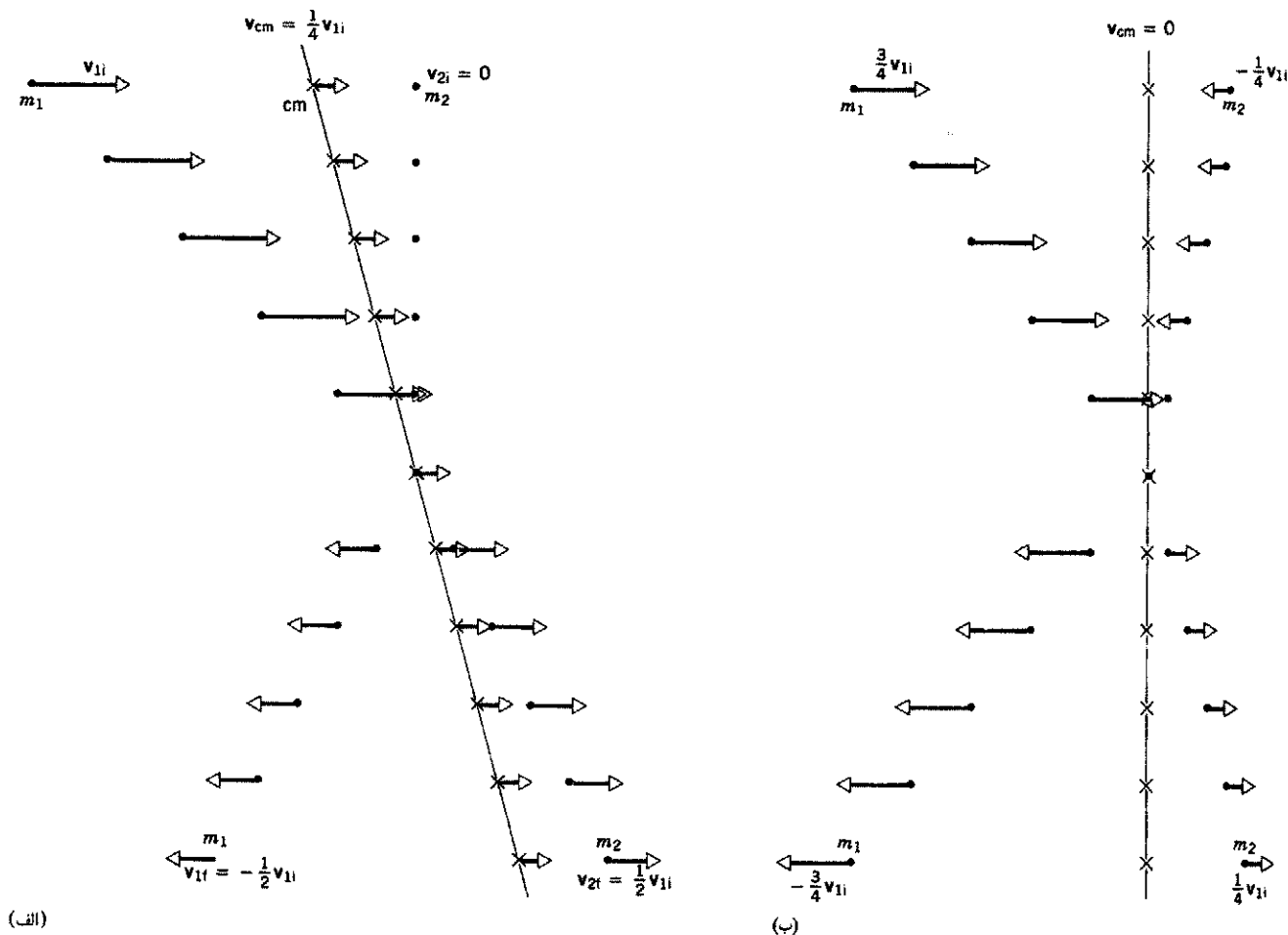
سرعتهای نهایی اجسام در چارچوب آزمایشگاه را هم (که در معادله ۱۸ آمده است) می‌توانیم به سرعتهای نظیر در چارچوب مرکز جرم تبدیل کنیم

$$\begin{aligned} v'_{1f} &= v_{1f} - v_{cm} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= - \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (38)$$

$$\begin{aligned} v'_{2f} &= v_{2f} - v_{cm} = \left(\frac{2m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \\ &= \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} \end{aligned} \quad (39)$$

به تقارن این نتایج توجه کنید. در چارچوب مرکز جرم، در برخورد فقط جهت سرعت جسمهای m_1 و m_2 وارونه می‌شود، به‌این ترتیب که سرعت جسم m_1 از $m_2 v_{1i} / (m_1 + m_2) + m_2 v_{1i} / (m_1 + m_2) - m_2 v_{1i} / (m_1 + m_2)$ تغییر می‌کند و سرعت جسم m_2 از $-m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2) + m_1 v_{1i} / (m_1 + m_2)$ تبدیل می‌شود. یک رشته تصویرهای لحظه‌ای برخورد در چارچوب مرجع مرکز جرم در شکل ۱۶ ب نشان داده شده است. در این چارچوب مرجع خاص، حرکت هر ذره شبیه به حرکت تویی است که از یک سطح سخت بازمی‌جهد، ذره دیگر در آنجا حضور دارد تا ضربه لازم برای وارونی حرکت را تأمین کند. این هم روشن است که در این چارچوب مرجع، انرژی جنبشی کل در حین برخورد ثابت می‌ماند. (در واقع، جداگانه برای هر یک از ذره‌ها ثابت می‌ماند.) با مشاهده برخورد از این دیدگاه، درک تازه‌ای از مفهوم برخورد "کشسان" پیدا می‌کنیم.

اکنون یک برخورد کاملاً ناکشسان یک‌بعدی را از دیدگاه چارچوب مرکز جرم بررسی می‌کنیم. باز هم فرض می‌کنیم جسم m_1 بر جسم m_2 (یعنی $3m_1$) که در چارچوب آزمایشگاه ساکن است فرود می‌آید. پس از برخورد جسم مرکبی به جرم $M = m_1 + m_2$ داریم. سرعت مرکز جرم باز هم از معادله ۳۴ به‌دست می‌آید. تصویرهای لحظه‌ای در شکل ۱۷ الف برخورد را در چارچوب آزمایشگاه نشان می‌دهد؛ اینجا هم مرکز جرم قبل و بعد از برخورد با سرعت یکسانی حرکت می‌کند. تبدیل سرعتهای اولیه جسمهای m_1 و m_2 دقیقاً مانند مورد ای ۳۶ و ۳۷ انجام می‌شود. سرعت نهایی



شکل ۱۶. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" مربوط به دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به‌طور کشسان در یک‌بعد با هم برخورد می‌کنند. مرکز جرم دو ذره با علامت \times مشخص شده است. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

هم ترکیب شدند، تکانهٔ جسم مرکب باید صفر شود. برخورد کاملاً ناکشسان در چارچوب مرجع مرکز جرم خاصیت جالب دیگری هم دارد. در چارچوب آزمایشگاه، انرژی جنبشی از دست رفته (یعنی تبدیل شده به انرژی داخلی، انرژی تغییر شکل و مانند اینها) همواره کمتر از 10% است؛ مثلاً، در برخورد بین دو ذرهٔ هم‌جرم، که در ابتدا یکی از آنها ساکن است، اتلاف انرژی جنبشی 5% است. در چارچوب مرکز جرم اتلاف همیشه 10% است، و فرقی هم نمی‌کند که m_1 و m_2 چه مقادیری داشته باشند. وقتی منظور از برخورد دادن ذرات تبدیل انرژی جنبشی به صورت‌های دیگر انرژی باشد، صرفه در آن است که نه تنها نتایج را در چارچوب مرکز جرم تحلیل کنیم بلکه آزمایش را هم واقعاً در آن چارچوب انجام بدهیم.

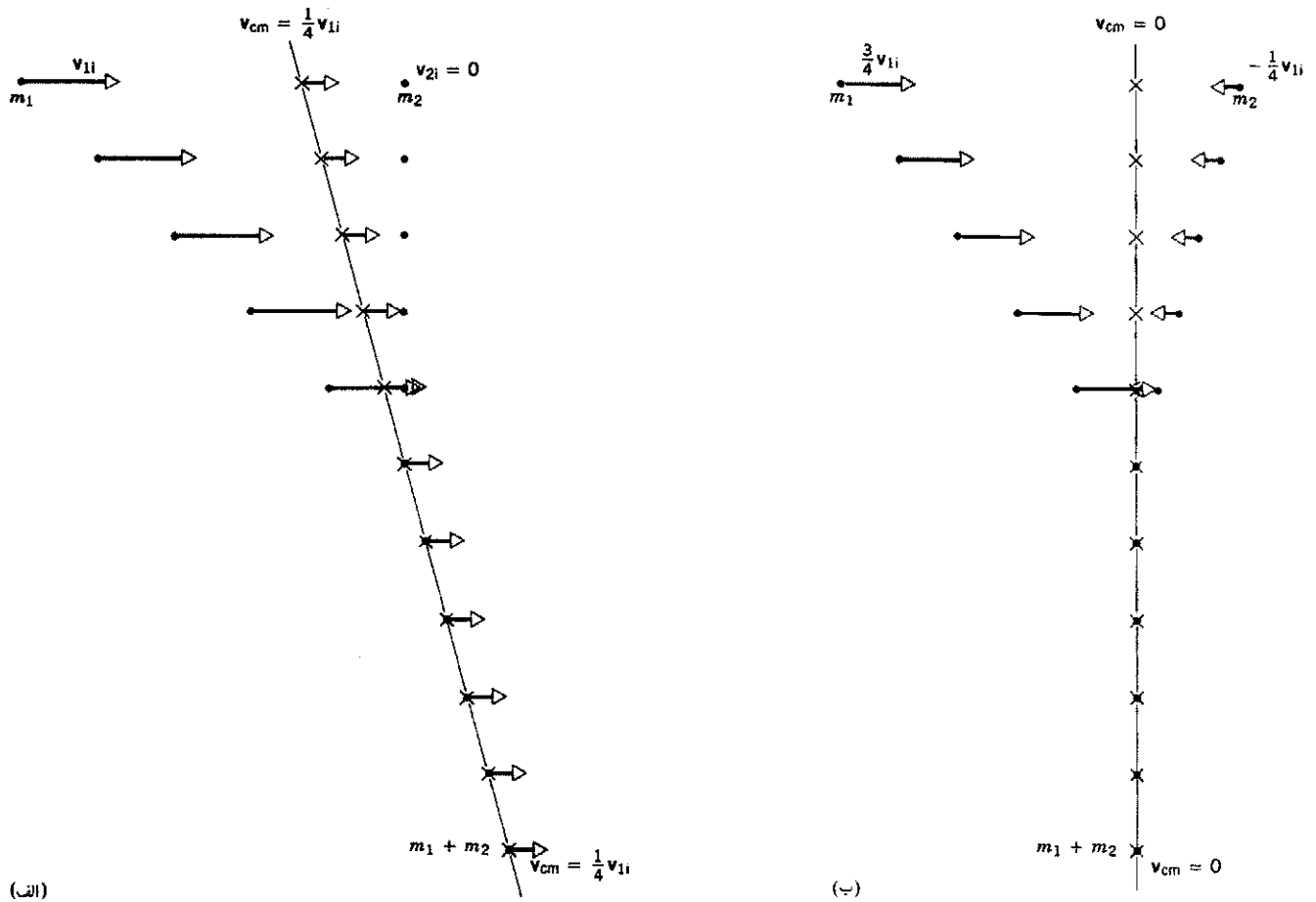
در مطالعهٔ خواص ذرات بنیادی طبیعت، اغلب منظورمان این است که ذرات پر انرژی را به هم بکوبیم تا ذرات جدید و غریبی با جرم‌های بیشتر تولید کنیم؛ در این مورد، انرژی جنبشی در طی برخورد به انرژی بسکون mc^2 ذرات دیگر تبدیل می‌شود. انرژی قابل حصول

جسم M در چارچوب مرکز جرم را می‌توان از تبدیل نتیجهٔ کلی v_f در چارچوب آزمایشگاه، معادلهٔ ۲۳، به‌دست آورد

$$v'_f = v_f - v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} - \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} = 0$$

البته این نتیجه همان است که انتظار می‌رود و نباید عجیب باشد. جسم مرکب M همواره در مرکز جرم واقع می‌شود، زیرا شامل تمام جرم موجود در سیستم بعد از برخورد است. در چارچوب آزمایشگاه، M باید با سرعت مرکز جرم حرکت کند، و چنانچه معادله‌های ۲۳ و ۳۴ را مقایسه کنید می‌بینید که واقعاً با همین سرعت حرکت می‌کند. در چارچوب مرجعی که در آن مرکز جرم ساکن است، M هم باید در حال سکون باشد.

در چارچوب مرکز جرم (شکل ۱۷ ب) باز هم تقارن وجود دارد: قبل از برخورد، اجسام m_1 و m_2 با تکانه‌های مساوی ولی در خلاف جهت به همدیگر نزدیک می‌شوند. پس از آنکه به هم برخوردند و با...

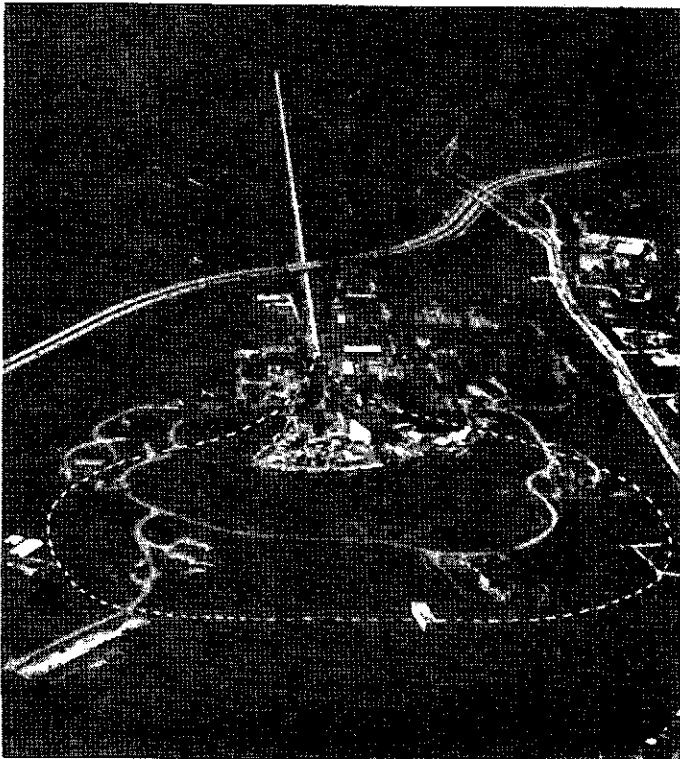


شکل ۱۷. یک رشته "تصویرهای لحظه‌ای" دو ذره با جرمهای m_1 و $m_2 = 3m_1$ که به طور کاملاً ناکشسان در یک بعد با هم برخورد می‌کنند. (الف) چارچوب مرجع آزمایشگاه. (ب) چارچوب مرجع مرکز جرم.

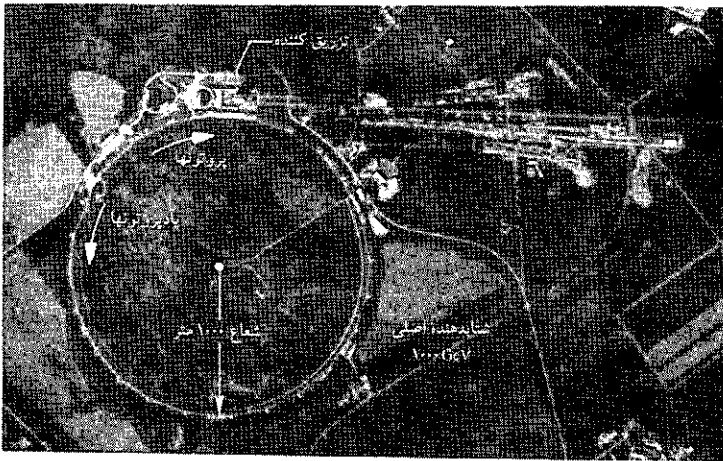
پادپروتون با انرژی 1000 GeV (1 TeV) در حلقه واحدی در جهت‌های مخالف می‌چرخند و در هر دور یک بار به هم می‌خورند (شکل ۱۹). البته، واکنشی که انجام می‌شود در هر دو چارچوبهای مرجع یکسان است؛ فقط تعبیر نتایج است که فرق می‌کند.

تا اینجا در چارچوب مرکز جرم فقط برخوردهای یک‌بعدی را مطالعه کرده‌ایم. برخورد کشسان دوبعدی هم از دیدگاه چارچوب مرجع مرکز جرم ساختار متقارن‌تری دارد. باز هم فرض می‌کنیم که جسم m_2 در ابتدا نسبت به چارچوب آزمایشگاه ساکن باشد. در اینجا به محاسبات ریاضی مربوط به برخورد دوبعدی در چارچوب مرکز جرم (که کمی پیچیده‌تر از حالت یک‌بعدی است) نمی‌پردازیم؛ فقط یک توصیف نموداری از آن را در شکل ۲۰ ارائه می‌کنیم. مانند مورد یک‌بعدی، در این برخورد هم صرفاً سرعت هر ذره معکوس می‌شود. تنها تفاوت در این است که در اینجا دو ذره پس از برخورد در امتداد خطی حرکت می‌کنند که در حالت کلی با راستای اولیه حرکت فرق می‌کند. تقارن ایجاد می‌کند که زاویه‌های بین سرعت‌های نهایی و ... با هم مساوی باشند؛ البته وقتی سرعتها را

برای ایجاد ذرات جدید درست برابر با انرژی جنبشی "اتلافی" در برخورد ناکشسان است؛ در حوزه این برخوردهای پراثری، جایی که باید از معادلات سینماتیک نسبیتی استفاده کرد، درمی‌یابیم که در چارچوب آزمایشگاه برای تولید ذرات جدید، انرژی جنبشی اولیه مورد نیاز به صورت مربع انرژی سکون ذره‌ای که می‌خواهیم تولید کنیم افزایش می‌یابد. یعنی، برای تولید ذره‌ای که انرژی سکون آن 10 برابر باشد نیاز به انرژی جنبشی 100 برابر داریم و بنابراین به شتابگری نیاز داریم که 100 برابر بزرگتر و پرهزینه‌تر است. ولی، اگر می‌توانستیم برخورد را در چارچوب مرکز جرم انجام بدهیم، در آن صورت می‌شد ذراتی با 10 برابر انرژی سکون فقط با 10 برابر (و نه 100 برابر) انرژی جنبشی تولید کرد، زیرا کارایی این برخوردها در تبدیل انرژی جنبشی 100% است. نسل فعلی شتابدهنده‌های ذرات شامل نمونه‌های بسیاری از این‌گونه وسایل برخورددهنده باریکه است. در مرکز شتابدهنده خطی استانفورد (SLAC) در کالیفرنیا، باریکه‌های الکترون و پوزیترون (پادالکترون) هر یک با انرژی 50 GeV برخورد داده می‌شوند (شکل ۱۸). در آزمایشگاه شتابدهنده فرمی (FNAL) در ایلینوی، ...



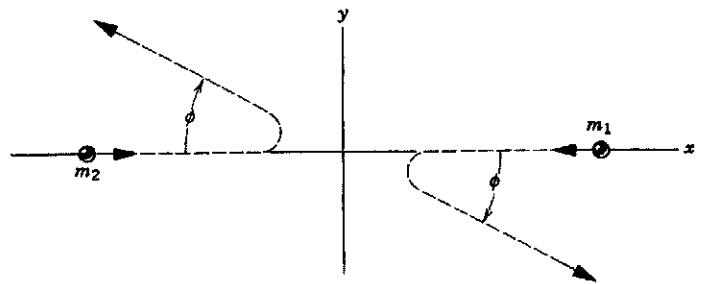
شکل ۱۸. شتابدهنده الکترون، مرکز شتابدهنده خطی استنفورد، به طول ۳٫۲ کیلومتر. الکترونها و پوزیترونها در قسمت مستقیم شتابدهنده شتاب می‌گیرند، و پس از طی مسیرهای زیرزمینی، که با خط چین نشان داده شده است، در آزمایشگاهی که در پایین عکس است به هم برخورد می‌کنند.



شکل ۱۹. آزمایشگاه شتابدهنده ملی فرمی. پروتونها و پادپروتونها از حلقه کوچکی در بالای عکس به داخل حلقه بزرگ (به شعاع یک کیلومتر) تزریق می‌شوند. این ذرات در جهتهای مخالف به چرخش در می‌آیند و در هر دور یکبار با هم برخورد می‌کنند.

به چارچوب آزمایشگاه بازگردانیم، در حالت کلی زاویه‌های نامساوی ϕ_1 و ϕ_2 شکل ۱۲ به دست می‌آیند.

۱۰-۷ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی (اختیاری)
از بیش از ۲۰۰۰ گونه از هسته‌های اتمی‌ای که تاکنون شناسایی شده‌اند، بیشترشان ناپایدارند و — دیر یا زود — همه یا بخشی از انرژی اضافی‌شان را با شکافتن به دو یا چند پاره از دست می‌دهند. میانگین عمر چنین فرایندهای واپاشی پرتوزایی از چندین میلیارد سال (مثلاً، برای ^{238}U) تا کسره‌های بسیار کوچکی از ثانیه تغییر می‌کند. تمام این واپاشیها خودبه‌خود روی می‌دهند. در یک نمونه معین از یک ماده



شکل ۲۰. یک برخورد کله‌سان دوبعدی در چارچوب مرکز جرم. در این چارچوب ذرات باید در جهت‌های مخالف همدیگر حرکت کنند، بنابراین هر دو پس از برخورد، تحت زاویه یکسانی منحرف می‌شوند.

معادله 40 را می‌توانیم با گردآوردن جملات انرژی سکون در یک طرف و جملات انرژی جنبشی در طرف دیگر، به صورت زیر بنویسیم

$$m_A c^2 - m_B c^2 - m_C c^2 = K_B + K_C - K_A \quad (41)$$

انرژی آزاد شده در واپاشی، Q ، را به صورت تفاوت میان انرژی سکون اولیه $m_i c^2$ و انرژی سکون نهایی $m_f c^2$ تعریف می‌کنیم:

$$Q = m_i c^2 - m_f c^2 \quad (42)$$

که برای واپاشی مورد مطالعه چنین می‌شود

$$Q = (m_A - m_B - m_C) c^2 \quad (43)$$

یا، با استفاده از معادله 41

$$Q = K_B + K_C - K_A \quad (44)$$

یعنی، Q برابر است با انرژی جنبشی خالصی که محصولات واپاشی، کسب می‌کنند. در صورتی که A از حال سکون واپاشد، Q برابر است با انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی.

در فرایند واپاشی تکانه خطی باید پایسته باشد. اگر A در حال سکون باشد، تکانه اولیه کل صفر است، و در نتیجه تکانه نهایی هم باید صفر باشد

$$\begin{aligned} p_i &= p_f \\ 0 &= p_B + p_C \end{aligned} \quad (45)$$

معادله‌های 44 (با $K_A = 0$) و 45 دو معادله با دو مجهول اند که می‌توان آنها را برای انرژی‌ها یا تکانه‌های محصولات واپاشی B و C حل کرد. حاصل حل این معادلات، وقتی انرژی سکون هیچ‌یک از ذرات B و C صفر نباشد، عبارت است از

$$K_B = Q \frac{m_C}{m_B + m_C} \quad (46)$$

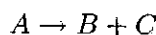
$$K_C = Q \frac{m_B}{m_B + m_C} \quad (47)$$

در بسیاری از فرایندهای واپاشی که در آزمایشگاه بررسی می‌شوند، یکی از محصولات، مثلاً B ، انرژی سکون بسیار کمتری از دیگری دارد، یعنی $m_B \ll m_C$ است. مثلاً B ممکن است یک الکترون (با انرژی سکون 0.511 MeV) یا یک ذره آلفا (با انرژی سکون 3727 MeV) باشد، در حالی که C ممکن است یک اتم یا هسته سنگین (نوعاً با انرژی سکون 10^9 MeV) باشد. اغلب این ذره سبکتر است که باید در آزمایش مشاهده شود. در چنین صورتی، همان‌طور که معادلات 46 و 47 نشان می‌دهند، $Q \approx K_B$ و $K_C \ll K_B$ است. توجه داشته باشید که اگر چه انرژی‌های جنبشی دو ذره کاملاً متفاوت است، مقدار مخالف یکدیگرند، همان‌طور که معادله 45

پرتوزا که شامل تعداد زیادی (شاید 10^{20}) هسته است می‌توانیم دقیقاً تخمین بزنیم که در یک بازه زمانی معلوم چند تا از هسته‌ها و امی باشند، اما هیچ راهی وجود ندارد که بتوانیم پیش‌بینی کنیم کدام هسته و خواهد باشید.

اتمها، مثلاً اتمهایی که گاز داخل لامپهای مهتابی را تشکیل می‌دهند، ممکن است در حالتی با انرژی اضافی واقع شده باشند و با گسیل (باز هم خودبه‌خودی، برای یک اتم منزوی) یک کوانتوم تابش به ساختار پایدار بازگردند. ذرات بنیادی‌ای که از برخورد های پروتون-پروتون در شتابدهنده‌های پرا انرژی تولید می‌شوند نیز ممکن است خودبه‌خود واپاشند و به ذرات دیگر تبدیل شوند (شکل 4). واپاشی خودبه‌خودی بعضی از این ذرات چنان سریع روی می‌دهد (مثلاً، برای ذره J/ψ در حدود 10^{-20} ثانیه) که تنها شاهدهی که برای وجود آنها داریم عبارت از مشاهده محصولات واپاشی تحت شرایط مساعد برای ایجاد آن ذرات است.

در این بخش درباره واپاشیهای خودبه‌خودی از نوع



که در آن A ذره واپاشنده و B و C محصولات واپاشی هستند، گفتگو می‌کنیم. معمولاً این رویداد را در آزمایشگاه از چارچوبی مشاهده می‌کنیم که در آن A در حال سکون است. بنابراین واپاشی $A \rightarrow B + C$ درست وارونه برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \rightarrow A$ است که از چارچوب مرجع مرکز جرم مشاهده شده باشد (شکل 17 ب). در واقع، اگر در شکل 17 ب زمان را به عقب برگردانیم، یعنی اطلاعات روی شکل را از پایین به بالا بخوانیم و جهت بردارهای سرعت را برعکس کنیم، تصویر ذهنی خوبی از فرایند واپاشی به دست می‌آوریم.

در برخورد کاملاً ناکشسان، انرژی جنبشی ذرات برخوردکننده در طی برخورد "گم" می‌شود. البته، انرژی کل باید پایسته باشد و بنابراین، انرژی جنبشی "گم" شده باید در سیستم مرکب به صورت دیگری ظاهر شود، که آن را به صورت افزایش انرژی سکون جسم مرکب مشاهده می‌کنیم (رجوع کنید به بخش $7-8$). در فرایند واپاشی، معکوس این رویداد صورت می‌گیرد: انرژی سکون A به انرژی جنبشی B و C تبدیل می‌شود. پس در فرایند واپاشی، پایستگی انرژی را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$E_A = E_B + E_C$$

$$m_A c^2 + K_A = (m_B c^2 + K_B) + (m_C c^2 + K_C) \quad (40)$$

در اینجا انرژی کل هر ذره به صورت مجموع انرژی سکون $m c^2$ و انرژی جنبشی K آمده است. معادله 40 را به کلی‌ترین صورت نوشته‌ایم و این را هم در نظر گرفته‌ایم که ذره A به هنگام واپاشی ممکن است دارای انرژی جنبشی K_A باشد، ولی معمولاً مواردی را بررسی می‌کنیم که در آنها $K_A = 0$ است.

۲. آیا ضربه یک نیروی غیرصفر می‌تواند صفر باشد؟ در هر صورت توضیح بدهید.
۳. شکل ۲۱ یک وسیله زورآزمایی تفریحی را نشان می‌دهد. زورآزما سعی می‌کند با پتک هر چه شدیدتر روی هدف بکوبد و یک شاخص متحرک سنگین وزن را حتی الامکان بالاتر بفرستد. این ابزار کدام کمیت فیزیکی را اندازه‌گیری می‌کند؟ نیروی متوسط، نیروی بیشینه، کار انجام شده، ضربه، انرژی انتقال یافته، تکانه انتقال یافته، یا چیز دیگری را؟ جواب خودتان را توضیح بدهید.

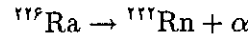


شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. اگرچه شتاب توپ بیسبال پس از ضربه خوردن ارتباطی به‌زنده ضربه ندارد، ولی باید کمیتی مربوط به پرواز توپ به زنده ضربه بستگی داشته باشد. آن کمیت کدام است؟
۵. توضیح بدهید که چگونه ممکن است یک کیسه هوا در اتومبیل، مسافر را از صدمات شدید در تصادف تا حدودی حفظ کند.
۶. گفته می‌شود که در یک تصادف با سرعت 30 mi/h ، کودک 10 lb می‌تواند نیروی 300 lb به مسافری که او را در بغل نشانده است وارد کند. نیرویی به این بزرگی از کجا ناشی می‌شود؟
۷. نظرتان را درباره گفته زیر بیان کنید: در تصادف اتومبیل نیرویی را که اتومبیل در ضمن متوقف شدن وارد می‌کند می‌توان از تکانه یا انرژی جنبشی آن تعیین کرد. در مورد اول باید زمان توقف و در مورد دوم باید مسافت توقف را بدانیم.
۸. فولاد از لاستیک کشسان‌تر است. توضیح بدهید که منظور از این گفته چیست؟

ایجاب می‌کند، دقیقاً یکسان باقی می‌ماند. در چنین حالتی اغلب از تکانه پس‌زنی یا انرژی (جنبشی) پس‌زنی C صحبت می‌کنیم، گویی که C تفنگ سنگینی است که پس از شلیک گلوله سبک B پس می‌زند (مثال ۷ از فصل ۹).

مثال ۶. گسیل ذره‌های آلفا (هسته‌های اتم هلیم) را در واپاشی طبیعی عنصر پرتوزای رادیم (^{226}Ra) به عنصر گازی رادون (^{222}Rn) در نظر بگیرید



اگر ^{226}Ra از حال سکون وایپاشد، انرژی جنبشی محصولات چقدر است؟

حل: جرمهای اتمی عبارت‌اند از

$$^{226}\text{Ra}: 226.025403 \text{ u}; \quad ^{222}\text{Rn}: 222.017571 \text{ u}$$

$$\alpha: 4.002603 \text{ u}$$

می‌توانیم از معادله ۴۳ مقدار Q را محاسبه کنیم، در این محاسبه مقدار $c^2 = 931.2 \text{ MeV/u}$ را به‌کار می‌بریم

$$Q = [m(^{226}\text{Ra}) - m(^{222}\text{Rn}) - m(\alpha)]c^2$$

$$= (226.025403 \text{ u} - 222.017571 \text{ u} - 4.002603 \text{ u})(931.2 \text{ MeV/u})$$

$$= 4.87 \text{ MeV}$$

حالا می‌توانیم انرژی جنبشی ذرات را از معادله‌های ۴۶ و ۴۷ پیدا کنیم

$$K_{\text{Rn}} = (4.87 \text{ MeV}) \frac{4.002603 \text{ u}}{222.017571 \text{ u} + 4.002603 \text{ u}}$$

$$= 0.09 \text{ MeV}$$

$$K_{\alpha} = (4.87 \text{ MeV}) \frac{222.017571 \text{ u}}{(222.017571 \text{ u} + 4.002603 \text{ u})}$$

$$= 4.78 \text{ MeV}$$

توجه کنید که، بنابه معادله ۴۴ (با $K_A = 0$)، دو انرژی جنبشی روی هم Q را به‌دست می‌دهند؛ همچنین توجه کنید که ذره سبکتر آلفا قسمت اعظم انرژی (ولی نه همه آن) را به خودش اختصاص می‌دهد — در مورد این مسئله در حدود ۹۸٪.

پرسشها

۱. چگونگی پایداری تکانه را در مورد بازجهش توپ از دیوار توضیح بدهید.

۹. اگر می‌توانستیم همه حرکت‌های داخلی اتم‌های اجسام را به حساب بیاوریم، می‌شد همه برخوردها را کنشسان تلقی کرد. در این باره بحث کنید.

۱۰. اگر (فقط) دو ذره با هم برخورد کنند، آیا هیچ‌وقت مجبور خواهیم شد که برای وصف کردن این رویداد از توصیف سه‌بعدی استفاده کنیم؟ توضیح بدهید.

۱۱. دیده‌ایم که تکانه می‌تواند پایسته باشد صرف‌نظر از اینکه انرژی جنبشی پایسته باشد یا نباشد. آیا برعکس این موضوع هم درست است؛ یعنی، آیا در فیزیک کلاسیک پایستگی انرژی جنبشی پایستگی تکانه را ایجاب می‌کند؟^۱

۱۲. آنچه می‌آید از یک ورقه امتحان انتخاب شده است: "برخورد بین دو اتم هلیم کاملاً کنشسان است، و در نتیجه تکانه پایسته می‌ماند." نظر شما درباره این گفته چیست؟

۱۳. در بزرگراهی با سرعت 50 mi/h در حرکتیم، و یک اتومبیل دیگر پشت سر ما با همین سرعت حرکت می‌کند. سرعتمان را به 40 mi/h کاهش می‌دهیم ولی اتومبیل پشت سری چنین نمی‌کند و برخورد روی می‌دهد. سرعت‌های اولیه اتومبیل‌های برخوردکننده از دیدگاه هر یک از چارچوب‌های مرجع زیر چقدر است؟ (الف) خودمان، (ب) راننده اتومبیل عقبی، و (ج) پلیسی که در اتومبیل گشت خود در کنار بزرگراه متوقف است. (د) قاضی تصادفات می‌پرسد که آیا شما به او "زدید" یا ماشین عقبی به شما زد. شما، به عنوان فیزیک‌پیشه، چه جوابی به این سؤال می‌دهید؟

۱۴. سی آر دایش نوشته است که، برای گلف‌بازان حرفه‌ای، سرعت اولیه توپ موقع جدا شدن از چوبدست در حدود 140 mi/h است. و دیگر اینکه: (الف) "اگر می‌شد ساختمان "امپایر استیت" را به عنوان چوبدست با همان سرعت چوبدست تاب داد و به توپ ضربه وارد کرد، سرعت اولیه توپ فقط در حدود 2% افزایش می‌یافت" و (ب) همین که گلف‌باز حرکت تاب رو به پایین چوبدست را آغاز کرد، دیگر صدای شاتر دوربین، عطسه، و مانند اینها تأثیری در حرکت توپ نخواهد داشت. آیا می‌توانید با ارائه یک بحث کیفی این دو گزاره را تأیید کنید؟

۱۵. از معادله‌های ۱۲ و ۱۳ روشن است که یک جواب قابل قبول برای مسئله برخورد یک‌بعدی کنشسان عبارت است از $v_{1f} = v_{1i}$ و $v_{2f} = v_{2i}$ تعبیر فیزیکی این جوابها چیست؟

۱۶. دو گلوله گلی با سرعت و جرم مساوی با یکدیگر رودرو برخورد می‌کنند، به هم می‌چسبند، و به حال سکون در می‌آیند. در این برخورد، انرژی جنبشی قطعاً پایسته نیست. چه بر سر انرژی جنبشی می‌آید؟ تکانه چگونه پایسته می‌ماند؟

۱۷. یک فوتبالیست، در لحظه‌ای که ساکن است، توپی را دریافت می‌کند و در همان موقع مورد اصابت بازیکن دوان تیم مقابل قرار می‌گیرد. مسلماً این رویداد یک برخورد (نا) است. تکانه

باید در آن پایسته بماند. در چارچوب مرجع زمین فوتبال، قبل از برخورد تکانه وجود داشته است ولی به نظر می‌رسد که بعد از برخورد تکانه‌ای در کار نیست. آیا تکانه خطی واقعاً پایسته است؟ اگر چنین است توضیح بدهید چگونه؟ و اگر چنین نیست توضیح بدهید که چرا؟

۱۸. برخورد یک‌بعدی کنشسان بین جسم متحرک A و جسم ساکن B را در نظر بگیرید. برای اینکه جسم B پس از برخورد با (الف) بیشترین سرعت، (ب) بیشترین تکانه، و (ج) بیشترین انرژی جنبشی به حرکت در بیاید جرم آن را در مقایسه با جرم جسم A چگونه انتخاب می‌کنید؟
۱۹. دو جسم مکعب شکل یکسان، که هر دو در یک راستا با سرعت یکسان v در حرکت‌اند، با جسم سومی که مشابه آنهاست و در ابتدا روی سطح افقی بدون اصطکاک‌کی در حال سکون قرار دارد، برخورد می‌کنند. حرکت این سه جسم پس از برخورد چگونه است؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با هم در تماس باشند یا نباشند؟ آیا فرقی می‌کند که دو جسم متحرک با چسب به همدیگر چسبانده شده باشند؟ فرض کنید برخوردها (الف) کاملاً ناکنشسان و (ب) کنشسان باشند.

۲۰. چگونه می‌توانید تفنگ‌کی طراحی کنید که پس‌زنی نداشته باشد؟^۱

۲۱. در برخورد دو جسم در چارچوب مرجع مرکز جرم تکانه‌های آنها، هم قبل از برخورد و هم بعد از برخورد، مساوی و مختلف‌الجهت‌اند. آیا خط مشخص‌کننده حرکت نسبی بعد از برخورد الزاماً همان خط پیش از برخورد است؟ تحت چه شرایطی مقدار سرعت‌های اجسام بر اثر برخورد زیاد می‌شود؟ کم می‌شود؟ تغییر نمی‌کند؟

۲۲. یک ساعت ماسه‌ای را با یک ترازوی حساس وزن می‌کنیم؛ یک‌بار وقتی ماسه با جریان ثابتی از قسمت بالایی به قسمت پایینی می‌ریزد و یک‌بار هم وقتی قسمت بالایی خالی است. آیا وزن این جسم در دو مورد یکسان است؟ درباره جواب خودتان توضیح بدهید.
۲۳. توضیح معقولی برای شکسته شدن تخته‌های چوبی و یا آجرها در اثر ضربه‌های کاراته ارائه کنید.^۲

۲۴. یک جعبه تخلیه‌شده از هوا روی میز بدون اصطکاک‌کی قرار دارد. سوراخ کوچکی در یک وجه آن ایجاد می‌کنیم به طوری که هوا بتواند به آن وارد شود (شکل ۲۲). جعبه چگونه حرکت خواهد کرد؟ استدلال شما برای رسیدن به این جواب چیست؟

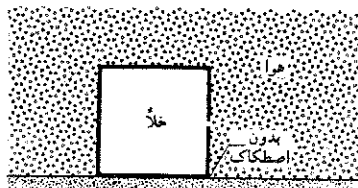
۱. نگاه کنید به

"Connection Between Conservation of Energy and Conservation of Momentum," Carl G. Adler, *American Journal of Physics*, May 1976, p. 483.

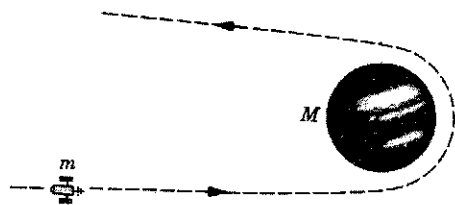
۲. نگاه کنید به

"Karate Strikes," Jearl D. Walker, *American Journal of Physics*, October 1975, p. 845.

۴. فضاپیماى ویجر ۱ (با جرم m و سرعت v سبب به خورشید، به سیارهٔ مشتری (با جرم M و سرعت V نسبت به خورشید) نزدیک می‌شود (شکل ۲۴). فضاپیما سیاره را دور می‌زند و در جهت مخالف از آن دور می‌شود. سرعت فضاپیما (نسبت به خورشید) پس از این "برخورد پرتابی" چقدر است؟ فرض کنید $v = 12 \text{ km/s}$ و $V = 13 \text{ km/s}$ (سرعت مداری مشتری) است. جرم مشتری خیلی بیشتر از جرم فضاپیماست ($M \gg m$).



شکل ۲۲. پرسش ۲۴



شکل ۲۴. مسئله ۴

۵. گلف‌بازی ضربه‌ای به توپ وارد می‌کند و به آن سرعت اولیه 52.2 m/s در راستای 30° بالای افق می‌دهد. با فرض اینکه جرم توپ 46 g باشد و چوبدست و توپ 120 ms در تماس باشند، کمیت‌های زیر را تعیین کنید: (الف) ضربهٔ وارد بر توپ، (ب) ضربهٔ وارد بر چوبدست، (ج) نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست و (د) کار انجام شده روی توپ.

۶. یک اتومبیل 1420 کیلوگرمی با سرعت 52.8 m/s به طرف شمال در حرکت است. این اتومبیل یک گردش به راست 90° را در 4.6 s ثانیه انجام می‌دهد. پس از آن اتومبیل به یک درخت برخورد می‌کند و در مدت 350 ms متوقف می‌شود. ضربهٔ وارد بر اتومبیل در هر یک از حالت‌های زیر چقدر است؟ (الف) در طی گردش به راست و (ب) در طی برخورد. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در دو حالت زیر چقدر است؟ (ج) در طی گردش به راست و (د) در طی برخورد.

۷. یک توپ بیسبال 150 گرمی (وزن 5 oz) که با سرعت 41.6 m/s در حرکت است با چوبدست ضربه می‌خورد و با سرعت 61.5 m/s مستقیماً به عقب برمی‌گردد. مدت تماس توپ و چوبدست 470 ms است. نیروی متوسط وارد بر توپ از چوبدست چقدر است؟ ۸. در برخوردی که 270 ms طول می‌کشد، نیروی متوسط 984 N به یک گوی فولادی 420 گرمی که با سرعت 13.8 m/s در حرکت است وارد می‌شود. اگر نیرو در جهت مخالف سرعت اولیه گوی باشد، سرعت نهایی گوی را پیدا کنید.

۹. یک توپ 325 گرمی با سرعت 62.2 m/s تحت زاویه $\theta = 33^\circ$ به دیواری برخورد می‌کند و تحت همان زاویه و با همان

۱. نگاه کنید به

"The Slingshot Effect: Explanation and Analogies," Albert A. Bartlett and Charles W. Hord, *The Physics Teacher*, November 1985, p. 466.

۲۵. در اظهار نظر دربارهٔ پایسته نبودن انرژی جنبشی در برخورد کاملاً ناکشسان، دانشجویی می‌گوید که در انفجار انرژی جنبشی پایسته نیست و برخورد کاملاً ناکشسان هم صرفاً معکوس فرایند انفجار است. آیا چنین استدلالی مفید یا معقول هست؟

۲۶. تحت چه شرایطی، اگر اصلاً شرطی لازم باشد، مجازیم بگوییم که واپاشی $A \rightarrow B + C$ صرفاً معکوس برخورد کاملاً ناکشسان $B + C \rightarrow A$ است؟

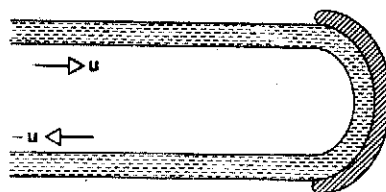
مسئله‌ها

بخش ۱-۳ پایستگی تکانه در حین برخورد

۱. در یک آزمایش استحکام سپر، اتومبیل 2300 کیلوگرمی که با سرعت 15 m/s در حرکت است با پایهٔ کناری پلی برخورد می‌کند و در مدت 54 ثانیه متوقف می‌شود. نیروی متوسط وارد بر اتومبیل در طی این برخورد چقدر بوده است؟

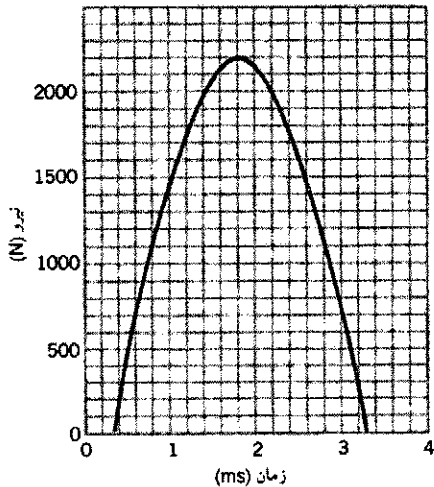
۲. توپی به جرم m با سرعت v به طور عمود با دیواری برخورد می‌کند و بی‌آنکه سرعتش کم شود از دیوار باز می‌جهد. (الف) اگر زمان برخورد برابر Δt باشد، نیروی متوسط وارد بر دیوار از توپ چقدر است؟ (ب) این نیروی متوسط را برای یک توپ لاستیکی 140 گرمی که با سرعت 7.8 m/s در حرکت است و برخورد آن با دیوار 39 ms طول می‌کشد، محاسبه کنید.

۳. جریان آبی به پرهٔ "بشقابی" توربین که ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۲۳). سرعت آب قبل و بعد از برخورد با سطح خمیدهٔ پره برابر با u است و جرم آبی که در واحد زمان با پره برخورد می‌کند مقدار ثابت μ است. چه نیرویی از آب به پره وارد می‌شود؟



شکل ۲۳. مسئله ۳

۱۳. دو قسمت یک فضاپیما با انفجار مہرہ‌های منفجرہ‌ای که آنها را متصل به ہم نگہ می‌دارد، از ہم جدا می‌شوند. جرم دو تکه جدا شدہ 1200 kg و 1800 kg است؛ ضربہ‌ای که به ہر تکه وارد می‌شود برابر با 3000 N است. سرعت نسبی دور شدن تکه‌ها چقدر است؟
 ۱۴. توپی به جرم 50 kg ضربہ‌ای می‌خورد کہ نمودار آن در شکل ۲۷ نشان داده شدہ است. سرعت توپ درست پس از لحظہ‌ای کہ نیرو صفر می‌شود، چقدر است؟



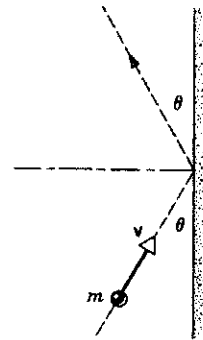
شکل ۲۷. مسألہ ۱۴

۱۵. گلولہ‌ها و سایر پرتابہ‌هایی کہ به سوپرمن شلیک می‌شوند، معمولاً از سینہ او باز می‌جہند (شکل ۲۸). فرض کنید یک "آدم بد" رگباری از گلولہ‌های 3 g گرمی را با آہنگ 100 گلولہ بر دقیقہ به سینہ سوپرمن شلیک می‌کند، و سرعت ہر گلولہ 50 m/s است. باز ہم فرض کنید



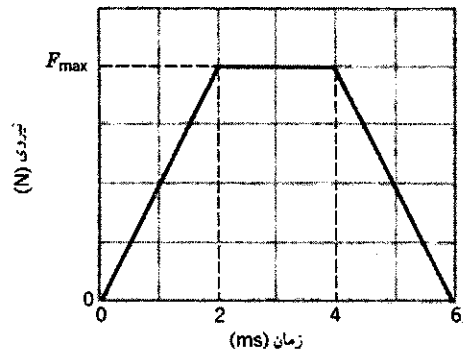
شکل ۲۸. مسألہ ۱۵

سرعت از دیوار باز می‌جہد (شکل ۲۵). توپ به مدت 104 ms با دیوار در تماس بودہ است. (الف) چہ ضربہ‌ای به توپ وارد می‌شود؟ (ب) نیروی متوسطی کہ توپ به دیوار وارد می‌کند چقدر است؟



شکل ۲۵. مسألہ ۹

۱۰. شکل ۲۶ نمودار تقریبی نیرو بر حسب زمان را برای یک توپ تنیس 58 g گرمی در طی برخورد با یک دیوار نشان می‌دہد. سرعت اولیه توپ 32 m/s و عمود بر دیوار است؛ این توپ با همان سرعت و عمود بر دیوار از آن باز می‌جہد. مقدار نیروی ماکزیموم در طی برخورد چقدر است؟



شکل ۲۶. مسألہ ۱۰

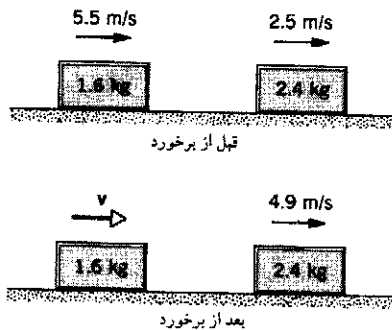
۱۱. یک کاوشگر فضایی بدون سرنشین به جرم 2500 کیلوگرم با سرعت ثابت 30 m/s در امتداد یک خط راست حرکت می‌کند. موتور موشکی کاوشگر در یک مرحلہ نیروی پیشران 3000 N برای مدت 65 ثانیه تولید می‌کند. (الف) اگر نیروی پیشران به سوی عقب، یا به سوی جلو، یا در جہت جانبی باشد، تغییر تکانہ کاوشگر (فقط مقدار) چقدر است؟ (ب) تغییر انرژی جنبشی کاوشگر در همان سہ حالت بالا چقدر است؟ فرض کنید جرم سوختی کہ به بیرون راندہ شد در مقایسہ با جرم کل کاوشگر قابل چشمپوشی است.

۱۲. نیرویی به جسمی به جرم m ضربہ J وارد می‌کند و سرعت آن را از v به u تغییر می‌دہد. حرکت جسم در همان راستای نیروست. نشان بدهید کہ کاری کہ این نیرو انجام می‌دہد برابر است با $J(u + v)$.

ناگهان آزاد می‌شود و زنجیر روی میز می‌افتد و به صورت تپه کوچکی در می‌آید (شکل ۲۹). هر حلقه زنجیر در لحظه برخورد با میز به حال سکون در می‌آید. نیروی وارد بر زنجیر از طرف میز را در هر لحظه برحسب وزن آن طولی از زنجیر که در آن لحظه روی میز قرار دارد، معین کنید.

بخش ۱۰-۴ برخورد در یک بعد

۲۱. قالیهای نشان داده شده در شکل ۳۰ بدون اصطکاک می‌لغزند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد کشسان است؟



شکل ۳۰. مسئله ۲۱ و ۲۲

۲۲. در شکل ۳۰ فرض کنید جهت سرعت اولیه قالب ۲٫۴ کیلوگرمی برعکس شود و این قالب مستقیماً به سوی قالب ۱٫۶ کیلوگرمی حرکت کند. (الف) سرعت قالب ۱٫۶ کیلوگرمی پس از برخورد چقدر است؟ (ب) آیا این برخورد یک برخورد کشسان است؟

۲۳. فیل خشمگینی با سرعت 1 m/s به پشه سمجی حمله می‌کند. با فرض کشسان بودن برخورد، پشه با چه سرعتی از فیل دور می‌شود؟ توجه داشته باشید که در این مورد پرتابه (فیل) بسیار سنگین‌تر از هدف (پشه) است.

۲۴. دو کره از جنس تیتانیوم با سرعت یکسانی به همدیگر نزدیک می‌شوند و رودررو برخورد کشسان می‌کنند. پس از برخورد، یکی از کره‌ها که جرم آن 300 g است ساکن می‌شود. جرم کره دیگر چقدر است؟

۲۵. گلوله‌ای به جرم 454 g در راستای افقی به سوی یک قالب چوبی به جرم 241 kg که روی سطحی افقی به حال سکون قرار دارد شلیک می‌شود. ضریب اصطکاک جنبشی میان قالب و سطح برابر با 0.210 است. گلوله در داخل قالب چوبی، که مسافت 1.83 m را روی سطح طی می‌کند، متوقف می‌شود. (الف) سرعت قالب چوبی درست در لحظه‌ای که گلوله در داخل آن متوقف می‌شود چقدر است؟ (ب) سرعت اولیه گلوله چقدر است؟

۲۶. لغزنده‌ای به جرم 342 g که با سرعت اولیه 1.24 m/s روی یک ریل هوای خطی بدون اصطکاک در حرکت است یا لغزنده دیگری با جرم مجهول که روی ریل ساکن است برخورد می‌کند. برخورد بین این اجسام کشسان است. پس از برخورد، جسم اول در همان جهت

که گلوله‌ها بدون از دست دادن سرعت مستقیماً به عقب باز می‌جهند. نشان بدهید که متوسط نیرویی که از این رگبار به سیئه سوپرمن وارد می‌شود فقط 50 نیوتون ($= 180\text{ z}$) است.

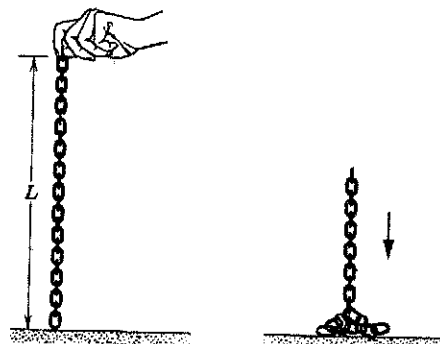
۱۶. یک قهرمان کاراته تخته‌ای به ضخامت 2.2 cm را با یک ضربه دست می‌شکند. فیلمبرداری آهسته نشان می‌دهد که دست، که جرم آن را می‌توان 540 g در نظر گرفت، با سرعت 9.5 m/s به بالای تخته برخورد می‌کند و در فاصله 2.8 cm پایین‌تر از این نقطه متوقف می‌شود. (الف) مدت زمان این ضربه (با فرض نیروی ثابت) چقدر است؟ (ب) چه نیروی متوسطی اعمال شده است؟

۱۷. یک تفنگ ساچمه‌ای در هر ثانیه 10 ساچمه 2.14 g گرمی را با سرعت 483 m/s شلیک می‌کند. ساچمه‌ها در برخورد به یک دیوار صلب متوقف می‌شوند. (الف) تکانه هر ساچمه را معین کنید. (ب) انرژی جنبشی هر ساچمه را به دست بیاورید. (ج) میانگین نیروی وارد بر دیوار از رگبار ساچمه‌ها را محاسبه کنید. (د) اگر هر ساچمه به مدت 1.25 ms با دیوار در تماس باشد، میانگین نیروی وارد بر دیوار از هر ساچمه در طی مدت تماس چقدر است؟ چرا این جواب تا این حد با جواب قسمت (ج) تفاوت دارد؟

۱۸. در یک توفان تندی، دانه‌های تگرگ به قطر یک سانتی‌متر با سرعت 25 m/s فرو می‌ریزند. تخمین زده می‌شود که در هر متر مکعب هوا 120 تگرگ موجود باشد. از بازجهش تگرگها به هنگام برخورد چشمپوشی کنید. (الف) جرم هر دانه تگرگ چقدر است؟ (ب) در طی این توفان از طرف تگرگ چه نیرویی بر یک بام مسطح به ابعاد $10\text{ m} \times 20\text{ m}$ وارد می‌شود؟ فرض کنید که هر سانتی‌متر مکعب تگرگ، مانند یخ، 920 g جرم داشته باشد.

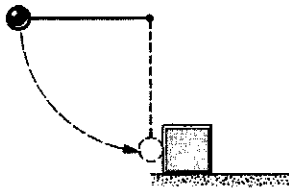
۱۹. فرض کنید پره‌های چرخان یک هلیکوپتر، ستون استوانه‌ای شکل هوای زیرشان را به سمت پایین می‌رانند. جرم کل هلیکوپتر 1820 kg و طول پره‌ها 4.88 m است. حداقل توان مورد نیاز برای اینکه هلیکوپتر در هوا بماند چقدر است؟ چگالی هوا را 1.23 kg/m^3 بگیرید.

۲۰. زنجیر یکنواخت بسیار قابل انعطافی به جرم M و طول L از یک انتها آویزان شده است. این زنجیر به طور قائم قرار گرفته است و انتهای آزاد آن درست مماس با سطح یک میز است. انتهای بالایی



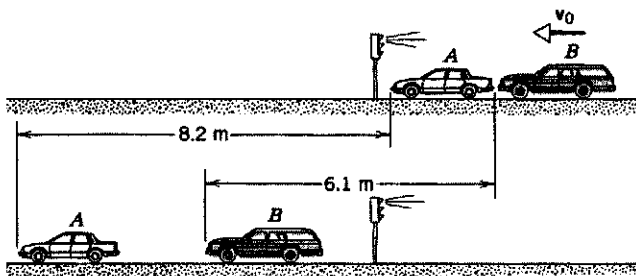
شکل ۲۹. مسئله ۲۰

۳۲. گلوله‌ای فولادی به جرم 514 kg به یک سر ریسمانی به طول 687 m سانتی‌متر آویزان شده است. ریسمان را از حالت کشیده افقی رها می‌کنیم. در پایین‌ترین قسمت مسیر، این گلوله با یک قالب فولادی به جرم 263 kg کیلوگرم که روی سطح بدون اصطکاک ساکن است برخورد می‌کند (شکل ۳۲). برخورد کشسان است. کمیت‌های زیر را تعیین کنید: (الف) سرعت گلوله درست پس از برخورد، (ب) سرعت قالب فولادی، درست پس از برخورد، (ج) اکنون فرض کنید که در ضمن برخورد، نیمی از انرژی جنبشی مکانیکی به انرژی داخلی و انرژی صوتی تبدیل شود. در این صورت سرعت‌های نهایی را به دست بیاورید.



شکل ۳۲. مسئله ۳۲

۳۳. دو اتومبیل A و B که می‌خواهند قبل از چراغ راهنما متوقف شوند روی جاده یخ‌زده می‌لغزند. جرم اتومبیل A برابر با 1100 kg کیلوگرم و جرم اتومبیل B برابر با 1400 kg کیلوگرم است. ضریب اصطکاک جنبشی بین چرخ‌های قفل‌شده هر دو اتومبیل و جاده برابر با 0.13 است. اتومبیل A موفق می‌شود که قبل از چراغ راهنما بایستد، ولی اتومبیل B نمی‌تواند متوقف شود و از پشت به اتومبیل A می‌زند. پس از برخورد، اتومبیل A در فاصله 8.2 m متر از محل برخورد، و اتومبیل B در فاصله 6.1 m متر از همان محل متوقف می‌شود (شکل ۳۳). در طی این رویداد ترمزهای هر دو اتومبیل قفل بوده است. (الف) با استفاده از مسافتهایی که اتومبیل‌ها پس از برخورد پیموده‌اند، سرعت آنها را درست پس از برخورد تعیین کنید. (ب) با استفاده از پایستگی تکانه، سرعت اولیه اتومبیل B را در لحظه برخورد با اتومبیل A به دست بیاورید. بر چه اساسی می‌توان به کاربرد پایستگی تکانه در این مورد ایراد گرفت؟

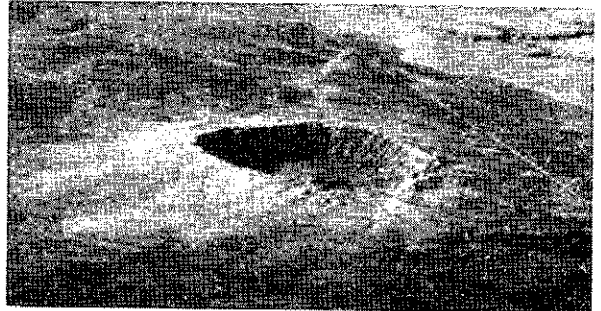


شکل ۳۳. مسئله ۳۳

۳۴. یک وزنه 29 kg تنی، از ارتفاع 65 m فوت سقوط می‌کند و یک ستون

اولیه‌اش با سرعت 636 m/s به حرکتش ادامه می‌دهد. (الف) جرم جسم دوم چقدر است؟ (ب) سرعت جسم دوم پس از برخورد چقدر است؟

۲۷. چنین تصور می‌شود که "حفره آریزونا" (شکل ۳۱) بر اثر برخورد یک شهاب‌سنگ با زمین در حدود 20000 سال قبل ایجاد شده باشد. تخمین زده می‌شود که جرم این شهاب‌سنگ $5 \times 10^{17} \text{ kg}$ و سرعت آن 72 km/s بوده است. چنین شهاب‌سنگی در یک برخورد رودرو چه سرعتی می‌تواند به زمین بدهد؟



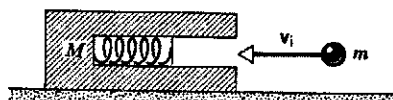
شکل ۳۱. مسئله ۲۷

۲۸. یک گلوله 518 g گرمی که با سرعت 672 m/s در حرکت است با یک قالب چوبی به جرم 715 g گرم که روی سطح بدون اصطکاک قرار دارد برخورد می‌کند. این گلوله با سرعت کاهش‌یافته 428 m/s از طرف دیگر قالب خارج می‌شود. سرعت نهایی قالب را پیدا کنید. ۲۹. جسمی به جرم 2 kg با جسم دیگری که ساکن است برخورد می‌کند و با سرعتی برابر با یک چهارم سرعت اولیه‌اش در همان راستای اولیه به حرکت ادامه می‌دهد. جرم جسم دیگر چقدر است؟

۳۰. در یک تفنگ خودکار قدیمی، سازوکار "بار کردن" در قسمت عقب لوله وقتی وارد عمل می‌شود که گلوله‌ها گنگند، که پس از شلیک گلوله عقب‌نشینی می‌کند، یک فنر را به اندازه معین d می‌فشارد. (الف) نشان دهید که برای خودکار بودن تفنگ، باید سرعت گلوله در لحظه شلیک حداقل برابر باشد با $d\sqrt{kM}/m$ که در آن k نیروی ثابت فنر و M جرم گنگدن، و m جرم گلوله است. (ب) در چه صورتی

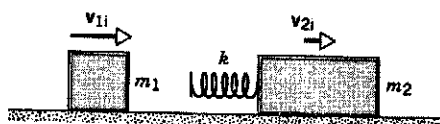
می‌توانیم (اگر اصولاً بتوانیم) این فرایند را "برخورد" تلقی کنیم؟

۳۱. سر چوبدست گلف که با سرعت 45 m/s حرکت می‌کند با توپ گلفی به جرم 46 g گرم که روی "پایه" اش قرار دارد برخورد می‌کند. جرم مؤثر قسمت سرچوبدست 220 g گرم است. (الف) توپ با چه سرعتی پایه را ترک می‌کند؟ (ب) اگر جرم قسمت سرچوبدست را دو برابر کنیم سرعت پرتاب توپ از پایه چقدر خواهد شد؟ اگر سه برابر کنیم چطور؟ در مورد استفاده از چوبدست‌های سنگین چه نتیجه‌ای می‌توانید بگیرید؟ فرض کنید برخوردها کاملاً کشسان‌اند و دیگر اینکه گلف‌باز می‌تواند چوبدست‌های سنگین را تا لحظه برخورد به همان سرعت چوبدست سبک برساند (پریش ۱۴).



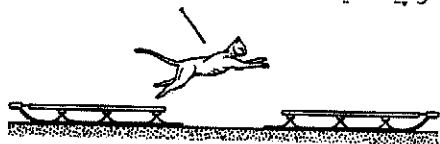
شکل ۳۴. مسئله ۴۰

۴۱. قالبی به جرم $m_1 = 1.88 \text{ kg}$ روی میز بدون اصطکاک با سرعت 1.3 m/s حرکت می‌کند. دقیقاً در جلوی این قالب، قالب دیگری به جرم $m_2 = 4.92 \text{ kg}$ در همان جهت با سرعت 3.27 m/s در حرکت است. فنر بدون جرمی با ثابت نیروی $k = 112 \text{ N/cm}$ به قسمت عقب قالب m_2 وصل شده است (شکل ۳۵). وقتی دو قالب با هم برخورد می‌کنند، حداکثر فشردگی فنر چقدر است؟ (راهنمایی: در لحظه حداکثر فشردگی فنر دو قالب به صورت جسم واحدی حرکت می‌کنند؛ با توجه به اینکه در این نقطه برخورد کاملاً ناکشسان است، سرعت را محاسبه کنید.)



شکل ۳۵. مسئله ۴۱

۴۲. دو سورتمه، که جرم هر کدام 22.7 kg است، در فاصله کمی پشت سرهم روی سطح یخزده بدون اصطکاک قرار دارند (شکل ۳۶). گره‌ای به جرم 3.63 kg که روی یکی از دو سورتمه ایستاده است روی سورتمه دیگر می‌پرد و بلافاصله با پرش دیگری به سورتمه اول بازمی‌گردد. هر دو پرش با سرعت 3.05 m/s نسبت به سورتمه‌ای که پرش از آن صورت می‌گیرد انجام می‌شود. سرعت نهایی هر یک از دو سورتمه را پیدا کنید.



شکل ۳۶. مسئله ۴۲

۴۳. الکترونی به جرم m ، رودررو، با اتم ساکنی به جرم M برخورد می‌کند. در نتیجه این برخورد مقدار معینی انرژی، E ، به صورت انرژی داخلی در اتم ذخیره می‌شود. حداقل سرعت اولیه‌ای که الکترون باید داشته باشد، v_0 ، چقدر است؟ (راهنمایی: اصول پایستگی منجر به یک معادله درجه دوم برای سرعت نهایی الکترون و یک معادله درجه دوم برای سرعت نهایی اتم می‌شود. حداقل مقدار v_0 از این شرط حاصل می‌شود که رادیکال موجود در جوابهای v و V حقیقی باشد.)

۴۴. دو کره سمت راست شکل ۳۷ کمی با هم فاصله دارند و در ابتدا

50° تنی را به اندازه 1.5 اینچ در زمین فرو می‌برد. فرض کنید برخورد وزنه‌ستون کاملاً ناکشسان است، و میانگین نیروی مقاومت زمین را تعیین کنید.

۳۵. یک واگن باری 350° تنی با یک واگن خدماتی ساکن برخورد می‌کند و به آن "وصل" می‌شود. در این برخورد 27% از انرژی جنبشی اولیه به صورت گرما، صوت، ارتعاش و مانند آن هدر می‌رود. وزن واگن خدماتی را پیدا کنید.

۳۶. سیر یک اتومبیل 122° کیلوگرمی چنان طراحی شده است که بتواند تمام انرژی را وقتی اتومبیل با سرعت 52 km/h با یک دیوار سنگی برخورد می‌کند، جذب کند. این اتومبیل هنگامی که با سرعت 75.5 km/h در حرکت است با اتومبیل جلویی به جرم 934 kg که با سرعت 62° km/h در همان جهت در حرکت است تصادف می‌کند.

در نتیجه این برخورد سرعت اتومبیل 934 kg تا 71.3 km/h افزایش می‌یابد. (الف) سرعت اتومبیل 122° کیلوگرمی بلافاصله پس از برخورد چقدر است؟ (ب) نسبت انرژی جنبشی جذب شده در برخورد بر آنچه سیر اتومبیل 122° کیلوگرمی می‌تواند جذب کند چقدر است؟

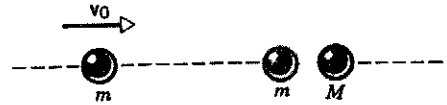
۳۷. یک واگن باری 318 تنی که با سرعت 52° ft/s در حرکت است با یک واگن باری 242 تنی که با سرعت 29° ft/s در همان جهت در حرکت است برخورد می‌کند. (الف) اگر واگنها پس از برخورد به همدیگر ملحق شوند، سرعت مجموعه پس از برخورد چقدر است و چه مقدار انرژی جنبشی در این برخورد هدر می‌رود؟ (ب) اگر برخورد واگنها کشسان می‌بود (گرچه بسیار نامحتمل است)، سرعت هر واگن پس از برخورد چقدر می‌شد؟

۳۸. یک ترازوی کفه‌ای چنان مدرج شده است که جرم اجسامی را که روی کفه‌اش قرار می‌گیرند برحسب کیلوگرم نشان بدهد. ذراتی از ارتفاع 43.5 متری پایین می‌افتند و با کفه ترازو برخورد می‌کنند. برخوردها کشسان‌اند و ذرات با همان سرعتی که به کفه می‌خورند از آن باز می‌جهند. جرم هر ذره 11° گرم و آهنگ برخوردها 42 s^{-1} است. این ترازو در حین ریزش ذرات چه جرمی را نشان می‌دهد.

۳۹. جعبه‌ای روی ترازویی قرار دارد، و ترازو چنان تنظیم شده است که وقتی جعبه خالی است رقم صفر را نشان می‌دهد. جریانی از تیلها از ارتفاع h نسبت به ته جعبه، با آهنگ R (تیله در ثانیه) به داخل آن می‌ریزد. جرم هر تیله m است. برخورد میان تیلها و جعبه کاملاً ناکشسان است. ترازو t ثانیه پس از شروع ریزش تیلها چه رقمی را نشان می‌دهد؟ برای وقتی که $R = 115 \text{ s}^{-1}$ ، $h = 9.62 \text{ m}$ ، $m = 4.60 \text{ g}$ و $t = 6.50 \text{ s}$ است جواب عددی پیدا کنید.

۴۰. گلوله‌ای به جرم m با سرعت v_1 به داخل لوله یک تفنگ فنی به جرم M که در آغاز روی سطح بدون اصطکاک ساکن است شلیک می‌شود (شکل ۳۴). گلوله در نقطه حداکثر فشردگی فنر به داخل لوله گیر می‌کند. هیچ انرژی‌ای صرف مقابله با اصطکاک نمی‌شود. (الف) سرعت تفنگ فنی، پس از آنکه گلوله در داخل لوله متوقف شد، چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه گلوله در فنر ذخیره شده است؟

هر دو ساکن اند؛ کره سمت چپ با سرعت v_0 به طرف آنها در حرکت است. فرض کنید برخوردها رودرو و کشسان باشند. (الف) نشان بدهید که اگر $M \leq m$ باشد دو برخورد روی می‌دهد و سرعت‌های نهایی را معین کنید. (ب) نشان بدهید که اگر $M > m$ باشد سه برخورد انجام می‌شود و سرعت‌های نهایی سه کره را معین کنید.



شکل ۳۷. مسئله‌های ۴۴ و ۴۵

۴۵. وضعیتی مانند مسئله قبل را در نظر بگیرید (شکل ۳۷) ولی فرض کنید که در این مورد برخوردها ممکن است همگی کشسان، همگی غیرکشسان، یا بعضی کشسان و بعضی ناکشسان باشند؛ به علاوه در این مسئله جرمها را m, m', M انتخاب می‌کنیم. نشان بدهید برای اینکه بیشترین انرژی جنبشی از m به M منتقل شود باید جرم جسم واسط برابر با $m' = \sqrt{mM}$ یعنی میانگین هندسی دو جرم مجاور باشد. (در آکوستیک هم همین رابطه بین جرمهای لایه‌های متوالی هوا در "شیپور نمایی" برقرار است.)^۱

بخش ۱۰-۵ برخوردها در دو بعد

۴۶. دو خودرو A به وزن 2720 پوند و B به وزن 3640 پوند که به ترتیب به سمت غرب و جنوب در حرکت‌اند در یک تقاطع با هم تصادف می‌کنند و درهم قفل می‌شوند. قبل از برخورد، سرعت خودرو A 38.5 mi/h و سرعت خودرو B 58 mi/h است. بلافاصله پس از برخورد، خودروهای درهم قفل شده با چه سرعتی و در کدام جهت حرکت می‌کنند؟

۴۷. اجسام A و B با هم برخورد می‌کنند. جرم جسم A برابر با 2 kg و جرم جسم B برابر با 3 kg کیلوگرم است. سرعت‌های این اجسام قبل از برخورد عبارت است از $v_{iA} = 15\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ و $v_{iB} = -10\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ بعد از برخورد سرعت جسم A به صورت $v_{fA} = -6\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$ است. تمام سرعتها برحسب متر بر ثانیه بیان شده‌اند. (الف) سرعت نهایی جسم B را پیدا کنید. (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی به سیستم افزوده یا از سیستم کاسته می‌شود؟

۴۸. ذره آلفایی با یک هسته اکسیژن که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. ذره آلفا تحت زاویه 64° بالاتر از راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود و هسته اکسیژن تحت زاویه 51° پایین‌تر از همان راستا پس می‌زند. سرعت نهایی هسته برابر با 10^8 m/s است. سرعت نهایی ذره آلفا چقدر است؟ (جرم ذره آلفا 4 u و جرم هسته اکسیژن 16 u است.)

۴۹. یک نوترون کند (که نوترون گرمایی هم نامیده می‌شود) در برخورد کشسان با یک دوتریون ساکن تحت زاویه 90° پراکنده می‌شود. نشان بدهید که این نوترون دو سوم انرژی جنبشی اولیه‌اش را به دوتریون

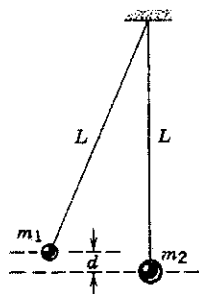
می‌دهد. (جرم نوترون 1 u و جرم دوتریون 2 u است.)
۵۰. دو جسم با جرمهای یکسان که سرعت‌های اولیه‌شان هم یکی است در یک برخورد کاملاً ناکشسان به هم می‌چسبند و با سرعت مشترکی که برابر با نصف سرعت اولیه هر یک از آنهاست حرکت می‌کنند. زاویه میان سرعت‌های اولیه دو جسم چقدر بوده است؟

۵۱. پروتونی (با جرم اتمی 1 u) با سرعت 518 m/s با پروتون ساکنی برخورد کشسان انجام می‌دهد. پروتون متحرک با زاویه 64° نسبت به راستای اولیه حرکتش پراکنده می‌شود. (الف) جهت حرکت پروتون هدف پس از برخورد کدام است؟ (ب) سرعت هر یک از پروتونها پس از برخورد چقدر است؟

۵۲. دو گوی A و B با جرمهای متفاوت و مجهول با هم برخورد می‌کنند. گوی A در آغاز ساکن است و گوی B با سرعت v حرکت می‌کند. پس از برخورد، گوی B دارای سرعت $v/2$ است و در راستای عمود بر سرعت اولیه‌اش حرکت می‌کند. (الف) تعیین کنید که گوی A پس از برخورد در چه جهتی حرکت می‌کند. (ب) آیا می‌توانید سرعت گوی A را از اطلاعات داده شده در این مسئله تعیین کنید؟ درباره پاسخ خودتان توضیح بدهید.

۵۳. در یک بازی بلیارد، به توپ "چوبخور" سرعت اولیه V داده می‌شود و این توپ با مجموعه ۱۵ توپ که مماس به یکدیگر در وسط میز قرار دارند برخورد می‌کند. همه ۱۶ توپ (یکسان) در برخوردهای متعدد توپ به توپ و توپ به دیواره میز درگیر می‌شوند. برحسب تصادف، پس از اندک زمانی معلوم می‌شود که همه توپها دارای سرعت یکسان v ‌اند. فرض کنید همه برخوردها کشسان باشند و از جنبه چرخشی حرکت توپها هم چشمپوشی کنید. سرعت v را برحسب V به دست بیاورید.

۵۴. دو آونگ هر یک به طول L در آغاز مطابق شکل ۳۸ قرار گرفته‌اند. آونگ اول از ارتفاع d رها می‌شود و با آونگ دوم برخورد می‌کند. فرض کنید برخورد کاملاً ناکشسان است و از جرم ریسمانها و هر نوع آثار اصطکاکی چشمپوشی کنید. مرکز جرم این مجموعه پس از برخورد تا چه ارتفاعی بالا می‌رود؟



شکل ۳۸. مسئله ۵۴

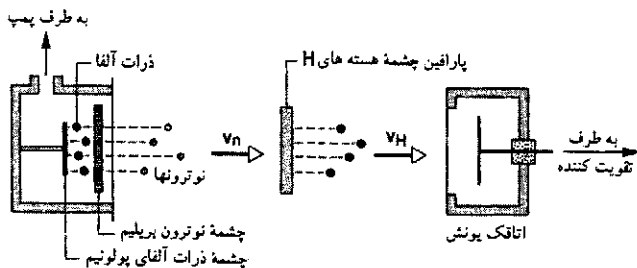
۱. نگاه کنید به

دستگاهی که طرح آن در شکل ۳۹-۵۵ است. در اتاقک تخلیه، نمونه‌ای از پلونیوم پرتوزا و امی باشد و ذرات آلفا (هسته‌های هلیوم) تولید می‌شوند. این ذرات به قالبی از بریلیم برخورد می‌کنند و فرایندی صورت می‌گیرد که حاصل آن گسیل نوترون است. (آنچه از واکنش He و Be به دست می‌آید کربن پایدار + نوترون است) از برخورد این نوترونها به لایه‌ای از پارافین (CH_2) ، به آزاد شدن هسته‌های هیدروژن می‌انجامد، که در اتاقک یونش آشکارسازی می‌شوند. به عبارت دیگر، برخورد کشسانی صورت می‌گیرد که در آن بخشی از تکانه نوترون به هسته هیدروژن منتقل می‌شود. (الف) عبارتی برای بیشترین سرعتی که هسته هیدروژن (m_H با جرم m_H) می‌تواند کسب کند، v_H ، به دست بیاورید. فرض کنید که نوترون فرودی دارای جرم m_n و سرعت v_n باشد. (راهنمایی: فکر کنید که آیا در برخورد رودرو انرژی بیشتری منتقل می‌شود یا در برخورد سایشی؟) (ب) یکی از هدفهای چادویک پیدا کردن جرم این ذره جدیدی بود که خودش کشف کرده بود. بررسی عبارت به دست آمده در قسمت (الف)، که شامل این پارامتر است، نشان می‌دهد که در آن دو مجهول وجود دارد، v_H و m_n معلوم است؛ آن را می‌شود در اتاقک یونش اندازه‌گیری کرد. برای حذف پارامتر مجهول v_n ، چادویک به جای لایه پارافین از پاراسیانوزن (CN) استفاده کرد. در این صورت، نوترونها به جای هسته هیدروژن با هسته نیتروژن برخورد‌های کشسان انجام می‌دهند. البته، عبارت به دست آمده در قسمت (الف) باز هم معتبر است، کافی است به جای v_H و m_H به ترتیب v_N و m_N بگذاریم. بنابراین اگر v_H و v_N در آزمایشهای جداگانه‌ای اندازه‌گیری شوند، می‌توانیم v_n را بین دو رابطه مربوط به هیدروژن و نیتروژن حذف کنیم تا مقداری برای m_n حاصل شود. مقادیری که چادویک به دست آورد اینها بود:

$$v_H = 3.3 \times 10^8 \text{ cm/s}$$

$$v_N = 0.47 \times 10^8 \text{ cm/s}$$

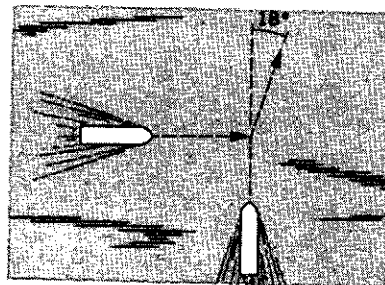
مقدار m_n (که چادویک محاسبه کرد) چقدر است؟ این مقدار را با مقدار تثبیت شده $m_n = 1.00867 \text{ u}$ مقایسه کنید. (در این مسئله فرض کنید $m_H = 1.0 \text{ u}$ و $m_N = 14 \text{ u}$ است).



شکل ۴۱. مسئله ۵۸

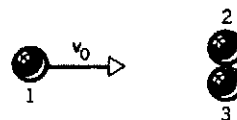
۵۹. در برخورد کشسان بین ذره m_1 و ذره m_2 که در ابتدا ساکن است، نشان بدهید که: (الف) زاویه‌ای که تحت آن ذره m_1

به جرم m_2 با سرعت v_0 برخورد می‌کند، به طرف پایین رودخانه‌ای در حرکت است که از پهلو با یدک‌کش دیگری که مستقیماً عرض رودخانه را می‌پیماید برخورد می‌کند (شکل ۳۹). جرم یدک‌کش دوم $2.78 \times 10^5 \text{ kg}$ و سرعت آن 4.3 m/s است. بلافاصله پس از برخورد، ناخدای یدک‌کش دوم در می‌یابد که مسیرش به اندازه 18° از جهت جریان رودخانه انحراف دارد و سرعتش هم به 5.1 m/s افزایش یافته است. سرعت جریان آب در زمان وقوع این حادثه عملاً صفر است. (الف) سرعت و راستای حرکت یدک‌کش اول بلافاصله پس از برخورد چقدر و کدام است؟ (ب) در این برخورد چقدر انرژی جنبشی "تلف" می‌شود؟



شکل ۳۹. مسئله ۵۵

۵۶. تویی که با سرعت اولیه 1.0 m/s در حرکت است با دو توپ مشابه تماس به یکدیگر که خط واصل مراکز آنها عمود بر سرعت اولیه خودش است برخورد کشسان می‌کند (شکل ۴۰). توپ اول مستقیماً به طرف نقطه تماس دو توپ دیگر نشانه‌رو شده است. همه توپها بدون اصطکاک‌اند. سرعت هر سه توپ را پس از برخورد معین کنید. (راهنمایی: در صورت نبود اصطکاک، هر ضربه در امتداد خط واصل مراکز توپها و عمود بر سطوح تماس است.)



شکل ۴۰. مسئله ۵۶

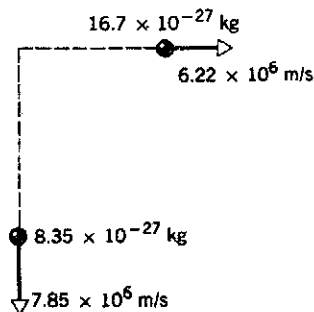
۵۷. در یک بازی بیلیارد، گوی "چوبخور" به گوی دیگری که در آغاز ساکن است برخورد می‌کند. پس از برخورد، گوی چوبخور با سرعت 3.5 m/s در امتداد خطی که با راستای سرعت اولیه‌اش زاویه 65° می‌سازد حرکت می‌کند. گوی دوم سرعتی معادل با 6.75 m/s کسب می‌کند. با استفاده از پایستگی تکانه (الف) زاویه راستای حرکت گوی دوم را با امتداد سرعت اولیه گوی چوبخور، و (ب) سرعت اولیه گوی چوبخور را، پیدا کنید.

۵۸. در سال ۱۹۳۲ جیمز چادویک، فیزیکدان انگلیسی، وجود و خواص نوترون (یکی از ذرات اساسی در ساختار اتم) را به وسیله

که در آنها m_0 جرم الکترون است. (الف) انرژی جنبشی کل محصولات واپاشی را به دست بیاورید. (ب) هر یک از محصولات واپاشی چقدر انرژی جنبشی کسب می‌کند؟

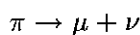
۶۴. ذره ساکنی به جرم m خودبه‌خود، به دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 وامی‌باشد که سرعتهای آنها به ترتیب v_1 و v_2 است. نشان بدهید که $m > m_1 + m_2$ است.

۶۵. هسته ساکنی خودبه‌خود به سه ذره وامی‌باشد. دو ذره از این سه ذره آشکارسازی می‌شوند؛ جرمها و سرعتهای آنها در شکل ۴۲ مشخص شده است. (الف) تکانه ذره سوم که می‌دانیم جرمی برابر با $1.17 \times 10^{-27} \text{ kg}$ دارد چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی (برحسب MeV) در این فرایند واپاشی ظاهر می‌شود؟



شکل ۴۲. مسئله ۶۵

۶۶. یک پيون ساکن به صورت زیر وامی‌باشد



μ نماینده میون (با انرژی سکون 105 MeV) و ν نماینده نوترینو (با انرژی سکون صفر) است. انرژی جنبشی اندازه‌گیری شده برای میون 410 MeV است. (الف) تکانه نوترینو را برحسب MeV/c محاسبه کنید. (ب) انرژی سکون پيون را محاسبه کنید.

پروژه کامپیوتری

۶۷. یک برنامه کامپیوتری بنویسید که برخورد کشسان بین دو ذره با جرمهای m_1 و m_2 و سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} را توصیف کند. این برنامه باید مقادیر عددی این چهار کمیت را به عنوان داده‌های ورودی بگیرد و مقادیر عددی سرعتهای نهایی v_{1f} و v_{2f} و همچنین سرعت مرکز جرم، v_{cm} را به عنوان خروجی به دست بدهد. از برنامه‌ای که می‌نویسید برای بررسی هر تعداد از حالت‌های خاصی که به فکرتان می‌رسد — مثلاً $v_{1i} = v_{2i}$, $v_{1i} \gg v_{2i}$, $m_1 \ll m_2$, $m_1 \gg m_2$, $m_1 = m_2$ و $v_{1i} = -v_{2i}$ — استفاده کنید.

ممکن است بر اثر برخورد بیشترین انحراف را پیدا کند، θ_m ، با رابطه $\cos^2 \theta_m = 1 - m_1^2/m_2^2$ بیان می‌شود، به طوری که اگر $m_1 > m_2$ باشد، $0 \leq \theta_m \leq \pi/2$ است؛ (ب) اگر $m_1 = m_2$ باشد، $\theta_1 + \theta_2 = \pi/2$ است؛ (ج) اگر $m_1 < m_2$ باشد، θ_1 می‌تواند تمام مقادیر بین 0 و π را اختیار کند.

بخش ۱۰-۶ چارچوب مرجع مرکز جرم

۶۰. (الف) نشان بدهید که، در برخورد کشسان یک‌بعدی بین دو جسم به جرمهای m_1 و m_2 که به ترتیب با سرعتهای اولیه v_{1i} و v_{2i} در حرکت‌اند، سرعت حرکت مرکز جرم برابر است با

$$v_{cm} = \left(\frac{m_1}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i}$$

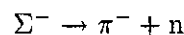
(ب) با استفاده از معادلات ۱۵ و ۱۶ نشان بدهید که v_{cm} بعد از برخورد هم همان است که قبل از برخورد بود.

۶۱. در چارچوب آزمایشگاه، جسمی به جرم 3.16 کیلوگرم با سرعت 15.6 m/s به سمت چپ در حرکت است که با جسمی به جرم 2.84 کیلوگرم که با سرعت 12.2 m/s به سمت راست در حرکت است رودررو برخورد می‌کند. مرکز جرم این سیستم دو جسمی بعد از برخورد با چه سرعتی حرکت می‌کند؟

۶۲. ذره‌ای به جرم m_1 که با سرعت v_{1i} در حرکت است با ذره دیگری به جرم m_2 که ساکن است، برخورد کاملاً ناکشسان انجام می‌دهد. (الف) انرژی جنبشی سیستم قبل از برخورد چقدر است؟ (ب) انرژی جنبشی سیستم بعد از برخورد چقدر است؟ (ج) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه هدررفته است؟ (د) فرض کنید v_{cm} سرعت حرکت مرکز جرم این سیستم باشد. برخورد را از چارچوب مرجعی که همراه مرکز جرم حرکت می‌کند (چارچوب پریم‌دار) نظاره کنید، که در آن $v'_{1i} = -v_{cm}$ و $v'_{2i} = v_{1i} - v_{cm}$ است. محاسبات قسمتهای (الف)، (ب)، و (ج) را از دید ناظر این چارچوب تکرار کنید. آیا انرژی جنبشی هدر رفته در هر دو مورد یکسان است؟ در این باره توضیح بدهید.

بخش ۱۰-۷ فرایندهای واپاشی خودبه‌خودی

۶۳. ذره‌ای که Σ^- (سیگمای منفی) نامیده می‌شود و در چارچوب مرجع معینی در حال سکون است، به طور خودبه‌خودی به صورت زیر به دو ذره دیگر وامی‌باشد



جرم این ذره‌ها عبارت است از

$$m_{\Sigma} = 2340.5 m_e$$

$$m_{\pi} = 273.2 m_e$$

$$m_n = 1838.68 m_e$$

۱۳

تکانه زاویه‌ای

در فصل ۱۲ دینامیک حرکت دورانی جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت را بررسی کردیم. دیدیم که رابطه اسکالر $\sum \tau = I\alpha$ برای حل مسائل دوران حول محور ثابت کافی است. در این فصل، بررسی مان را به وضعیتهایی که در آنها ممکن است محور دوران در یک چارچوب مرجع لخت ثابت نباشد تعمیم می‌دهیم. برای حل این نوع مسائل دینامیکی، یک رابطه برداری برای حرکت دورانی پیدا می‌کنیم که مشابه با شکل برداری قانون دوم نیوتون، $\mathbf{F} = d\mathbf{P}/dt$ ، برای حرکت ذره است. تکانه زاویه‌ای را هم معرفی می‌کنیم و اهمیت آن را، به عنوان یک خاصیت دینامیکی دوران، نشان می‌دهیم. سرانجام نشان می‌دهیم که، در سیستمهایی که هیچ گشتاور خارجی خالصی به آنها وارد نمی‌شود، قانون مهم پایستگی تکانه زاویه‌ای برقرار است.

تکانه زاویه‌ای بردار است. اندازه این بردار برابر است با

$$l = rp \sin \theta \quad (۲)$$

که θ زاویه کوچکتر بین \mathbf{p} و \mathbf{r} است؛ راستای این بردار عمود است بر صفحه‌ای که \mathbf{p} و \mathbf{r} تشکیل می‌دهند، و جهت آن طبق قاعده دست راست معین می‌شود: بردار \mathbf{r} را، از طریق زاویه کوچکتر، در جهت چهار انگشت خمیده دست راست به طرف \mathbf{p} بچرخانید؛ حالا شست کشیده دست راست شما در جهت \mathbf{l} است (موازی با محور z در شکل ۱).

اندازه بردار \mathbf{l} را می‌توانیم به صورت

$$l = (r \sin \theta)p = pr_{\perp} \quad (۳الف)$$

یا به صورت

$$l = r(p \sin \theta) = rp_{\perp} \quad (۳ب)$$

بنویسیم، که $r_{\perp} = r \sin \theta$ مؤلفه بردار \mathbf{r} در راستای عمود بر خط اثر \mathbf{p} است و $p_{\perp} = p \sin \theta$ مؤلفه \mathbf{p} در راستای عمود بر \mathbf{r} است. معادله ۳ب نشان می‌دهد که فقط مؤلفه عمود بر \mathbf{r} بردار \mathbf{p} در تکانه زاویه‌ای سهمیم است. وقتی زاویه بین \mathbf{p} و \mathbf{r} برابر 0° یا 180° باشد، مؤلفه عمودی وجود ندارد ($p_{\perp} = p \sin \theta = 0$)؛ در این صورت r_{\perp} و p_{\perp} نیز برابر صفر است. در این مورد هر

۱۳-۱ تکانه زاویه‌ای ذره

دیدیم که تکانه خطی برای مطالعه حرکت انتقالی تک‌ذره‌ها یا سیستمهایی از ذره‌ها، منجمله اجسام صلب، کمیت مفیدی است. مثلاً در برخورد با تکانه خطی پایسته است. تکانه خطی یک تک‌ذره عبارت است از $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ (معادله ۱۹، فصل ۹)، و تکانه خطی سیستمی از ذره‌ها برابر است با $\mathbf{P} = M\mathbf{v}_{cm}$ (معادله ۲۵، فصل ۹) که در آن M جرم کل سیستم و \mathbf{v}_{cm} سرعت مرکز جرم آن است. مشابه تکانه خطی در حرکت دورانی را تکانه زاویه‌ای می‌نامند، که آن را برای مورد خاص یک تک‌ذره در زیر تعریف می‌کنیم. بعداً، این تعریف را گسترش می‌دهیم تا شامل مجموعه‌های ذرات شود و نشان می‌دهیم که تکانه زاویه‌ای در مطالعه حرکت دورانی همان قدر مفهومی مفیدی است که تکانه خطی در حرکت انتقالی.

ذره‌ای به جرم m و تکانه خطی \mathbf{p} را در مکان \mathbf{r} نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت در نظر بگیرید؛ برای سادگی، دستگاه مختصات را در شکل ۱ چنان اختیار کرده‌ایم که صفحه متشکل از \mathbf{r} و \mathbf{p} همان صفحه xy باشد. تکانه زاویه‌ای \mathbf{l} ذره نسبت به مبدأ O را چنین تعریف می‌کنیم

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (۱)$$

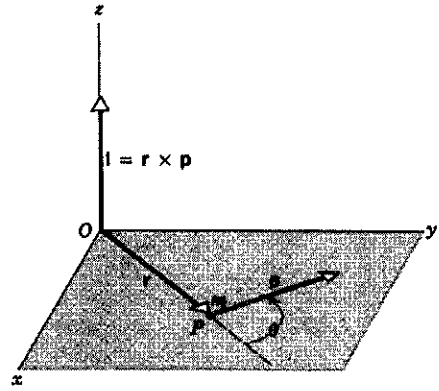
توجه کنید که برای تعریف تکانه زاویه‌ای باید مبدأ O مشخص باشد تا بتوانیم بردار مکان \mathbf{r} را تعریف کنیم.

این رابطه می‌گوید که گشتاور خالص وارد بر یک ذره برابر با آهنگ تغییر تکانه زاویه‌ای آن با زمان است. گشتاور τ و تکانه زاویه‌ای l باید نسبت به مبدأ مشترکی تعریف شده باشند. معادله ۶ مشابه دورانی $\sum \mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ (معادله ۲۰ فصل ۹) است، که بنابه این معادله، نیروی خالص وارد بر یک ذره برابر است با آهنگ زمانی تغییر تکانه خطی آن ذره.

معادله ۶ مانند هر معادله برداری دیگر، هم‌ارز سه معادله اسکالر است که عبارت‌اند از

$$\sum \tau_x = \frac{dl_x}{dt}, \quad \sum \tau_y = \frac{dl_y}{dt}, \quad \sum \tau_z = \frac{dl_z}{dt} \quad (7)$$

به این ترتیب، مؤلفه x گشتاور خارجی برآیند برابر است با آهنگ زمانی تغییر در مؤلفه x تکانه زاویه‌ای. در راستاهای y و z هم روابط مشابهی برقرار است.



شکل ۱. ذره‌ای به جرم m ، در نقطه P قرار دارد که با بردار مکان \mathbf{r} مشخص شده است. تکانه خطی این ذره $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است. (برای سادگی، هم \mathbf{r} و هم \mathbf{p} را در صفحه xy گرفته‌ایم.) نسبت به مبدأ O ، تکانه زاویه‌ای ذره $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ است که در این مورد با محور z موازی است.

یک از معادلات ۳ الف و ۳ ب نشان می‌دهند که تکانه زاویه‌ای l برابر با صفر است.

حالا برای یک ذره رابطه مهمی بین گشتاور نیرو و تکانه زاویه‌ای به دست می‌آوریم. ابتدا از معادله ۱ نسبت به زمان مشتق می‌گیریم

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) \quad (4)$$

مشتق‌گیری از یک حاصل ضرب برداری به همان صورتی انجام می‌شود که مشتق‌گیری از یک حاصل ضرب معمولی، جز آنکه در این مورد مجاز به عوض کردن ترتیب جمله‌ها نیستیم. پس از انجام مشتق‌گیری داریم

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

dr/dt همان سرعت لحظه‌ای \mathbf{v} ذره است و \mathbf{p} هم برابر با $m\mathbf{v}$ است. با نشان دادن این مقادیر در جمله اول سمت راست معادله بالا نتیجه می‌گیریم

$$\frac{dl}{dt} = (\mathbf{v} \times m\mathbf{v}) + \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (5)$$

ولی $\mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$ ، چون حاصل ضرب برداری دو بردار موازی صفر است. حالا اگر به جای $d\mathbf{p}/dt$ در جمله دوم، نیروی خالص $\sum \mathbf{F}$ وارد بر ذره را قرار بدهیم داریم

$$\frac{dl}{dt} = \mathbf{r} \times \sum \mathbf{F}$$

طرف راست معادله بالا همان گشتاور خالص وارد بر ذره است، و بنابراین می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \tau = \frac{dl}{dt} \quad (6)$$

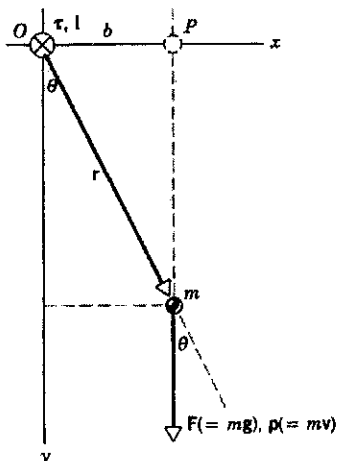
مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از حالت سکون از نقطه P در شکل ۲ رها شده است، این ذره موازی محور y (در امتداد قائم) سقوط می‌کند. (الف) گشتاور نیروی وارد بر ذره m نسبت به مبدأ O را در هر زمان t به دست بیاورید. (ب) تکانه زاویه‌ای m را نسبت به همان مبدأ در زمان t پیدا کنید. (ج) نشان بدهید که جوابهای شما در معادله ۶، $\sum \tau = dl/dt$ صدق می‌کنند.

حل: (الف) گشتاور نیرو عبارت است از $\tau = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ و اندازه آن برابر است با

$$\tau = rF \sin \theta$$

در این مثال، داریم $r \sin \theta = b$ و $F = mg$ ، بنابراین

$$\tau = mgb = \text{مقدار ثابت}$$



شکل ۲. مثال ۱. ذره‌ای به جرم m از نقطه P سقوط می‌کند. گشتاور نیروی τ و تکانه زاویه‌ای l نسبت به مبدأ O هر دو عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل اند؛ نشانه \otimes در نقطه O به همین معنی به کار رفته است.

تکانه زاویه‌ای تک‌تک ذره‌ها حول این نقطه را به صورت برداری با هم جمع کنیم. برای یک سیستم N ذره‌ای داریم

$$\mathbf{L} = \mathbf{l}_1 + \mathbf{l}_2 + \dots + \mathbf{l}_N = \sum_{n=1}^N \mathbf{l}_n$$

که در آن جمع (برداری) روی همه ذرات تشکیل دهنده سیستم انجام می‌شود.

ممکن است تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} یک سیستم حول یک نقطه مرجع ثابت (که بنا بر تعریف l در معادله ۱، آن را مبدأ یک چارچوب مرجع لخت در نظر می‌گیریم) برحسب زمان تغییر نکند. یعنی

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \frac{d\mathbf{l}_1}{dt} + \frac{d\mathbf{l}_2}{dt} + \dots = \sum_{n=1}^N \frac{d\mathbf{l}_n}{dt}$$

می‌دانیم که برای هر ذره $d\mathbf{l}_n/dt = \boldsymbol{\tau}_n$ است، و با قراردادن در معادله بالا، داریم

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum \boldsymbol{\tau}_n$$

یعنی، آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات برابر است با برابند گشتاورهای وارد بر آن سیستم.

گشتاورهای وارد بر یک سیستم را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: (۱) گشتاورهای ناشی از نیروهای داخلی بین ذرات و (۲) گشتاورهای مربوط به نیروهای خارجی. اگر قانون سوم نیوتون به صورت (به اصطلاح) قوی آن برقرار باشد، یعنی، اگر نیروهای بین هر دو ذره نه تنها برابر و در خلاف جهت همدیگر باشند بلکه در امتداد خط واصل بین دو ذره نیز عمل کنند، گشتاور داخلی کل صفر است زیرا گشتاور حاصل از هر زوج نیروی عمل-عکس العمل صفر است.

به این ترتیب چشمه اول، یعنی گشتاور حاصل از نیروهای داخلی، هیچ سهمی در تغییر \mathbf{L} ندارد. تنها چشمه دوم (گشتاور نیروی حاصل از نیروهای خارجی) باقی می‌ماند، و می‌توانیم بنویسیم

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} \quad (8)$$

که در آن عبارت $\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ از برابند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم است. معادله ۸ را می‌توان چنین بیان کرد: گشتاور خارجی خالص وارد بر یک سیستم از ذرات برابر با آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل آن سیستم است. گشتاور و تکانه زاویه‌ای، هر دو باید نسبت به مبدأ مشترکی در یک چارچوب مرجع لخت محاسبه شوند. در مواردی که امکان بروز هیچ ابهامی در کار نباشد، شاخص پایین $\boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ را حذف می‌کنیم.

معادله ۸ تعمیم معادله ۶ به مجموعه‌ای از ذرات است. این معادله، چه ذرات تشکیل دهنده سیستم نسبت به هم در حرکت باشند و چه نسبت به هم وضعیت ثابتی در فضا داشته باشند (مانند جسم صلب) در قاعده است.

توجه کنید که گشتاور نیرو حاصل ضرب نیروی mg در بازوی گشتاور b است. قاعده دست راست نشان می‌دهد که $\boldsymbol{\tau}$ عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل است.

(ب) تکانه زاویه‌ای از معادله ۱، $\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ، به دست می‌آید و اندازه آن (از معادله ۲) برابر است با

$$l = rp \sin \theta$$

در این مثال، $r \sin \theta = b$ و $p = mv = m(gt)$ است، بنابراین داریم

$$l = mgbt$$

قاعده دست راست نشان می‌دهد که بردار l عمود بر صفحه شکل و به طرف داخل صفحه است، یعنی در واقع l و $\boldsymbol{\tau}$ با هم موازی‌اند. بردار l برحسب زمان فقط از لحاظ اندازه تغییر می‌کند و جهت آن در این مورد همواره ثابت می‌ماند.

(ج) اگر معادله ۶ را برحسب اندازه بردارها بنویسیم، داریم

$$\tau = \frac{dl}{dt}$$

با قراردادن عبارتهای مربوط به τ و l از قسمتهای (الف) و (ب) نتیجه می‌شود

$$mgb = \frac{d}{dt}(mgbt) = mgb$$

که حاصل این عمل یک اتحاد است. به این ترتیب رابطه $\tau = dl/dt$ در این مورد ساده نتیجه صحیح را به دست می‌دهد. در واقع، اگر ثابت b را از طرفین دو جمله اول در رابطه بالا حذف کنیم و اگر به جای gt کمیت هم‌ارز آن یعنی v را قرار بدهیم، داریم

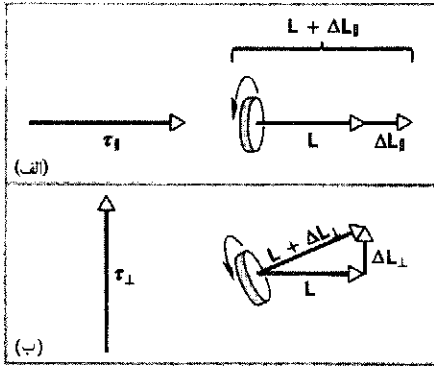
$$mg = \frac{d}{dt}(mv)$$

از آنجا که $mg = F$ و $mv = p$ است، رابطه بالا همان رابطه آشنای $F = dp/dt$ است. به این ترتیب، همان‌طور که قبلاً گفته‌ایم، روابطی مانند $\tau = dl/dt$ ، که خیلی هم مفیدند، روابط اساساً جدیدی در مکانیک کلاسیک نیستند، بلکه فرمولبندی مناسبی از همان قوانین نیوتون برای حرکت دورانی‌اند.

توجه داشته باشید که مقادیر τ و l بستگی به مبدأ مختصاتی دارند که انتخاب می‌کنیم یعنی به b وابسته است. در حالت خاص، اگر $b = 0$ باشد، $\tau = 0$ و در نتیجه $l = 0$ است.

۲-۱۳ سیستمهای ذرات

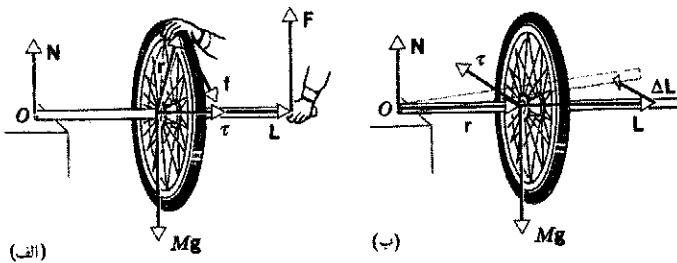
تا اینجا فقط تک‌ذره‌ها را بررسی کرده‌ایم. برای اینکه تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} یک سیستم از ذرات را حول یک نقطه معلوم محاسبه کنیم، باید -



شکل ۴. (الف) مؤلفه $\tau_{||}$ (موازی با تکانه زاویه‌ای) گشتاور نیرو، تکانه زاویه‌ای را به اندازه $\Delta L_{||}$ تغییر می‌دهد که با L موازی است. (ب) مؤلفه τ_{\perp} گشتاور نیرو (عمود بر تکانه زاویه‌ای)، تکانه زاویه‌ای را به اندازه ΔL_{\perp} تغییر می‌دهد که بر L عمود است. در این صورت محور دوران در راستای برآیند برداری $L + \Delta L_{\perp}$ قرار می‌گیرد.

یک شباهت دیگر میان پدیده‌های خطی و دورانی این است که اگر (الف) نیرو عمود بر تکانه خطی اثر کند (شکل ۳ب) یا (ب) اگر گشتاور نیرو عمود بر تکانه زاویه‌ای اثر کند (شکل ۴ب)، کاری انجام نمی‌شود. در هیچ‌یک از این دو مورد، عامل خارجی موجب تغییر انرژی جنبشی نمی‌شود، و حرکت با همان سرعت خطی یا دورانی ادامه می‌یابد.

نمونه‌ای از کاربرد معادله ۸ برای دینامیک دورانی در شکل ۵ نشان داده شده است. در شکل ۵الف یک سر محور یک چرخ چرخان روی ستونی قرار گرفته است و سر دیگر محور را دانشجویی در دست دارد. دانشجو برای اینکه چرخ تندتر بچرخد نیرویی مماس بر لبه چرخ به آن وارد می‌کند. گشتاوری که این نیرو ایجاد می‌کند موازی با تکانه زاویه‌ای چرخ است، و هر دو بردار L و τ به طرف دانشجو هستند. این گشتاور موجب افزایش تکانه زاویه‌ای چرخ می‌شود. در شکل ۵ب، دانشجو یک سر محور را رها کرده است. حالا گشتاورها را حول تنها تکیه‌گاه دیگر بررسی می‌کنیم. دو نیرو به سیستم اثر می‌کند؛ یکی نیروی

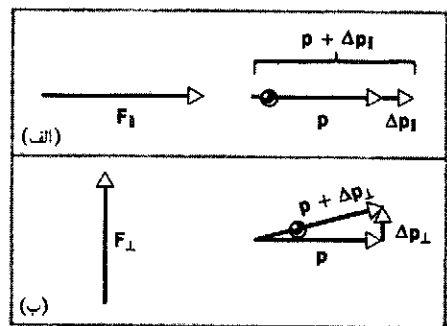


شکل ۵. (الف) نیروی مماسی F وارد بر طوق چرخ سبب ایجاد گشتاور τ (حول مرکز چرخ) در امتداد محور دوران می‌شود، و مقدار سرعت زاویه‌ای چرخ را افزایش می‌دهد ولی جهت آن را عوض نمی‌کند. (ب) اگر انتهای محور را رها کنیم، گشتاور نیروی گرانشی حول نقطه O به طرف داخل صفحه کتاب، یعنی عمود بر محور دوران است (شکل ۴ب). این گشتاور جهت محور دوران را تغییر می‌دهد و محور چرخ در صفحه افقی به طرف وضعیتی که با خط‌های نشان داده شده است حرکت می‌کند.

معادله ۸ مشابه دورانی معادله ۲۷ فصل ۹ ($\sum F_{ext} = dP/dt$) است، و می‌گوید که برای یک سیستم از ذرات (اعم از اینکه صلب باشد یا نباشد) نیروی خارجی خالص وارد بر سیستم برابر است با آهنگ زمانی تغییر در تکانه خطی کل آن سیستم.

می‌خواهیم ببینیم که بین تغییر تکانه خطی در اثر نیرو و تغییر تکانه زاویه‌ای در اثر گشتاور، چه شباهتی هست. فرض کنید نیروی F به ذره‌ای با تکانه خطی p در حرکت است وارد شود. نیروی F را می‌توانیم، مانند شکل ۳، به دو مؤلفه تجزیه کنیم: یک مؤلفه آن موازی با جهت (لحظه‌ای) p و مؤلفه دیگر (F_{\perp}) عمود بر p . در بازه زمانی کوتاه Δt ، نیروی F سبب تغییر تکانه‌ای برابر با Δp می‌شود، که مطابق با رابطه $F = \Delta p / \Delta t$ است. پس Δp موازی با F است. مؤلفه $F_{||}$ موجب تغییر تکانه $\Delta p_{||}$ موازی با p می‌شود، که این مؤلفه به p افزوده می‌شود و اندازه آن را تغییر می‌دهد ولی جهت آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳الف). از طرف دیگر، مؤلفه عمودی F_{\perp} موجب تغییر تکانه Δp_{\perp} می‌شود که جهت p را تغییر می‌دهد، ولی تا وقتی که Δp_{\perp} در مقایسه با p کوچک باشد مقدار آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۳ب). نمونه‌ای از این حرکت، حرکت ذره‌ای است که با سرعتی به اندازه ثابت روی یک دایره می‌گردد. این حرکت فقط تحت تأثیر نیروی مرکزگرایی که همواره عمود بر سرعت مماسی است انجام می‌شود.

همین تحلیل در مورد اثر گشتاور هم صادق است (شکل ۴). در این مورد $\tau = \Delta L / \Delta t$ است و ΔL باید موازی با τ باشد. τ را هم به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم؛ $\tau_{||}$ موازی با L و τ_{\perp} عمود بر L . مؤلفه موازی با L فقط اندازه تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و نه جهت آن را (شکل ۴الف). مؤلفه عمود بر L سبب تغییر ΔL_{\perp} عمود بر بردار L می‌شود، که جهت L را تغییر می‌دهد ولی مقدار آن را تغییر نمی‌دهد (شکل ۴ب). این وضعیت اخیر همان است که در حرکت فرفره و زیروسکوپ بروز می‌کند (اینها را در بخش ۱۳-۵ بررسی خواهیم کرد). از مقایسه شکل‌های ۳ و ۴ می‌توانید شباهت‌های میان دینامیک انتقالی و دینامیک دورانی را مشاهده کنید.



شکل ۶. (الف) وقتی نیرو یک مؤلفه موازی $F_{||}$ با تکانه خطی p ذره داشته باشد، تکانه خطی ذره به اندازه $\Delta p_{||}$ تغییر می‌کند که موازی با p است. (ب) وقتی نیرو یک مؤلفه عمود F_{\perp} بر تکانه خطی p ذره داشته باشد، تکانه خطی ذره به اندازه Δp_{\perp} تغییر می‌دهد که عمود بر p است. در این صورت ذره در راستای بردار $p + \Delta p_{\perp}$ حرکت می‌کند.

سرعت زاویه‌ای ω جسم به طرف بالا در امتداد (یا به‌طور معادل، موازی با) محور z است (شکل ۶ب). این جهت با رابطه برداری $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$ (معادله ۱۶ فصل ۱۱) سازگار است. بردار سرعت زاویه‌ای موازی با محور z است، و فرقی نمی‌کند که مبدأ را در کجای این محور گرفته باشیم. همچنین مقدار این بردار هم بستگی به جای مبدأ ندارد، چون این مقدار (از تعریف حاصل ضرب خارجی) با رابطه $v/(r \sin \theta) = v/r'$ بیان می‌شود.

تکانه زاویه‌ای \mathbf{l} ذره نسبت به مبدأ O چارچوب مرجع از رابطه ۱ به‌دست می‌آید، یعنی

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{p} (یعنی $m\mathbf{v}$) را در شکل ۶ب نشان داده‌ایم. بردار \mathbf{l} بر صفحه متشکل از بردارهای \mathbf{r} و \mathbf{p} عمود است و به‌همین دلیل موازی با ω نیست. توجه کنید (شکل ۶ج) که \mathbf{l} دارای یک مؤلفه (بردار) l_z ، موازی با ω دارد، ولی مؤلفه (بردار) دیگری هم دارد، l_x ، که عمودند بر ω است. این حرکت یکی از مواردی است که در آن شباهت میان حرکت خطی و دایره‌ای برقرار نیست: \mathbf{p} همواره موازی با \mathbf{v} است، ولی \mathbf{l} همیشه موازی با ω نیست. اگر مبدأ مختصات را چنان اختیار کنیم که در صفحه ذره چرخنده واقع شود، در آن صورت \mathbf{l} موازی با ω هست؛ در غیر این صورت دو بردار موازی نیستند.^۱ حالا می‌خواهیم رابطه میان l_z و ω ذره چرخان را بررسی کنیم. از شکل ۶ج، که در آن بردار \mathbf{l} را به مرکز دایره منتقل کرده‌ایم، داریم

$$l_z = l \sin \theta = r(mv) \sin \theta = r(mr'\omega) \sin \theta$$

که در آن از رابطه $v = r'\omega$ استفاده کرده‌ایم. در رابطه بالا به‌جای $r \sin \theta$ کمیت r' (شعاع دایره‌ای که ذره در آن حرکت می‌کند) را می‌نشانیم و نتیجه می‌گیریم

$$l_z = mr'^2 \omega \quad (۹)$$

که mr'^2 لختی دورانی ذره، I ، نسبت به محور z است. بنابراین

$$l_z = I\omega \quad (۱۰)$$

توجه داشته باشید که رابطه برداری $\mathbf{l} = I\omega$ (که مشابه رابطه خطی $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ است) در این مورد صحیح نیست، چون \mathbf{l} و ω هم جهت نیستند.

در چه شرایطی تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای در یک جهت قرار می‌گیرند؟ برای نشان دادن مطلب، فرض کنید ذره دیگری با همان جرم به این سیستم اضافه کنیم. این کار را، آن‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده است، با اتصال یک بازوی دیگر به محور مرکزی شکل ۶الف در همان موقعیت بازوی اول ولی در جهت مخالف انجام می‌دهیم. مؤلفه l_x ناشی از این ذره دوم مساوی و از نظر جهت مخالف مؤلفه

عمود بر سطح در نقطه تکیه‌گاه، که حول این نقطه گشتاوری ندارد و دیگری نیروی وزن چرخ که به طرف پایین در مرکز جرم وارد می‌شود. گشتاور ناشی از وزن چرخ حول O بر بردار \mathbf{l} عمود است و اثر آن تغییر جهت \mathbf{l} است (شکل ۴ب). ولی، چون جهت \mathbf{l} همان جهت محور چرخ است،^۱ اثر نیروی (رو به پایین) گرانی آن است که محور را به‌طور جانبی بچرخاند. محور چرخ (در صفحه افقی) حول نقطه تکیه‌گاه می‌چرخد. خودتان امتحان کنید! (اگر چرخ در اختیار ندارید، می‌توانید از یک ژيروسکوپ بازیچه‌ای استفاده کنید.)

معادله ۸ در صورتی درست است که \mathbf{l} و $\boldsymbol{\tau}$ نسبت به مبدأ یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری شوند. ممکن است این سؤال پیش بیاید که اگر این دو بردار را نسبت به یک نقطه اختیاری (مثلاً، یک ذره مشخص) از سیستم متحرک اندازه‌گیری کنیم، آیا باز هم این معادله برقرار هست یا نه. در حالت کلی، چنین نقطه‌ای وقتی جسم یا سیستم ذرات حرکت انتقالی انجام می‌دهد، پایین و بالا می‌شود، و وضعیت نسبی ذرات تغییر می‌کند حرکت بسیار پیچیده‌ای دارد و معادله ۸ در مورد چنین نقطه مرجعی قابل استفاده نیست. ولی اگر نقطه مرجع را مرکز جرم سیستم اختیار کنیم، با آنکه ممکن است این نقطه در چارچوب مرجع لخت مورد نظر ما شتاب داشته باشد، باز هم معادله ۸ برقرار است. (نگاه کنید به مسئله ۸) این خاصیت قابل توجه دیگری از مرکز جرم است. به‌این ترتیب می‌توانیم حرکت کلی سیستمی از ذرات را به‌حرکت انتقالی مرکز جرم (معادله ۲۷ فصل ۹) و حرکت دورانی حول مرکز جرم (معادله ۸) تجزیه کنیم.

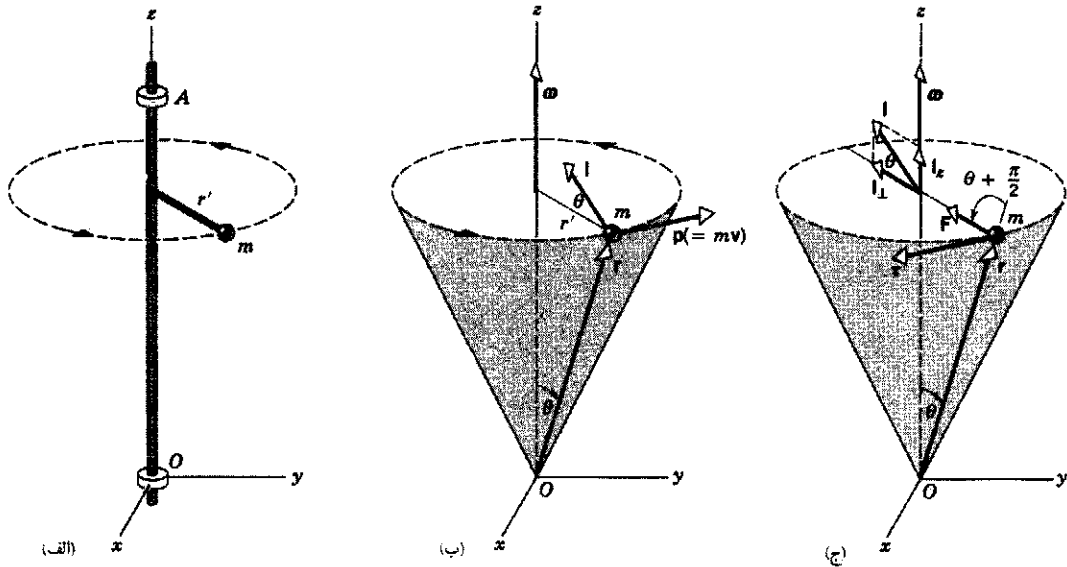
۱۳-۳ تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

برای معرفی وضعیتهایی که در آنها توجه به ماهیت برداری سرعت زاویه‌ای، گشتاور نیرو، و تکانه زاویه‌ای کاملاً ضروری است، ابتدا مثال ساده‌ای از حرکت دورانی یک ذره را در نظر می‌گیریم، که نمونه‌ای از مواردی است که در آنها سرعت زاویه‌ای و تکانه زاویه‌ای با هم موازی نیستند.

شکل ۶الف ذره‌ای به جرم m را نشان می‌دهد که توسط یک بازوی صلب بی‌جرم به طول r' ، به محور صلب بی‌جرمی متصل شده است. بازو بر محور عمود است. ذره در دایره‌ای به شعاع r' با سرعتی به مقدار ثابت v حرکت می‌کند. فرض می‌کنیم آزمایش در ناحیه‌ای انجام می‌شود که در آن گرانش ناچیز است، یعنی منظور کردن نیروی گرانی وارد بر ذره ضروری نیست. تنها نیرویی که به این ذره وارد می‌شود یک نیروی مرکزگراست. این نیرو توسط بازویی که ذره به محور متصل می‌کند اعمال می‌شود.

محور دوران توسط دو یاتاقان ایده‌آل (بدون اصطکاک) مقید به محور z است. یاتاقان پایینی را مبدأ دستگاه مختصات می‌گیریم. خواهیم دید که یاتاقان بالایی برای جلوگیری از لنگی محور دوران حول محور z ضروری است. لنگش در صورتی اتفاق می‌افتد که سرعت زاویه‌ای موازی با تکانه زاویه‌ای نباشد.

۱. این فقط در صورتی درست است که محور دوران یک محور تقارن جسم باشد.



شکل ۶. (الف) ذره‌ای به جرم m توسط بازویی به طول r' به محوری که توسط دو یاتاقان (در نقاط A و O) نگه داشته شده متصل است و می‌تواند حول محور z دوران کند (ب) ذره با سرعت مماسی v در دایره‌ای به شعاع r' حول محور z می‌چرخد (به منظور ساده کردن شکل میله‌ها و یاتاقانها را حذف کرده‌ایم). تکانه زاویه‌ای $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ را حول مبدأ O نشان داده‌ایم. (ج) برای اینکه ذره در یک دایره حرکت کند، باید نیروی مرکزگرای \mathbf{F} به جسم وارد شود. این نیرو در شکل نشان داده شده است. این نیروگشتاوری نیروی τ حول O ایجاد می‌کند. برای روشن شدن وضعیت حرکت، بردار تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} و مؤلفه‌های موازی با و عمود بر محور z آن را در مرکز دایره نشان داده‌ایم.

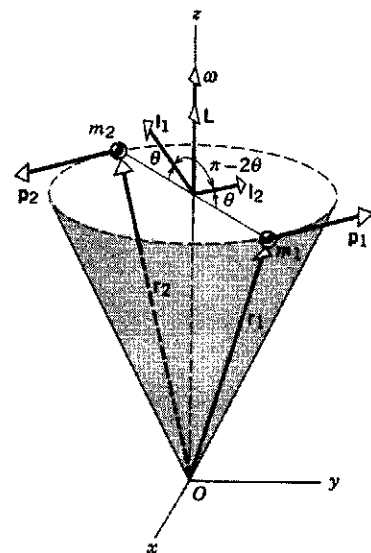
حالا می‌توانیم سیستم دو ذره‌ای را به یک جسم صلب، که از تعداد بی‌شماری ذره تشکیل شده است، تعمیم بدهیم. اگر جسم حول محور دوران متقارن باشد، یعنی به‌ازای هر ذره‌ای از جسم، یک ذره با همان جرم کاملاً در نقطه‌ی مقابل ذره اول و در همان فاصله از محور دوران قرار داشته باشد، در آن صورت جسم را می‌توان مانند مجموعه‌ای از زوج ذره‌هایی که بررسی کردیم، در نظر گرفت. دو بردار \mathbf{L} و ω چون برای همه‌ی چنین زوج‌هایی موازی هستند، در واقع برای تمام اجسام صلبی که چنین تقارنی داشته باشند نیز موازی‌اند. این نوع تقارن را تقارن محوری می‌گویند.

برای چنین اجسام صلب متقارنی \mathbf{L} و ω موازی‌اند و می‌توانیم رابطه‌ی برداری زیر را بنویسیم

$$\mathbf{L} = I\omega \quad (11)$$

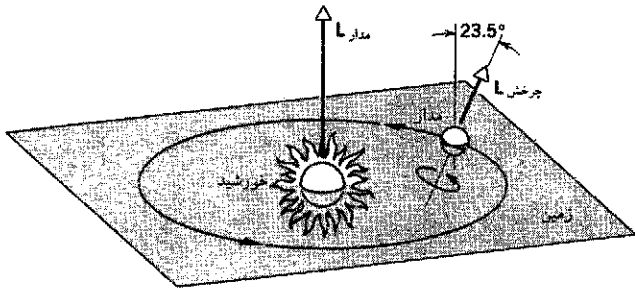
ولی، فراموش نکنید که اگر \mathbf{L} تکانه زاویه‌ای کل باشد، معادله‌ی ۱۱ فقط در مورد اجسامی صادق است که نسبت به محور دوران متقارن باشند. اگر \mathbf{L} نشان‌دهنده‌ی مؤلفه‌ی بردار تکانه زاویه‌ای حول محور دوران باشد (یعنی \mathbf{L}_z)، در آن صورت معادله‌ی ۱۱ در مورد هر جسم صلبی، اعم از متقارن یا نامتقارن، که حول محور ثابتی دوران می‌کند صادق است.

در مورد اجسام متقارن (مانند سیستم دودره‌ای شکل ۷) می‌توان



شکل ۷. دو ذره، هر یک به جرم m ، که در دو انتهای یک قطر واقع شده‌اند حول محور z دوران می‌کنند. تکانه زاویه‌ای کل دو ذره، \mathbf{L} ، در این مورد با سرعت زاویه‌ای ω موازی است.

\mathbf{L}_\perp مربوط به ذره اول است، و جمع دو بردار \mathbf{L}_\perp برابر با صفر می‌شود. ولی، دو بردار \mathbf{L}_z همسو هستند و با هم جمع می‌شوند. پس برای این سیستم دو ذره‌ای، تکانه زاویه‌ای کل \mathbf{L} موازی ω است.



شکل ۸. مثال ۲. زمین روی مداری (که دایره فرض می شود) به دور خورشید، و همچنین حول محور خودش دوران می کند. دو بردار تکانه زاویه ای با هم موازی نیستند، زیرا محور چرخش زمین یک زاویه ای، برابر با 23.5° ، با خط قائم بر صفحه مدار زمین می سازد. طول بردارها در مقیاس مشترکی رسم نشده است؛ مدار L باید با ضریبی در حدود $10^6 \times 4$ از چرخش L بزرگتر باشد.

تکانه زاویه ای مداری برابر است با

$$L_{\text{مدار}} = R_{\text{مدار}} p = R_{\text{مدار}} M v = R_{\text{مدار}} M (\omega R_{\text{مدار}}) = M R_{\text{مدار}}^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$= (5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(1.5 \times 10^{11} \text{ m})^2 \frac{2\pi}{3.16 \times 10^7 \text{ s}}$$

$$= 2.67 \times 10^{40} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

می بینیم که تکانه زاویه ای مداری بسیار بیشتر از تکانه زاویه ای چرخشی است.

بردار تکانه زاویه ای مداری عمود است بر صفحه مدار زمین (شکل ۸)، در حالی که بردار تکانه زاویه ای چرخشی با خط قائم بر صفحه مدار زاویه 23.5° می سازد. اگر از حرکت تقدیمی خیلی کندی که محور زمین دارد چشم پوشیم، در طی حرکت مداری زمین هر دو بردار هم از نظر مقدار و هم از نظر جهت ثابت می مانند.

مثال ۳. با استفاده مستقیم از معادله $\tau = dL/dt$ شتاب قالب در حال سقوط در مثال ۵ فصل ۱۲ را پیدا کنید.

حل: سیستم شکل ۹، متشکل از یک قرص به جرم M و یک قالب به جرم m ، تحت تأثیر نیروی پایین سوی گرانشی وارد بر جرمها و نیروی بالاسویی است که از یاتاقانهای محور قرص به سیستم وارد می شود. مرکز قرص را به عنوان مبدأ اختیار می کنیم. (کشش نخ یک نیروی داخلی است و از خارج روی سیستم قرص + قالب اثر نمی کند.) تنها نیروی mg از میان نیروهای خارجی گشتاوری حول مبدأ به سیستم وارد می کند، که مقدار آن برابر است با $(mg)R$.

تکانه زاویه ای سیستم حول نقطه O در هر لحظه برابر است با

$$L = I\omega + (mv)R$$

در این رابطه $I\omega$ تکانه زاویه ای قرص (مقارن) است و $(mv)R$ تکانه زاویه ای، (عند، تکانه خطی \times بازوی گشتاور) قالب افتان حول مبدأ.

موازی محور z خواهد ماند. برای تحقیق این موضوع، توجه کنید که چرخاندن یک جسم متقارن مانند یک فرفره کوچک یا یک چرخ سنباده حول محوری که بین شست و انگشت نشان یک دست نگه داشته شده، چقدر آسان است. هر بی تقارنی کوچکی در جسم، وجود یاتاقان دوم را برای حفظ محور دوران در یک راستای ثابت الزامی می کند؛ چنان که در پایان این بخش خواهیم دید، این یاتاقان باید گشتاوری به محور، که همراه با دوران جسم می لنگد، وارد کند. این لنگ زدن برای اجسامی که با سرعتهای زیاد دوران می کنند (مانند چرخانه بین توربینها) مسئله ای کاملاً جدی است. این چرخانه ها، با آنکه کاملاً متقارن طراحی می شوند، ممکن است به خاطر خطاهای کوچکی که، مثلاً در نصب پرها پیش می آید، اندکی نامتقارن از کار در بیاید. این چرخانه ها را می شود با افزودن یا حذف قطعات فلزی در مکانهای مناسب مجدداً متقارن کرد. برای این کار چرخ را در دستگاه مخصوصی می چرخانند؛ این دستگاه مقدار لنگی را اندازه می گیرد، تصحیح های لازم را محاسبه می کند و نتایج را نشان می دهد. در مورد چرخ اتومبیل هم با استفاده از همین نوع دستگاهها، وزنه های سربی در مکانهای مناسب روی لبه رینگ لاستیک نصب می شود تا لنگی در سرعتهای زیاد را کاهش بدهد. در "بالانس کردن" چرخ اتومبیل، "مکانیک" در واقع سعی می کند بردارهای تکانه زاویه ای و سرعت زاویه ای چرخ را با هم موازی کند، تا از کرنش بلبرینگ های چرخ کاسته شود.

مثال ۲. کدامیک از کمیت های زیر بزرگتر است: تکانه زاویه ای زمین در اثر چرخش زمین حول محور خودش یا تکانه زاویه ای زمین که از حرکت زمین به دور خورشید ناشی می شود؟

حل: برای مورد اول، زمین را به صورت کره یکنواختی در نظر می گیریم ($I = \frac{2}{5}MR_E^2$). سرعت زاویه ای این حرکت برابر است با $\omega = 2\pi/T$ که T دوره تناوب دوران است ($24 \text{ h} = 8.64 \times 10^4 \text{ s}$). به این ترتیب تکانه زاویه ای چرخشی برابر است با

$$L_{\text{چرخش}} = I\omega = \frac{2}{5}MR_E^2 \frac{2\pi}{T}$$

$$= \frac{2}{5}(5.98 \times 10^{24} \text{ kg})(6.37 \times 10^6 \text{ m})^2 \frac{2\pi}{8.64 \times 10^4 \text{ s}}$$

$$= 7.05 \times 10^{33} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$$

برای اینکه تکانه زاویه ای مداری را محاسبه کنیم، لازم است لختی دورانی زمین را حول محوری که از خورشید می گذرد بدانیم. به این منظور می توانیم زمین را به صورت "ذره ای" با تکانه زاویه ای $L = R_{\text{مدار}} p$ در نظر بگیریم، که $R_{\text{مدار}}$ شعاع مدار و p تکانه خطی زمین است. اینجا هم سرعت زاویه ای از $\omega = 2\pi/T$ به دست می آید، ولی در این مورد T دوره تناوب مداری است ($3.16 \times 10^7 \text{ s} = 1 \text{ year}$).

این تغییر در I_{\perp} باید از اعمال یک گشتاور حاصل شده باشد. منشأ این گشتاور کدام است؟

برای اینکه ذره‌ای در یک دایره حرکت کند، باید تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا باشد. مثلاً در شکل ۶ج، این نیرو توسط بازویی که ذره را به محور وصل می‌کند تأمین می‌شود. (در اینجا از سایر نیروهای خارجی، مانند گرانش، چشم پوشیده‌ایم.) تنها گشتاوری که حول O ایجاد می‌شود گشتاور نیروی \mathbf{F} است که از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

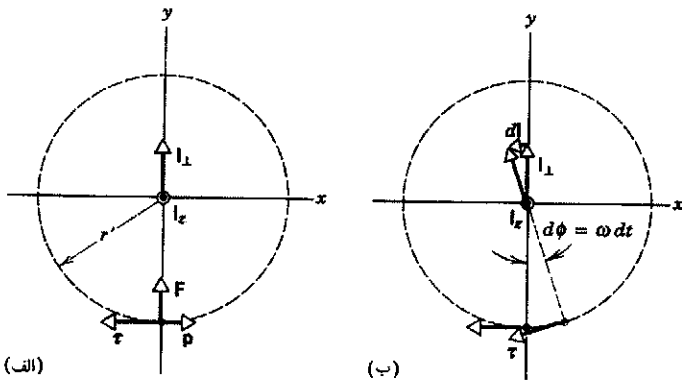
گشتاور $\boldsymbol{\tau}$ مماس بر دایره (عمود بر صفحه‌ای که از \mathbf{r} و \mathbf{F} تشکیل می‌شود) و در جهتی است که در شکل ۶ج مشخص شده است. صحت این مطلب را می‌توانید با استفاده از قاعده دست راست تحقیق کنید.

می‌خواهیم نشان بدهیم که این گشتاور در شکل دورانی قانون دوم نیوتن، $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ ، صدق می‌کند. شکل ۱۰ الف نمایی دوبعدی از ذره دوران‌کننده را نشان می‌دهد؛ داریم از راستای محور z به طرف پایین به صفحه xy نگاه می‌کنیم. وقتی ذره به اندازه زاویه کوچک $d\phi = \omega dt$ دوران می‌کند (شکل ۱۰ ب)، بردار \mathbf{l}_{\perp} به اندازه بردار کوچک $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. از شکل ۱۰ ب می‌توانیم ببینیم که $d\mathbf{l}$ همواره موازی با $\boldsymbol{\tau}$ است و بنابراین جهت بردارهای $d\mathbf{l}$ و $\boldsymbol{\tau}$ با رابطه $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ سازگار است. همچنین می‌توانیم نشان بدهیم که مقدار این بردارها هم در این رابطه صدق می‌کند. با مراجعه به شکل ۶ج می‌بینیم که گشتاور نیرو حول O برابر است با

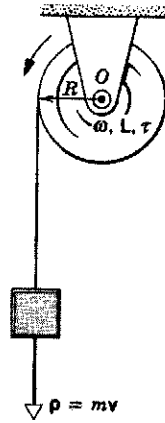
$$\tau = rF \sin\left(\frac{1}{4}\pi + \theta\right) = rF \cos \theta$$

در این مورد، \mathbf{F} نیروی مرکزگرا و مقدار آن برابر $m\omega^2 r'$ است، که در آن شعاع مسیر دایره‌ای است ($r' = r \sin \theta$). بنابراین

$$\tau = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (12)$$



شکل ۱۰. الف) نمایی دوبعدی از صفحه‌ی ذره در حال دوران شکل ۶. مؤلفه z تکانه زاویه‌ای به طرف خارج از صفحه شکل است. ب) به‌ازای دوران ذره به اندازه زاویه $d\phi$ ، مؤلفه بردار \mathbf{l}_{\perp} در صفحه به اندازه $d\mathbf{l}$ تغییر می‌کند. $\boldsymbol{\tau}$ است.



شکل ۹. مثال ۳. بردارهای سرعت زاویه‌ای، تکانه زاویه‌ای و گشتاور برآیند همگی به سوی خارج صفحه شکل اند؛ این جهت با نشانه \odot در نقطه O مشخص شده است.

این دو جزء \mathbf{l} هر دو در یک جهت عمود بر صفحه شکل ۹ و به طرف خارج واقع می‌شوند.

حالا رابطه $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ را (در شکل اسکالرش) به کار می‌گیریم

$$\begin{aligned} (mg)R &= \frac{d}{dt}(I\omega + mvR) \\ &= I \left(\frac{d\omega}{dt}\right) + mR \left(\frac{dv}{dt}\right) \\ &= I\alpha + mRa \end{aligned}$$

و چون $I = \frac{1}{2}MR^2$ و $a = \alpha R$ است، این معادله به صورت زیر درمی‌آید

$$mgR = \left(\frac{1}{2}MR^2\right) (a/R) + mRa$$

یا

$$a = \frac{2mg}{M + 2m}$$

این همان نتیجه‌ای است که در مثال ۵ فصل ۱۲ هم به دست آمد.

گشتاور وارد بر ذره‌ای که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند (اختیاری)

نتیجه شاید غیرمنتظره‌ای که در مورد حرکت ساده شکل ۶ به دست آمد، یعنی موازی نبودن \mathbf{l} و $\boldsymbol{\tau}$ ممکن است قدری غریب بنماید، ولی این نتیجه با رابطه کلی $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{l}/dt$ برای گشتاور وارد بر یک تک‌ذره سازگار است. بردار \mathbf{l} با گذشت زمان همراه با حرکت ذره تغییر می‌کند. این تغییر فقط در جهت است، نه در اندازه. وقتی ذره دوران می‌کند، هم مقدار \mathbf{l} و هم جهت آن ثابت می‌ماند، ولی

بر صفحه از آن خارج می‌شود. بنابراین بردارهای تکانه خطی دو ذره با هم برابر ولی در جهتهای مخالف‌اند و بردارهای مکان این ذرات نسبت به O نیز همین‌طور. بنابراین، با استفاده از قاعده دست راست در مورد $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ ، درمی‌یابیم که l برای هر دو ذره یکسان است و مجموع l ها، یعنی بردار تکانه زاویه‌ای کل سیستم، l ، همان‌طور که در شکل نشان داده شده است، عمود بر میله واصل دو ذره است و در صفحه شکل قرار دارد. پس l و ω در این لحظه موازی نیستند. وقتی سیستم دوران می‌کند، بردار تکانه زاویه‌ای در حالی که مقدارش ثابت می‌ماند، حول محور ثابت دوران می‌چرخد.

چرخش l حول محور ثابت شکل ۱۱ کاملاً با رابطه بنیادی $\tau = dL/dt$ همخوانی دارد. گشتاور نیروی خارجی وارد بر کل سیستم ناشی از نیروهای جانبی موازنه نشده‌ای است که از یاتاقانها به میل‌گردان وارد و از آن به میله اتصال منتقل می‌شود. در لحظه نشان داده شده در شکل، ذره بالا متمایل به حرکت به خارج یعنی به سمت راست است. میل‌گردان به سمت راست کشیده می‌شود و به یاتاقان بالایی فشرده می‌شود و در مقابل، یاتاقان بالایی هم نیروی \mathbf{F} را به میل‌گردان وارد می‌کند. این نیرو به سمت چپ است. به همین نحو ذره پایینی متمایل به حرکت به سمت خارج، یعنی به طرف چپ است. میل‌گردان در محل یاتاقان پایینی به سمت چپ فشرده می‌شود، یاتاقان پایینی هم به میل‌گردان نیروی $-\mathbf{F}$ را که به سمت راست است وارد می‌کند. گشتاور τ حول نقطه O که از این نیروها ناشی می‌شود عمود بر صفحه شکل به طرف جلوی صفحه، یعنی در واقع عمود بر صفحه متشکل از l و ω است و در همان جهتی است که حرکت چرخشی l را توجیه می‌کند. (این قسمت را با شکل ۱۰، که در آن موازی با dl ولی عمود بر l بود مقایسه کنید.) توجه داشته باشید که چون τ بر ω عمود است، کاری انجام نمی‌شود و بنابراین انرژی جنبشی سیستم چرخان تغییر نمی‌کند. اگر اصطکاک نباشد سیستم تا ابد می‌چرخد. اصطکاک در یاتاقانها سبب ایجاد گشتاوری می‌شود که در راستای میل‌گردان (موازی با ω) است؛ این گشتاور روی سیستم کار انجام می‌دهد و انرژی جنبشی آن را کم می‌کند.

نیروهای \mathbf{F} و $-\mathbf{F}$ در لحظه نشان داده شده در شکل ۱۱ در صفحه شکل قرار دارند. وقتی که سیستم می‌چرخد، این نیروها و بنابراین گشتاور τ نیز همراه با آن‌طوری می‌چرخند که τ همواره بر صفحه متشکل از ω و l عمود می‌ماند. نیروهای چرخنده \mathbf{F} و $-\mathbf{F}$ موجب لنگی در یاتاقانهای بالایی و پایینی می‌شوند. یاتاقانها و تکیه‌گاههای آنها باید استحکام کافی داشته باشند تا بتوانند این نیروها را فراهم کنند. در اجسام چرخان متقارن هیچگونه لنگی یاتاقان وجود ندارد و میل‌گردان به‌طور یکنواخت و هموار می‌چرخد.

۱۳-۴ پایستگی تکانه زاویه‌ای

در معادله ۸، دیدیم که آهنگ زمانی تغییر تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول یک نقطه ثابت در یک چارچوب مرجع لخت (یا حول مرکز جرم) برابر با گشتاور خارجی خالص وارد بر آن سیستم است،

از شکل ۱۰ ب داریم $dl = l_{\perp} d\phi = l_{\perp} \omega dt$ ، که از آن نتیجه می‌شود

$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp}$$

چون $l = mvr$ است، پس $l_{\perp} = mvr \cos \theta$ است. سرعت مماسی v عبارت است از $\omega r' \sin \theta = \omega r \sin \theta$ بنابراین داریم

$$l_{\perp} = m\omega r^2 \sin \theta \cos \theta$$

و

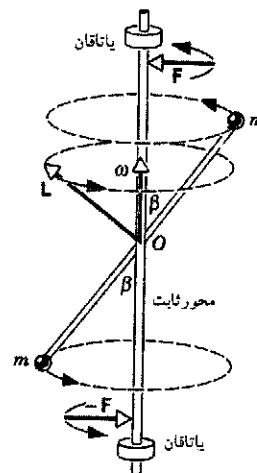
$$\frac{dl}{dt} = \omega l_{\perp} = m\omega^2 r^2 \sin \theta \cos \theta \quad (13)$$

از مقایسه معادلات ۱۲ و ۱۳، همان‌طور که انتظار می‌رود، می‌بینیم که $\tau = dl/dt$ است.

اجسام متقارن در برابر اجسام نامتقارن

وضعیت دوران برای اجسام متقارن و نامتقارن چه فرقی می‌کند؟ فرض کنید میله اتصال دو ذره سیستم متقارن شکل ۷ به اندازه دلخواه β نسبت به محور مرکزی مایل شده باشد. شکل ۱۱ میله اتصال، محور میل‌گردان، و دو یاتاقان را (که بدون اصطکاک فرض شده‌اند) نشان می‌دهد؛ یاتاقانها میل‌گردان را در راستای محور z نگه می‌دارند. میل‌گردان با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور z می‌چرخد، بنابراین بردار ω هم‌جهت با این محور است. تجربه نشان می‌دهد که این قبیل سیستمها "نامتوازن" یا "یکپری"‌اند و میله واسط دو ذره اگر در نقطه O محکم به میل‌گردان متصل نشده باشد، تمایل دارد چنان حرکت کند که زاویه β برابر 90° شود، یعنی به وضعیتی برسد که در آن سیستم حول محور تقارن می‌شود.

در لحظه‌ای که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، ذره بالایی عمود بر صفحه به طرف داخل آن حرکت می‌کند و ذره پایینی عمود



شکل ۱۱. یک سیستم دودره‌ای چرخان، مشابه شکل ۷، با این تفاوت که در اینجا محور دوران با میله اتصال زاویه β می‌سازد. بردار تکانه زاویه‌ای l همراه با سیستم می‌چرخد، و همچنین نیروهای \mathbf{F} و $-\mathbf{F}$ که از یاتاقانها وارد می‌شوند نیز می‌چرخند.

یعنی داریم

$$\sum \tau_{\text{ext}} = \frac{dL}{dt} \quad (۸)$$

اگر هیچ گشتاور خارجی بر سیستم اثر نکند، تکانه زاویه‌ای سیستم نسبت به زمان تغییر نمی‌کند

$$\frac{dL}{dt} = 0 \quad \text{یا} \quad L = \text{const.} \quad (۱۴)$$

معادله ۱۴ بیان ریاضی اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای است.

وقتی برآیند گشتاور نیروی خارجی وارد بر سیستم صفر باشد، بردار تکانه زاویه‌ای کل سیستم ثابت می‌ماند.

این سومین قانون از قوانین مهم پایستگی است که تا به حال بررسی کرده‌ایم. پایستگی تکانه زاویه‌ای هم مانند پایستگی انرژی و پایستگی تکانه خطی، نتیجه‌ای کلی است که برای طیف بسیار گسترده‌ای از سیستمها معتبر است. این قانون هم در حد نسبیتی صادق است و هم در حد کوانتومی، و تاکنون هیچ استثنایی بر آن مشاهده نشده است. مانند پایستگی تکانه خطی در سیستمی که هیچ نیروی خارجی خالصی بر آن اثر نمی‌کند، پایستگی تکانه زاویه‌ای هم در مورد تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات اعمال می‌شود که بر آن هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نمی‌کند. ممکن است تکانه زاویه‌ای هر یک از ذرات سیستم تغییر کند (درست همان‌طور که در برخورد ممکن است تکانه خطی هر یک از ذرات تغییر کند)، ولی تکانه زاویه‌ای کل ثابت می‌ماند. تکانه زاویه‌ای (مانند تکانه خطی) یک کمیت برداری است به طوری که معادله ۱۴ هم‌ارز سه معادله اسکالر (به‌ازای سه محور مختصات) است. بنابراین پایستگی تکانه زاویه‌ای سه شرط بر حرکت سیستمی که در مورد آن به‌کار می‌رود، اعمال می‌کند. اگر مؤلفه‌ای از گشتاور صفر باشد مؤلفه تکانه زاویه‌ای متناظر با آن ثابت خواهد بود؛ ممکن است مواردی پیش بیاید که در آنها فقط یکی از سه مؤلفه گشتاور صفر باشد، در این صورت فقط یکی از مؤلفه‌های تکانه زاویه‌ای ثابت خواهد بود، و مؤلفه‌های دیگر به تبعیت از گشتاورهای متناظرشان تغییر می‌کنند. برای سیستمی متشکل از یک جسم صلب که حول محوری (مثلاً محور z) که در چارچوب مرجع لختی ثابت است دوران کند داریم

$$L_z = I\omega \quad (۱۵)$$

که مؤلفه تکانه زاویه‌ای در امتداد محور دوران و I لختی دورانی سیستم حول همین محور است. ممکن است لختی دورانی جسم چرخان با تغییر وضعیت اجزای آن (از I_1 به I_2) تغییر کند. اگر هیچ گشتاور خارجی خالصی اثر نکند، L_z باید ثابت بماند؛ پس اگر I تغییر کند، برای جبران این تغییر باید سرعت زاویه‌ای (ω) جسم هم از ω_1 به ω_2 تغییر کند. در این صورت اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای به صورت زیر بیان می‌شود

$$= I_1\omega_1 = \text{const.} \quad (۱۶)$$

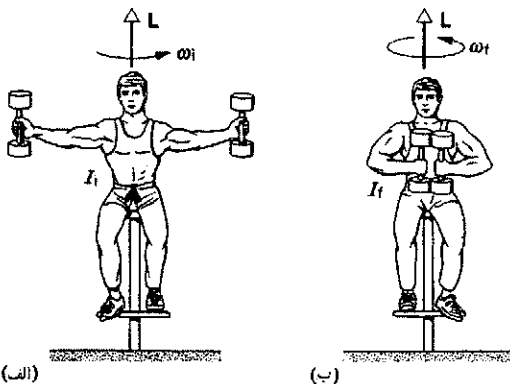
معادله ۱۶ نه تنها در مورد دوران حول یک محور ثابت برقرار است بلکه برای دوران حول محوری که از مرکز جرم سیستم می‌گذرد نیز صدق می‌کند، به شرطی که سیستم طوری حرکت کند که محور همواره موازی با خودش باقی بماند (رجوع کنید به بحثی که در آغاز بخش ۱۲-۶ داشتیم). پایستگی تکانه زاویه‌ای اصلی است که در گستره وسیعی از فرایندهای فیزیکی، از جهان زیراتمی (بخش ۱۳-۶) گرفته تا حرکت اکروباتها و شیرجه‌زنها و بالرین‌ها، تا انقباض ستاره‌هایی که سوخت آنها تمام شده است، و تا چگالش کهکشانیها عمل می‌کند. مثالهای زیر بعضی از این کاربردها را نشان می‌دهد.

اسکیت‌باز چرخنده

اسکیت‌باز چرخنده دستهایش را به بدنش نزدیک می‌کند تا تندتر بچرخد و آنها را باز و از بدنش دور می‌کند تا کندتر بچرخد؛ در واقع معادله ۱۶ را به‌کار می‌گیرد. کاربرد دیگری از این اصل در شکل ۱۲ نشان داده شده است. دانشجویی روی یک چارپایه گردون که می‌تواند آزادانه حول یک محور قائم بچرخد نشسته است. فرض کنید دانشجو که وزنه‌هایی در دست دارد، دستهایش را به طرفین باز کرده است و ما او را با سرعت زاویه‌ای ω_1 به چرخش درآورده‌ایم. بردار تکانه زاویه‌ای L او در امتداد محور قائم در صفحه شکل قرار می‌گیرد.

سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + وزنه‌ها یک سیستم منزوی است که هیچ گشتاور خارجی قائمی بر آن اثر نمی‌کند. بنابراین مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای باید پایسته بماند.

وقتی دانشجو دستهایش (و وزنه‌ها) را به طرف داخل می‌کشد و به بدنش نزدیک می‌کند، لختی دورانی سیستم او از مقدار اولیه I_1 کمتر می‌شود و به مقدار کوچکتر I_2 می‌رسد، چون در این وضعیت وزنه‌ها به محور دوران نزدیک‌ترند. بنابر معادله ۱۶، سرعت زاویه‌ای دانشجو برابر با $\omega_2 = \omega_1(I_1/I_2)$ می‌شود که از سرعت زاویه‌ای اولیه او بیشتر است (چون $I_2 < I_1$)، یعنی او تندتر می‌چرخد، و اگر بخواهد سرعتش را کم کند کافی است که دستهایش را دوباره از بدنش دور کند.



شکل ۱۲. الف) در این وضعیت، لختی دورانی سیستم (دانشجو + وزنه‌ها) بیشتر و سرعت زاویه‌ای آن کمتر است. ب) دانشجو وزنه‌ها را به طرف سینه می‌آورد و لختی دورانی را کمتر می‌کند و بنابراین سرعت زاویه‌ای اش بیشتر می‌شود. برای هر دو وضعیت یکی است.

ایا انرژی جنبشی سیستم تغییر می‌کند؟ اگر پاسخ به این پرسش مثبت است، کاری که انرژی جنبشی را تغییر می‌دهد از کجا تأمین می‌شود؟

شیرجه از روی تخته فیزی^۱

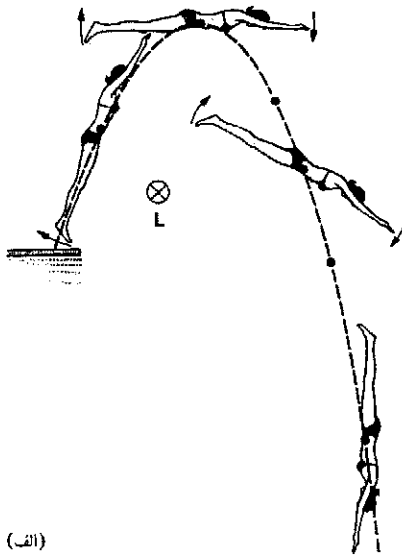
در شکل ۱۳ الف شیرجه‌زنی را در حال شیرجه می‌بینیم. او موقع پریدن از تخته خودش را طوری به جلو هل می‌دهد که سرعت دورانی کمی کسب می‌کند. این سرعت درست به اندازه‌ای است که شیرجه‌زن در طی مسیر به اندازه نیم دور بچرخد و با سر در آب فرود بیاید. زمانی که "جسم" در هواست، هیچ گشتاور خارجی‌ای بر آن اثر نمی‌کند تا تکانه زاویه‌ای را حول مرکز جرم تغییر بدهد. (تنها نیروی خارجی، گرانی، به مرکز جرم وارد می‌شود و بنابراین گشتاوری حول این نقطه ایجاد نمی‌کند. از مقاومت هوا که ممکن است گشتاور مؤثری تولید کند و تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد چشم می‌پوشیم.) وقتی شیرجه‌زن خودش را جمع می‌کند و زانوهاش را در بغل می‌گیرد، لختی دورانی‌اش کم می‌شود و بنابر معادله ۱۶ سرعت زاویه‌ای‌اش باید زیاد شود. این سرعت زاویه‌ای افزایش یافته به شیرجه‌زن امکان می‌دهد که در مدتی که در هواست $1\frac{1}{2}$ دور بزند در صورتی که قبلاً فقط نیم دور می‌چرخید (شکل ۱۳ ب). در پایان شیرجه پاها و دستها را به موقع به حالت کشیده درمی‌آورد تا سرعت زاویه‌ای‌اش کم شود و با سر به سطح آب برسد.

چرخ چرخان دوچرخه

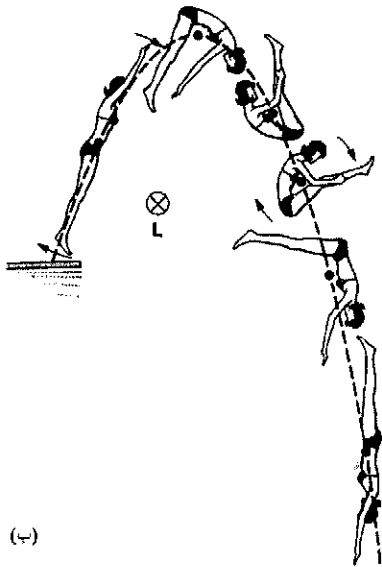
در شکل ۱۴ الف دانشجویی را می‌بینید که روی چارپایه‌ای نشسته است؛ و چارپایه می‌تواند به راحتی حول محور قائمی دوران کند. این شخص چرخ چرخانی را در دست دارد، و وقتی چرخ را وارونه می‌کند، چارپایه به دوران در می‌آید (شکل ۱۴ ب).

هیچ گشتاور قائم مؤثری به سیستم متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ وارد نمی‌شود و بنابراین مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای کل سیستم باید ثابت بماند. در آغاز، چرخ با تکانه زاویه‌ای L_1 می‌چرخد، که به سوی بالاست و تکانه زاویه‌ای کل سیستم است. وقتی دانشجو چرخ را وارونه می‌کند، مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای چرخ برابر $-L_1$ می‌شود، ولی مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای کل باید همان $+L_1$ باشد، یعنی ثابت بماند. در نتیجه دانشجو + چارپایه باید تکانه زاویه‌ای $+2L_1 = L'$ را کسب کند، تا تکانه زاویه‌ای نهایی سیستم یعنی $L_1 - 2L_1 = -L_1$ برابر تکانه زاویه‌ای آغازی باشد. اگر لختی دورانی دانشجو + چارپایه برابر با I_0 باشد، سرعت زاویه‌ای دانشجو + چارپایه برابر با $\omega_f = 2L_1/I_0$ است.

این مسئله را می‌توانیم به صورت دو سیستم مجزا هم بررسی کنیم؛ یک سیستم شامل چرخ و سیستم دیگر شامل دانشجو + چارپایه است. حالا دیگر هیچ‌یک از دو سیستم منزوی نیست؛ دست دانشجو دو سیستم را به هم مرتبط می‌کند. دانشجو وقتی می‌خواهد چرخ را وارونه کند باید گشتاوری اعمال کند تا تکانه زاویه‌ای چرخ را تغییر بدهد. او برای تولید این گشتاور نیرویی به چرخ وارد می‌کند. بنا بر قاعده سوم



(الف)



(ب)

شکل ۱۳. الف) شیرجه‌زن طوری از تخته جدا می‌شود که تخته به او تکانه زاویه‌ای L_1 می‌دهد. او حول مرکز جرمش (که با نقطه‌ای مشخص شده است) به اندازه نیم دور دوران می‌کند در حالی که مرکز جرمش مسیر سهمی را می‌پیماید. ب) با بغل کردن پاهاش، لختی دورانی خود را کاهش می‌دهد و به همین علت سرعت زاویه‌ای‌اش افزایش پیدا می‌کند و به او این امکان را می‌دهد که $1\frac{1}{2}$ دور بچرخد. نیروها و گشتاورهای خارجی وارد بر این شخص در الف) و ب) یکسان است.

نیوتون، همین نیرو را در جهت مخالف از چرخ دریافت می‌کند. این نیروی خارجی وارد بر سیستم دانشجو + چارپایه سبب می‌شود که

۱. نگاه کنید به

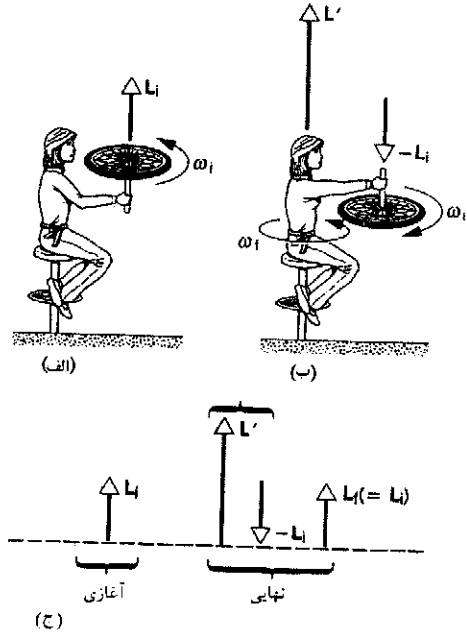
"The Mechanics of Swimming and Diving" R. L. Page, *The Physics Teacher*, February 1976, p. 72.

و نگاه کنید به

"The Physics of Somersaulting and Twisting," Cliff Frohlich, *Scientific American*, March 1980, p. 155.

می‌دهیم، در واقع سمتگیری آن را پایدار و تغییر سمتگیری را برای نیروهای خارجی دشوار می‌کنیم. در مورد این اثر مثالهای متعددی وجود دارد. اگر یک دوچرخه بدون دوچرخه‌سوار را کمی هل بدهیم می‌تواند مسافتی خیلی بیشتر از آنچه انتظار داریم، سرپا، به حرکتش ادامه بدهد. در این مورد، این تکانه زاویه‌ای چرخهای چرخان دوچرخه است که به آن پایداری می‌دهد. دست‌اندازها و خمهای کوچک جاده، که می‌توانند جسم غیرچرخانی را که روی مقطعی به باریکی لاستیک دوچرخه متوازن شده است به آسانی منحرف یا واژگون کنند، بر چرخ چرخان تأثیر کمتری دارند، زیرا تکانه زاویه‌ای تمایل به حفظ سمتگیری اش دارد.^۱ توپ راگبی (فوتبال امریکایی) با تویی به شکل بیضوی را در پاسهای بلند طوری پرتاب می‌کنند که حول محوری تقریباً موازی با سرعت انتقالی اش می‌چرخد. با این کار سمتگیری توپ پایدار می‌شود و توپ بی‌آنکه در هوا "معلق" بزند پیش می‌رود. به این ترتیب می‌شود توپ را دقیقتر پرتاب کرد و راحت تر هم گرفت. در این نوع پرتاب همچنین سطح مواجهه توپ در جهت پیشروی به حداقل می‌رسد؛ در نتیجه مقاومت هوا کم می‌شود و برد توپ افزایش پیدا می‌کند.

پایدار کردن سمتگیری ماهواره‌ها اهمیت دارد، به خصوص وقتی ماهواره برای رسیدن به موقعیت مداری مشخصی از پیش‌رانهایش استفاده می‌کند (شکل ۱۵). سمتگیری ممکن است، مثلاً به علت



شکل ۱۴. (الف) دانشجویی چرخ چرخانی را در دست نگه داشته است. تکانه زاویه‌ای کل سیستم برابر است با L_1 . (ب) وقتی چرخ وارونه می‌شود دانشجو شروع به چرخیدن می‌کند. (ج) تکانه زاویه‌ای کل باید در حالت‌های آغازی و نهایی یکی باشد.

سیستم بچرخد. از این دیدگاه، دانشجو یک گشتاور خارجی به چرخ وارد می‌کند تا تکانه زاویه‌ای آن را تغییر بدهد، در حالی که چرخ، یک گشتاور به دانشجو وارد می‌کند تا تکانه زاویه‌ای او را تغییر بدهد. اگر، همان‌طور که در ابتدا گفتیم، سیستم کامل را متشکل از دانشجو + چارپایه + چرخ در نظر بگیریم، این گشتاور یک گشتاور داخلی است که در محاسبات ما وارد نمی‌شود. اینکه گشتاور نیرو را داخلی بگیریم یا خارجی بستگی دارد به اینکه سیستم مورد نظر را چگونه تعریف می‌کنیم.

پایداری اجسام چرخان

باز هم شکل ۳ را در نظر بگیرید. جسمی که با تکانه خطی $p = Mv$ حرکت می‌کند یک پایداری سیستمی است؛ ضربه منحرّف‌کننده‌ای موجب تغییر تکانه کوچکی به اندازه Δp_{\perp} در راستای جانبی می‌شود و در نتیجه جهت حرکت به اندازه زاویه $\theta = \tan^{-1}(\Delta p_{\perp}/p)$ تغییر می‌کند. هر چه تکانه p بیشتر باشد، زاویه θ کوچکتر است. بر اثر یک نیروی منحرّف‌کننده معین، جسم هر چه تکانه‌اش بزرگتر باشد کمتر منحرّف می‌شود.

تکانه زاویه‌ای هم به صورتی کم‌وبیش مشابه برای جسم یک پایداری سیستمی فراهم می‌آورد. هر جسم چرخان دارای تکانه زاویه‌ای معین L است. هر گشتاور τ عمود بر L ، جهت بردار L را تغییر می‌دهد و سبب تغییر جهت محور دوران به اندازه زاویه $\theta = \tan^{-1}(\Delta L_{\perp}/L)$ می‌شود. در اینجا هم به‌ازای یک گشتاور معین، هر چه تکانه زاویه‌ای L بزرگتر باشد، تغییر جهت محور دوران جسم چرخان کوچکتر خواهد بود.

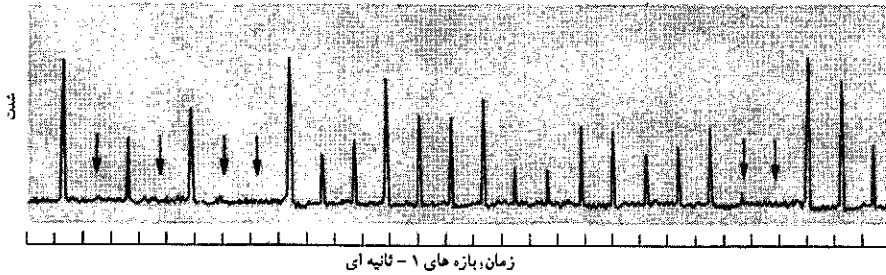
وقتی به جسمی تکانه زاویه‌ای معین



شکل ۱۵. ماهواره مورلوس-دی، یک ماهواره مخابراتی برای مکزیک، که در ۱۷ نوامبر ۱۹۸۵ به مدار پرتاب شد. ماهواره برای پایداری سمتگیری در فضا حول محور مرکزی اش (محور قائم در عکس) به چرخش درآورده شد. این پایداری در طی سفر به مدار همزمان شده با زمین ضروری است.

۱. نگاه کنید به

"The Stability of the Bicycle," David E. H. Jones, *Physics Today*, April, 1970, p. 34.



شکل ۱۶. تپهای الکترومغناطیسی که در ایستگاه در زمین از یک ستاره نوترونی چرخان سریع دریافت شده است. پیکانهای قائم نماینده تپهایی است که ضعیفتر از آن بوده‌اند که آشکارسازی شوند. فاصله تپها به طور شگفت‌انگیزی ثابت و برابر با ۱۸۷۹۱۱۶۴s است.

ستاره‌های نوترونی از زمین قابل مشاهده‌اند، چون آنها هم (مانند خورشید) میدانهای مغناطیسی‌ای دارند که الکترونها را به دام می‌اندازند و الکترونها با دوران ستاره تا سرعتهای مماسی خیلی زیاد شتاب می‌گیرند. چنین الکترونهای شتاب‌یافته‌ای تابش گسیلی می‌کنند، که از زمین مانند چراغ چشمک‌زن مشاهده می‌شود. به خاطر این تپهای تابشی تیز است که ستاره‌های نوترونی چرخان را "تپ‌اختر" می‌نامند. نمونه‌ای از نمودارهای تابش مشاهده‌شده از یک تپ‌اختر را در شکل ۱۶ آورده‌ایم.

پایستگی تکانه زاویه در مورد پدیده‌های اختر فیزیکی بسیار گوناگونی به‌کار می‌رود. مثلاً دوران کهکشان ما نتیجه دوران بسیار کندتر توده گازی است که کهکشان از آن چگالیده شده است؛ چرخش خورشید و مدار سیاره‌ها را دوران اولیه ماده‌ای که منظومه شمسی از آن پدید آمده، تعیین کرده است.

مثال ۴. یک فضاانورد ۱۲۰ کیلوگرمی، که مشغول "راه‌پیمایی فضایی" است توسط بندی به طول ۱۸۰m که کاملاً باز شده است به فضاییما متصل است. عملیات ناخواسته‌ای در قسمت پیشبرنده سبب می‌شود که فضاانورد سرعت مماسی کوچکی برابر با ۲.۵m/s کسب کند. برای بازگشت به فضاییما، فضاانورد با آهنگ ثابتی بند اتصال را آرام به طرف خودش می‌کشد. این فضاانورد در فواصل زیر با چه نیرویی باید بند اتصال را بکشد؟ (الف) ۵۰ متر و (ب) ۵ متر از فضاییما. سرعت مماسی فضاانورد در این نقاط چقدر است؟

حل: هیچ گشتاور خارجی بر فضاانورد وارد نمی‌شود، بنابراین پایستگی تکانه زاویه‌ای برقرار است. یعنی، تکانه زاویه‌ای اولیه فضاانورد نسبت به فضاییما به عنوان مبدأ $(Mv_i r_i)$ در لحظه‌ای که شروع به کشیدن بند اتصال می‌کند، باید با تکانه زاویه‌ای او در هر زمان دیگری از حرکت (Mvr) برابر باشد. به این ترتیب

$$Mvr = Mv_i r_i$$

یا

$$v = \frac{v_i r_i}{r}$$

در این مرحله نیروی مرکزگرا از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$F = \frac{Mv^2}{r} = \frac{Mv_i^2 r_i^2}{r^3}$$

اصطکاک ناشی از وجود جو رقیق در ارتفاع مدار، بادهای خورشیدی (باریکه‌ای از ذرات باردار که از خورشید می‌آیند)، یا به علت برخورد با شهابسنگهای بسیار ریز، تغییر کند. به منظور کاهش آثار چنین برخوردهایی، ماهواره را حول محوری به چرخش در می‌آورند و به این ترتیب سمگتری آن را پایدار می‌کنند.

ستاره‌های رمبند

اغلب ستاره‌ها، مثل خورشید خودمان، می‌چرخند. خورشید تقریباً هر ماه یکبار به دور خودش می‌چرخد. (خورشید یک گوی گازی است و مانند جسم صلب دوران نمی‌کند؛ دوره چرخش مناطق نزدیک به قطب آن حدوداً ۳۷ روز است، در حالی که استواش هر ۲۶ روز یکبار می‌چرخد.) فشار تابشی از رمبش خورشید جلوگیری می‌کند، در واقع فشار تابشی حاصل برخوردهای ضربه‌ای تابش گسیلی با اتمهای خورشید است. وقتی که سوخت هسته‌ای خورشید تمام شود، فشار تابشی هم از بین می‌رود و خورشید شروع به رمبیدن می‌کند، و در نتیجه رمبش چگالی آن افزایش می‌یابد. در یک مرحله چگالی خورشید خاموش آنقدر زیاد می‌شود که دیگر اتمها نمی‌توانند بیش از آن به هم نزدیک شوند و در نتیجه رمبش متوقف می‌شود.

ولی، در ستاره‌هایی که جرم آنها در حدود ۱۴ برابر جرم خورشید است، نیروی گرانشی آنقدر قوی است که اتمها نمی‌توانند از ادامه رمبش جلوگیری کنند. اتمها عملاً در اثر گرانش در هم کوبیده می‌شوند، و رمبش آنقدر ادامه می‌یابد که هسته‌ها در تماس با یکدیگر قرار بگیرند. در واقع ستاره به صورت هسته اتمی غول‌پیکری در می‌آید که به آن ستاره نوترونی می‌گویند. شعاع یک ستاره نوترونی به جرم ۱.۵ برابر جرم خورشید، برابر با ۱۱ کیلومتر است.

فرض کنید ستاره‌ای که مانند خورشید هر ماه یکبار می‌چرخد رمبش خود را آغاز کند. نیروهای دخیل در رمبش نیروهای داخلی‌اند و نمی‌توانند تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهند. بنابراین سرعت زاویه‌ای نهایی طبق معادله ۱۶ به سرعت زاویه‌ای اولیه مربوط می‌شود؛ اگر $I_i/I_f = r_i^2/r_f^2$. اگر شعاع اولیه در حدود شعاع خورشید باشد (در حدود $7 \times 10^5 \text{ km}$)، خواهیم داشت

$$I_i/I_f = r_i^2/r_f^2 = (7 \times 10^5 \text{ km})^2 / (11 \text{ km})^2 = 4 \times 10^9$$

یعنی، سرعت دورانی ستاره از یک دور در ماه به 4×10^9 دور در ماه، یا به بیش از 1000 دور در ثانیه می‌رسد.

یکسانی بچرخند. در مرحله بعدی یک صفحه مشابه دیگر روی دو صفحه قبلی می‌اندازیم، و سرانجام سه صفحه با هم می‌چرخند (شکل ۱۷ ب). (الف) سرعت زاویه‌ای کل مجموعه چقدر است؟ (ب) چه مقدار انرژی جنبشی دورانی به علت اصطکاک از دست می‌رود؟ (ج) موتوری که اولین صفحه را می‌چرخاند باید در طی یک دور چرخش، سرعت زاویه‌ای کل مجموعه را به سرعت اولیه صفحه اول برساند. موتور باید چه گشتاور ثابتی اعمال کند؟

حل: (الف) این مسئله مشابه دورانی برخورد کاملاً ناکشسان است. هیچ گشتاور خارجی قائمی در کار نیست، بنابراین مؤلفه قائم تکانه زاویه‌ای ثابت است. نیروی اصطکاک بین صفحه‌ها نیروی داخلی است، که نمی‌تواند تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد. پس می‌توانیم از معادله ۱۶ استفاده کنیم و بنویسیم

$$I_i \omega_i = I_f \omega_f$$

$$\omega_f = \omega_i (I_i / I_f)$$

بی‌آنکه نیاز به محاسبه جزئیات داشته باشیم، می‌دانیم که لختی دورانی سه صفحه گرامافون یکسان حول محور مشترکشان سه برابر لختی دورانی یکی از آنهاست. پس $I_i / I_f = 1/3$ است و

$$\omega_f = (0.84 \text{ rev/s}) (1/3) = 0.28 \text{ rev/s}$$

(ب) لختی دورانی صفحه گرامافون حول محورش برابر است با $\frac{1}{2} MR^2$ ، بنابراین برای هر یک از صفحه‌ها داریم

$$I = \frac{1}{2} (0.125 \text{ kg}) (0.072 \text{ m})^2 = 3.24 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

انرژی جنبشی دورانی اولیه برابر است با

$$\begin{aligned} K_i &= \frac{1}{2} I \omega_i^2 \\ &= \frac{1}{2} (3.24 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2) (2\pi \text{ rad/rev} \times 0.84 \text{ rev/s})^2 \\ &= 4.51 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

برای محاسبه انرژی جنبشی نهایی می‌توانیم از یک راه میان‌بر استفاده کنیم: می‌دانیم که بین حالت‌های اولیه و نهایی، لختی دورانی با ضریب ۳ افزایش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای با ضریب $1/3$ کاهش می‌یابد، و چون انرژی جنبشی به مربع سرعت زاویه‌ای بستگی دارد نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} K_f &= K_i \times 3 \times \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{3} (4.51 \times 10^{-2} \text{ J}) \\ &= 1.50 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

تغییر در انرژی جنبشی برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K &= K_f - K_i = (1.50 \times 10^{-2} \text{ J}) - (4.51 \times 10^{-2} \text{ J}) \\ &= -3.01 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

نیروی مرکزگرای اولیه مورد نیاز برابر است با

$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2}{180 \text{ m}} = 42 \text{ N} \quad (\text{در حدود } 11 \text{ lb})$$

(الف) وقتی که فضاورد در فاصله ۵۰ متری از فضاپیما قرار دارد، سرعت مماسی او برابر است با

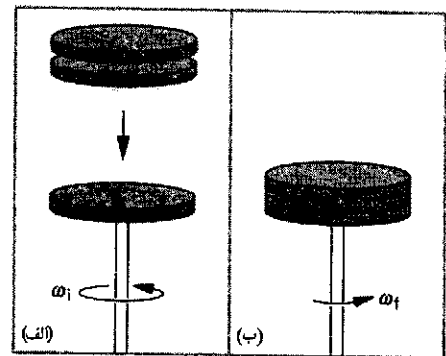
$$v = \frac{(2.5 \text{ m/s})(180 \text{ m})}{50 \text{ m}} = 9.0 \text{ m/s}$$

و در این فاصله نیروی مرکزگرا برابر است با

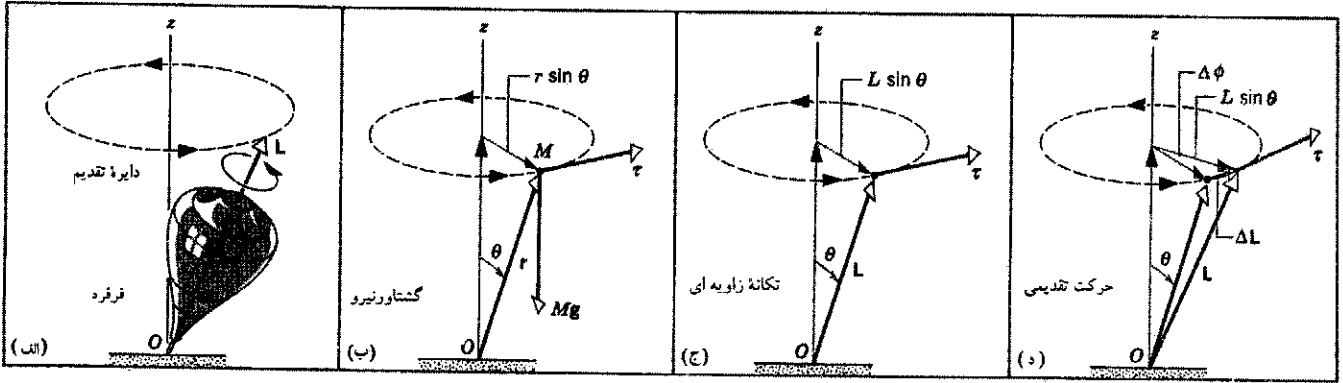
$$F = \frac{(120 \text{ kg})(2.5 \text{ m/s})^2 (180 \text{ m})^2}{(50 \text{ m})^3} = 194 \text{ N} \quad (\text{در حدود } 44 \text{ lb})$$

(ب) در فاصله ۵ متری از سفینه، سرعت فضاورد با ضریب ۱۰ افزایش پیدا می‌کند و به 90 m/s می‌رسد، در صورتی که نیرو با ضریب 10^2 افزایش پیدا می‌کند و به 10^5 N می‌رسد! واضح است که فضاورد نمی‌تواند نیرویی به این بزرگی را برای بازگشت به فضاپیما اعمال کند. حتی اگر به وسیله یک سیستم نقاله از داخل سفینه کشیده شود هم بند اتصال نمی‌تواند چنین کششی را تحمل کند؛ این بند در جایی پاره خواهد شد و فضاورد با سرعتی برابر سرعت مماسی‌اش در هنگام پاره شدن بند اتصال، به فضا پرتاب خواهد شد. نتیجه اخلاقی این داستان این است که فضاوردان راه‌پیمای باید از کسب سرعت مماسی به شدت خودداری کنند! حالا فکر کنید فضاورد برای بازگشت بی‌دردسر به سفینه چه می‌تواند بکند؟

مثال ۵. صفحه گرامافونی به جرم 125 g و به شعاع 7.2 cm با سرعت زاویه‌ای 0.84 rev/s حول یک محور قائم می‌چرخد (شکل ۱۷ الف). صفحه دقیقاً مشابه و غیرچرخانی ناگهان روی آن انداخته می‌شود. اصطکاک بین صفحه‌ها سبب می‌شود که سرانجام دو صفحه با سرعت



شکل ۱۷. مثال ۵. (الف) صفحه گرامافونی با سرعت زاویه‌ای اولیه ω_i می‌چرخد. (ب) دو صفحه کاملاً مشابه با صفحه اول را، که هیچکدام چرخ اولیه ندارند، روی صفحه اول می‌اندازیم. نهایتاً کل سیستم با سرعت زاویه‌ای ω_f می‌چرخد.



شکل ۱۸. (الف) قرقره چرخانی حول محور قائم حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. (ب) وزن قرقره گشتاوری حول نقطه تماس قرقره با زمین تولید می‌کند. (ج) این گشتاور بر بردار تکانه زاویه‌ای عمود است. (د) گشتاور نیرو جهت بردار تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد و موجب حرکت تقدیمی می‌شود.

شکل ۱۸ ب نمودار ساده شده‌ای است که در آن به جای قرقره ذره‌ای به جرم M گذاشته‌ایم. این ذره در مکان مرکز جرم قرقره واقع شده است. نیروی گرانشی Mg گشتاوری به مقدار

$$\tau = Mgr \sin \theta \quad (۱۷)$$

حول نقطه O اعمال می‌کند. این گشتاور، که عمود بر محور قرقره و در نتیجه عمود بر L است (شکل ۱۸ ج)، می‌تواند جهت L را تغییر بدهد ولی نمی‌تواند مقدار آن را تغییر بدهد. تغییر تکانه زاویه‌ای L در مدت زمان Δt از رابطه زیر به دست می‌آید

$$\Delta L = \tau \Delta t \quad (۱۸)$$

و در همان جهت τ ، یعنی عمود بر L است. بنابراین اثر τ این است که L را به $L + \Delta L$ ، که برداری است با همان طول L ولی در جهتی متفاوت، تغییر می‌دهد. (فرض می‌کنیم قرقره چنان تند می‌چرخد که L بزرگ و بنابراین $\Delta L \ll L$ است.)

اگر قرقره تقارن محوری داشته باشد، تکانه زاویه‌ای در امتداد محور دوران قرقره خواهد بود. همراه با تغییر جهت L محور دوران هم تغییر جهت می‌دهد. نوک بردار L و محور قرقره بر دایره‌ای حول محور z حرکت می‌کنند (شکل ۱۸ الف). این حرکت همان حرکت تقدیمی قرقره است.^۱

در یک بازه زمانی Δt ، محور به اندازه زاویه $\Delta \phi$ می‌چرخد (شکل ۱۸ د)، و بنابراین سرعت زاویه‌ای حرکت تقدیمی، ω_p ، برابر است با

$$\omega_p = \frac{\Delta \phi}{\Delta t} \quad (۱۹)$$

از شکل ۱۸ د، می‌بینیم که

$$\Delta \phi = \frac{\Delta L}{L \sin \theta} = \frac{\tau \Delta t}{L \sin \theta} \quad (۲۰)$$

۱. نگاه کنید به

"The Amateur Scientist: The Physics of Spinning Tops, Including Some Far-Out Ones," Jearl Walker, *Scientific American*, March 1981, p. 185.

علامت منفی حاکی از اتلاف انرژی جنبشی است.

(ج) برای ثابت نگه داشتن سرعت زاویه‌ای اولیه، موتور باید سرعت ω را از 28 rev/s به 82 rev/s برساند، یعنی آن را با ضریب ۳ افزایش بدهد. این افزایش سرعت به این معنی است که انرژی جنبشی باید با ضریب ۹ $= 3^2$ افزایش پیدا کند، یعنی باید از $1.50 \times 10^{-2} \text{ J}$ به $13.5 \times 10^{-2} \text{ J}$ برسد. تغییر انرژی جنبشی، که همان کار انجام شده توسط موتور است، برابر است با

$$\begin{aligned} \Delta K &= 13.5 \times 10^{-2} \text{ J} - 1.50 \times 10^{-2} \text{ J} \\ &= 12.0 \times 10^{-2} \text{ J} \end{aligned}$$

در حرکت دورانی، کار از رابطه $W = \tau \phi$ به دست می‌آید، که در آن ϕ (در این مورد 2π رادیان) جابه‌جایی زاویه‌ای جسم چرخنده است که در طی آن گشتاور باید اثر کند. به این ترتیب

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{W}{\phi} = \frac{\Delta K}{\phi} = \frac{12.0 \times 10^{-2} \text{ J}}{2\pi \text{ rad}} \\ &= 1.91 \times 10^{-2} \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

۱۳-۵ فرقره چرخان^۱

قرقره، شاید آشناترین نمونه از پدیده نشان داده شده در شکل ۴ باشد، که در آن گشتاور جانبی، جهت تکانه زاویه‌ای را تغییر می‌دهد ولی اندازه آن را تغییر نمی‌دهد. شکل ۱۸ الف قرقره‌ای را نشان می‌دهد که حول محورش می‌چرخد. فرض می‌کنیم که نوک قرقره در نقطه O ، مبدأ چارچوب مختصات لخت، ثابت باشد. از تجربه می‌دانیم که محور این فرقره چرخان به آرامی حول محور قائم دوران می‌کند. این حرکت، که حرکت تقدیمی نامیده می‌شود، ناشی از همان ساختاری است که در شکل ۴ نشان داده شده است، در این مورد، نیروی گرانی است که گشتاور خارجی را فراهم می‌کند.

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L \sin \theta} = \frac{Mgr \sin \theta}{L \sin \theta} = \frac{Mgr}{L} \quad (21)$$

سرعت حرکت تقدیمی با تکانه زاویه‌ای نسبت عکس دارد، هر قدر فرفره تندتر بچرخد، حرکت تقدیمی کندتر است.

حرکت تقدیمی حول محور z انجام می‌شود و بنابراین بردار ω_p باید در راستای محور z باشد. می‌توانیم نشان بدهیم که معادله برداری زیر رابطه میان مقادیر و جهت‌های متغیرهای دینامیکی دخیل در این محاسبات را به درستی به دست می‌دهد

$$\tau = \omega_p \times \mathbf{L} \quad (22)$$

آیا می‌توانید معادله برداری مشابهی برای مورد متناظر ذره‌ای که تحت تأثیر یک نیروی مرکزگرا با اندازه سرعت ثابت روی یک دایره حرکت می‌کند بنویسید؟

۱۳-۶ کوانتش تکانه زاویه‌ای (اختیاری)

در بخش ۸-۸ درباره کوانتیدگی انرژی صحبت کردیم. کوانتیدگی انرژی، گسیل و جذب انرژی را به بسته‌های گسسته یا کوانتومها محدود می‌کند. در دنیای میکروسکوپی به سیستمهای اتمی و زیراتمی، نمی‌توانیم انرژی را به هر مقدار دلخواهی تغییر بدهیم، فقط می‌توانیم آن را به اندازه مقادیر مشخص و از پیش تعیین شده‌ای تغییر بدهیم.

تکانه زاویه‌ای هم، مثل انرژی، کوانتیده است. این مفهوم را به‌طور مشروح‌تر در فصل ۵۱ نسخه مبسوط این کتاب که به ساختار اتم اختصاص دارد، همراه با ذکر شواهد تجربی و نظری بررسی خواهیم کرد. در اینجا فقط بعضی نظریات کلی را مطرح می‌کنیم و ارتباط آنها را با خواص وابسته به تکانه زاویه‌ای که در این فصل مطالعه شد، نشان می‌دهیم.

تغییرات کوانتیده در حرکت دورانی یک سیستم به صورت مضربهای صحیحی از یک ثابت عمومی صورت می‌گیرند.

$$\Delta L = n(h/2\pi) \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (23)$$

در اینجا h ثابت پلانک است که مقدار آن برابر است با $6.63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$. این یکای پایه معرف مقدار بسیار کوچکی تکانه زاویه‌ای است. تکانه زاویه‌ای صفحه گرامافون، که نسبتاً کند می‌چرخد، از مرتبه 10^{22} برابر یکای $h/2\pi$ است. وقتی دکمه تنظیم دقیق سرعت چرخش گرامافون را دستکاری می‌کنیم، مسلماً نمی‌توانیم مواظب این جهشهای گسسته در مقیاس یک قسمت در 10^{22} باشیم!

معادله ۲۳ برای کوانتش تکانه زاویه‌ای، در مورد حرکت الکترونیهای اتم در مدارهایشان به دور هسته به کار می‌رود. این سیستم دارای تکانه زاویه‌ای مداری است، که باید در حین گردش ثابت بماند، زیرا نیروی بین الکترون و هسته نیروی داخلی سیستم است. بنابراین تکانه زاویه‌ای مداری $(\mathbf{s} + \mathbf{L})$ -

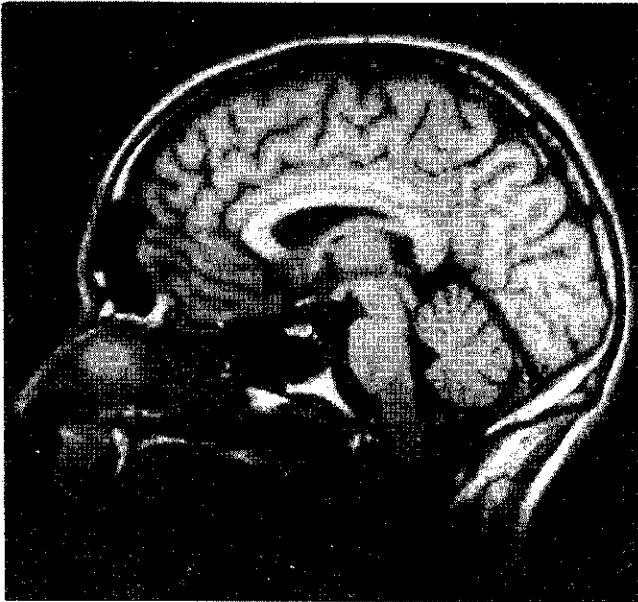
تکانه زاویه‌ای را تغییر بدهد. نیروهای خارجی، مانند نیروهای ناشی از میدانهای الکتریکی یا مغناطیسی، می‌توانند سبب جهش الکترون به مدار دیگری بشوند، که در آنها ممکن است تکانه زاویه‌ای شان مقدار دیگری داشته باشد، ولی تغییر در L ، همان‌طور که معادله ۲۳ ایجاب می‌کند، در هر حال باید مضرب صحیحی از $h/2\pi$ باشد. به این ترتیب تکانه زاویه‌ای مداری می‌تواند "برحسب" مناسب و مفیدی برای مدارهای الکترونی در اتمها باشد.

آزمایشهای انجام شده در دهه ۱۹۲۰ حاکی از آن بودند که الکترونها نوع دیگری از تکانه زاویه‌ای هم دارند که نمی‌توان آن را به حرکت مداری نسبت داد. این نوع تکانه زاویه‌ای، که تکانه زاویه‌ای ذاتی نامیده می‌شود، یک خاصیت مشخصه خود جسم است و ربطی به حالت حرکتی خاصی ندارد. یک راه مفید (ولی مطلقاً نادرست) برای تجسم تکانه زاویه‌ای ذاتی آن است که فرض کنیم جسم حول محورش می‌چرخد؛ به همین دلیل است که اغلب تکانه زاویه‌ای ذاتی را "اسپین" [چرخش] می‌نامند و آن را با نماد s نشان می‌دهند.

تکانه زاویه‌ای ذاتی الکترون $\frac{1}{2}(h/2\pi)$ است. این عبارت به این معنی است که، نسبت به هر محور z ی که اختیار کنیم، مؤلفه z تکانه زاویه‌ای باید $\frac{1}{2}(h/2\pi)$ یا $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$ یا $s_z = -\frac{1}{2}(h/2\pi)$ باشد. توجه کنید که اختلاف بین این دو حالت، که می‌توان آن را در حکم تغییر در جهت تکانه زاویه‌ای ذاتی الکترون دانست، برابر با $h/2\pi$ است که با معادله ۲۳ هم سازگار است.

معمولاً تکانه زاویه‌ای ذاتی را با عدد کوانتومی اسپین بیان می‌کنند، که عبارت است از تکانه زاویه‌ای ذاتی برحسب یکای $h/2\pi$ ؛ به این ترتیب عدد کوانتومی اسپین الکترون برابر با $1/2$ است. عدد کوانتومی اسپین پروتون و نوترون هم $1/2$ است. عدد کوانتومی اسپین فوتون (بسته کوانتیده تابش الکترومغناطیسی) برابر با 1 است. عدد کوانتومی اسپین جزو ویژگیهای تمام ذرات بنیادی است، و آن هم مثل جرم و بار الکتریکی، از خواص بنیادی ذره محسوب می‌شود.

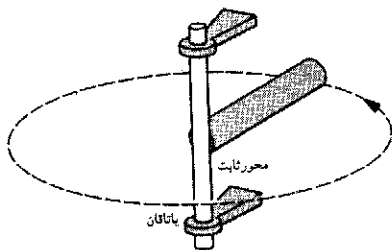
یکی از کاربردهای مهم اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای کوانتیده، در انرژی به نام تشدید مغناطیسی هسته‌ای مشاهده می‌شود. پروتون (هسته اتم هیدروژن) را که اسپین آن $1/2$ است در نظر بگیرید. در شکل ۱۹ الف تکانه زاویه‌ای ذاتی پروتون در سمتگیری مشخصی نشان داده شده است. مؤلفه z تکانه زاویه‌ای برابر است با $s_z = +\frac{1}{2}(h/2\pi)$. اگر پروتون را در معرض تابشی با انرژی مناسب قرار بدهیم، جذب یک فوتون الکترومغناطیسی (با اسپین 1 و تکانه زاویه‌ای $h/2\pi$) می‌تواند مؤلفه z تکانه زاویه‌ای پروتون را به اندازه 1 واحد تغییر بدهد و از $+\frac{1}{2}(h/2\pi)$ به $-\frac{1}{2}(h/2\pi)$ برساند. این وضعیت در شکل ۱۹ ب نشان داده شده است. در شکل ۱۹ ج نشان داده‌ایم که چگونه اسپین اولیه s_z پروتون و تکانه زاویه‌ای L_z فوتون (مؤلفه‌های z بردارهای \mathbf{s} و \mathbf{L}) با هم جمع می‌شوند و اسپین نهایی s'_z پروتون (وارونه) را به دست می‌دهند. شکل ۱۹ ج همچنین مثال دیگری از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای است، یعنی، نشان می‌دهد که تکانه زاویه‌ای اولیه $(\mathbf{s} + \mathbf{L})$ -



شکل ۲۰. تصویری از مجسمه، با روش تصویرگیری تشدید مغناطیسی (MRI).

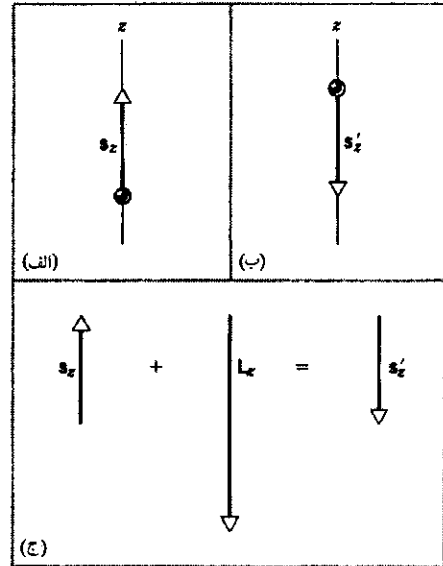
پرسشها

۱. تاکنون با کمیتهای برداری متعددی از جمله مکان، جابه‌جایی، سرعت، شتاب، نیرو، تکانه و تکانه زاویه‌ای آشنا شده‌ایم. کدامیک از این کمیتهای مستقل از مبدأ چارچوب مرجع تعریف می‌شوند؟
۲. فیزیکدان مشهوری (آر. دبلیو. وود) که به شوخیهای عملی بسیار علاقه‌مند بود، یکبار چرخ‌لنگری را که خیلی تند می‌چرخید در یک چمدان کار گذاشت، و از باربری خواست که آن را به دنبال او حمل کند. وقتی باربر، به دنبال صاحب چمدان، سریعاً به یک کوچه می‌پیچد چه اتفاقی می‌افتد؟ این رفتار را برحسب $\tau = dL/dt$ توضیح بدهید.
۳. استوانه‌ای حول محوری که از یک انتهایش می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد (شکل ۲۱). برای نشان دادن بردارهای L و ω مبدأ مناسبی اختیار کنید. آیا این بردارها موازی‌اند؟ آیا ملاحظات مربوط به تقارن در اینجا دخیل‌اند؟



شکل ۲۱. پرسش ۳

۴. فرض کنید میله یکنواختی به‌طور قائم روی سطحی با اصطکاک ناچیز قرار گرفته است. به انتهای پایینی میله یک ضربه افقی وارد شد. آیا $\omega < \omega_0$ ، $\omega = \omega_0$ ، $\omega > \omega_0$ و نقطه بالای میله را توصیف کنید.



شکل ۱۹. (الف) پروتونی با تکانه زاویه‌ای ذاتی (اسپین) s که دارای مؤلفه s_z در امتداد محور z است. (ب) پس از جذب یک فوتون، مؤلفه z اسپین وارونه می‌شود. (ج) مؤلفه z تکانه زاویه‌ای اولیه که برابر با $1/2 + 1$ واحد است، با مؤلفه z تکانه زاویه‌ای فوتون، که برابر با -1 واحد است جمع می‌شود و برابری برابر با $1/2 - 1$ واحد به‌دست می‌دهد.

در نبود گشتاور نیروی خارجی، با تکانه زاویه‌ای نهایی (s') برابر است. در تشدید مغناطیسی هسته‌ای (NMR)، یک میدان مغناطیسی ایستا که در جهت محور z اعمال می‌شود، اسپین پروتونها را (مانند شکل ۱۹ الف) با این محور هم‌جهت می‌کند. یک میدان الکترومغناطیسی متغیر در بسامدهای رادیویی هم فوتونهای با انرژی دقیقاً مناسب را فراهم می‌آورد تا جذب پروتونها شوند و اسپین آنها را وارونه کنند.

از آنجا که بخش اعظم بدن انسان از آب تشکیل شده و آب هم شامل هیدروژن است، جذب این تابش الکترومغناطیسی روشی برای تصویرگیری از اعضای داخلی بدن فراهم می‌آورد (شکل ۲۰). تصور می‌شود که تابشهای الکترومغناطیسی به‌صورت امواج رادیویی آسیب‌چندانی به بدن نمی‌رساند؛ پرتوهای x ، که از آنها هم برای تصویربرداری استفاده می‌شود، بالقوه بسیار مضرترند. این‌گونه تصویربرداری تشدید مغناطیسی ممکن است، به‌عنوان یک روش تشخیص، به‌طور وسیعی جانشین عکسهای پرتو x ‌ای شود.

۱۳-۷. مروری بر دینامیک دورانی

در فصلهای ۱۱ تا ۱۳، مروری بر مباحث کلی دینامیک و سینماتیک دورانی داشتیم. مطالعه کامل این مباحث در مجال این کتاب نمی‌گنجد، ولی همین نتایج کلی را می‌شود برای تحلیل بسیاری از وضعیتهای فیزیکی به‌کار برد. توجه به این نکته که بعضی از نتایج به‌دست آمده را فقط در موارد خاص و معینی می‌توان به‌کارگرفت بسیار اهمیت دارد. برای کمک به شما در این زمینه، تعدادی از معادلات بنیادی دینامیک دورانی را در جدول ۱ گرد آورده‌ایم.

جدول ۱. خلاصه معادلات مربوط به دینامیک دورانی.

ملاحظات	معادلات
۱. روابط تعریف کننده	
گشتاور ناشی از نیروی F ، وارد بر یک ذره حول نقطه O .	$\tau = r \times F$
برایند گشتاورهای خارجی وارد بر سیستمی از ذرات که تحت تأثیر چندین گشتاور منفرد τ_n حول نقطه O قرار گرفته است.	$\tau_{ext} = \sum \tau_n$
تکانه زاویه‌ای یک ذره حول نقطه O .	$l = r \times p$
تکانه زاویه‌ای کل سیستمی از ذرات حول نقطه O .	$L = \sum l_n$
۲. روابط کلی	
معادله حرکت تک ذره‌ای که تحت تأثیر گشتاور τ قرار گرفته است. هم τ و هم l نسبت به یک نقطه واحد O از یک چارچوب مرجع لخت اندازه‌گیری می‌شوند. این عبارت مشابه دورانی عبارت $F = dp/dt$ در حرکت انتقالی است.	$\tau = \frac{dl}{dt}$
قانون حرکت برای سیستمی از ذرات که تحت تأثیر یک گشتاور خارجی خالص است. این معادله در صورتی صادق است که τ_{ext} و L هر دو (۱) نسبت به یک نقطه ثابت O در یک چارچوب مرجع لخت، یا (۲) نسبت به مرکز جرم سیستم، اندازه‌گیری شوند. این عبارت مشابه دورانی معادله $\sum F_{ext} = dP/dt$.	$\sum \tau_{ext} = \frac{dL}{dt}$
۳. موارد خاص	
نکات زیر در مورد دوران جسم صلب حول محور ثابت در یک چارچوب مرجع لخت صادق است.	
α باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و τ مؤلفه اسکالر τ_{ext} در امتداد همان محور است. این رابطه مشابه دورانی رابطه $F = Ma$ است.	$\tau = I\alpha$
ω باید در امتداد محور باشد؛ I هم باید نسبت به محور اندازه‌گیری شود، و L باید مؤلفه تکانه زاویه‌ای کل حول همین محور باشد. این رابطه مشابه دورانی رابطه $P = Mv$ است.	$L = I\omega$

۱۱. وقتی روی یک مسیر باریک راه می‌روید، اگر یک دفعه احساس کنید که دارید تعادل خودتان را از دست می‌دهید و مثلاً به طرف راست می‌افتید، برای بازگشت به تعادل، بدنتان را به کدام طرف می‌چرخانید؟ توضیح بدهید که چرا.

۱۲. پیچهایی که موتور هواپیماهای جت را به بدنه متصل می‌کنند چنان طراحی شده‌اند که اگر به دلایل پیش‌بینی نشده‌ای موتور (که سریعاً می‌چرخد) ناگهان از کار بیفتد، می‌برند. فایده این "فیوز" چیست؟

۱۳. یک بازیکن دلخور چوب هاکی‌اش را روی یخ پرتاب می‌کند. چوب ضمن لغزیدن روی یخ حول مرکز جرمش می‌چرخد و سرانجام تحت تأثیر اصطکاک از حرکت می‌ایستد. حرکت دورانی چوب دقیقاً در همان لحظه‌ای به آخر می‌رسد که مرکز جرم آن به حال سکون درآمده است. توضیح بدهید که چرا.

۱۴. وقتی سرعت زاویه‌ای یک جسم زیاد می‌شود، تکانه زاویه‌ای آن ممکن است افزایش پیدا کند یا نکند. برای هر یک از این موارد مثالی بزنید.

۱۵. دانشجویی که روی صفحه چرخانی ایستاده است دو دمیل یکسان در دو دست گرفته و بازوهایش را به طرفین باز کرده است. حالا بی‌آنکه هیچ جزئی از سیستم جابه‌جا شود، دمبلها را زها می‌کند. آیا سرعت زاویه‌ای دانشجوی تغییر می‌کند؟ آیا تکانه زاویه‌ای پایسته است؟ در هر دو مورد توضیح بدهید.

۱۶. چرا بدنه هلیکوپتری که در پرواز است در جهت مخالف چرخش پره‌های پیش‌برنده‌اش به چرخش در نمی‌آید؟

۵. اگر وسیله نشان داده شده در شکل ۵ روی عرشه یک سفینه فضایی بزرگ که در ناحیه‌ای تهی از گرانش در فضا حرکت می‌کند قرار داده شود، آیا اصولاً تغییری در اجرای آزمایش حاصل می‌شود؟ اگر می‌شود، چه تغییری؟

۶. وقتی اتومبیلی که چرخهای عقب آن محرک‌اند، سریعاً از حالت سکون شتاب می‌گیرد، راننده مشاهده می‌کند که جلوی اتومبیل کمی بالا می‌آید. چرا چنین می‌شود؟ آیا اتومبیلی که چرخهای جلوی محرک باشند طور دیگری رفتار می‌کند؟

۷. یک پیکان در طی پرواز چنان جهت‌گیری می‌کند که همواره مماس بر مسیرش باقی بماند. ولی توپ راگبی (که با چرخش قابل توجهی حول محور بزرگترش پرتاب می‌شود) چنین نمی‌کند. چرا این دو جسم رفتار متفاوتی دارند؟

۸. یک بازیکن توپ (بیضوی شکل) راگبی را طوری پرتاب می‌کند که توپ ضمن حرکت حول محور مایلی (نامتقارن) می‌چرخد. آیا تکانه زاویه‌ای این توپ ثابت است، یا تقریباً چنین است؟ بین حالتی که توپ حرکت لنگری دارد و حالتی که حرکت آن هموار است چه وجه تمایزی هست؟

۹. آیا می‌توانید نظریه ساده‌ای برای توضیح پایداری دوچرخه متحرک ارائه کنید؟ باید توضیح بدهید که چرا متعادل کردن دوچرخه ساکن بسیار دشوارتر از متعادل کردن دوچرخه متحرک است.

۱۰. چرا یک چوب بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند؟

می‌تواند با حرکت دادن اندام خود، ترتیبی بدهد که به پشت روی ترامپولین فرود بیاید (شکل ۲۳ ب)؟ جالب توجه اینکه ۳۸٪ مربیان شیرجه و ۳۴٪ فیزیک‌پیشگانی که این سؤال از آنها پرسیده شد، به آن پاسخ نادرست دادند. نظر شما در این باره چیست؟^۱

۲۳. با استفاده از مفاهیم تکانه زاویه‌ای و لختی دورانی، توضیح بدهید که در تاب‌بازی چگونه می‌توان در موقعیت نشسته ارتفاع تاب‌خوردن را افزایش داد.^۲

۲۴. آیا می‌شود یک تاب را آنقدر بالا برد که یک دایره کامل را طی کند و به‌طور کامل دور تکیه‌گاهش بچرخد؟ می‌توانید (چنانچه مایل باشید) فرض کنید که سکوی تاب، به‌جای طناب یا زنجیر، با میله صلب به محور متصل شده است.

۲۵. یک گردونه دایره‌ای کوچک حول یک محور قائم به‌طور آزاد در حال چرخش است. در محورها اصطکاک وجود ندارد. (الف) ککی که در ابتدا در مرکز گردونه قرار دارد به طرف لبه حرکت می‌کند و روی لبه می‌ایستد. تکانه زاویه‌ای سیستم (گردونه به‌اضافه کک) چگونه تغییر می‌کند؟ سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟ (ب) اگر کک از لبه گردونه (بدون پرش) سقوط کند سرعت زاویه‌ای گردونه چگونه تغییر می‌کند؟

۲۶. از یک چرخ سنگین می‌توان برای پایدار کردن حرکت کشتی استفاده کرد. اگر این چرخ چنان نصب شود که محور دورانش عمود بر عرشه کشتی باشد، وقتی که کشتی می‌خواهد از پهلو به پهلو بغلتد، اثر این چرخ چگونه ظاهر می‌شود؟

۲۷. اگر فرفره شکل ۱۸ در حال چرخش نباشد، می‌افتد. اگر تکانه زاویه‌ای اسپینی آن در مقایسه با تکانه زاویه‌ای ناشی از گشتاور اعمال شده زیاد باشد، فرفره حرکت تقدیمی انجام می‌دهد. در حالت میانی، یعنی وقتی فرفره به‌کندی در حال چرخش باشد چه اتفاقی می‌افتد؟
۲۸. فرفره "واگلان" تشکیل شده است از یک قسمت تقریباً کروی با شعاع زیاد در یک طرف و یک قسمت میله‌ای برای چرخاندن آن در طرف دیگر. اگر این فرفره نچرخد روی سطح کروی قرار می‌گیرد و اگر چرخانده شود طوری وامی‌غلتد که روی میله قرار بگیرد. در این باره توضیح بدهید.^۳ اگر نتوانستید فرفره واگلان پیدا کنید، از یک تخم‌مرغ

۱. نگاه کنید به

"Do Springboard Divers Violate Angular Momentum Conservation?" Cliff Frohlich, *American Journal of Physics*, July 1979, p. 583.

۲. نگاه کنید به

"How To Get the Playground Swing Going: A First Lesson in the Mechanics of Rotation", Jearl Walker, *Scientific American*, March 1989, p. 106.

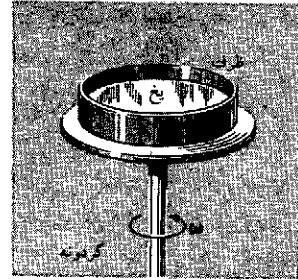
۳. نگاه کنید به

"The Tippy-Top," George D. Freier, *The Physics Teacher*, January 1967, p. 36.

۱۷. برای اینکه هواپیمای تک‌موتوره بتواند تراز پرواز کند باید باله‌های کنترل یک سمت را بالا ببرد و باله‌های سمت دیگر را پایین بیاورد. چرا چنین کاری ضروری است؟ آیا در شرایط عادی این کار در مورد هواپیماهای دوموتوره هم لازم است؟

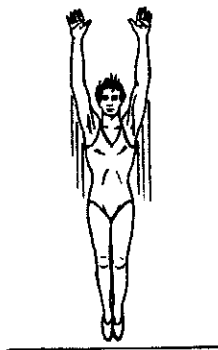
۱۸. اگر از عقب به ملخ یک هواپیما نگاه کنیم، می‌بینیم که ساعتگرد می‌چرخد. وقتی خلبان می‌خواهد پس از یک شیرجه تند اوج بگیرد، در می‌یابد که برای ثابت نگه‌داشتن صفحه پیشروی باید در قسمت انتهایی شیرجه از سکان چپ استفاده کند. در این باره توضیح بدهید.
۱۹. تعداد زیادی از رودهای بزرگ به‌سوی استوا جریان دارند. رسوبهایی که این رودها با خودشان به دریا می‌برند چه تأثیری بر چرخش زمین دارد؟
۲۰. اگر تمام جمعیت جهان به قطب جنوب مهاجرت کنند، آیا این اقدام تأثیری در طول مدت روز می‌گذارد؟ اگر چنین است، به چه صورت تأثیر می‌گذارد.

۲۱. یک گردونه دایره‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت حول یک محور قائم می‌چرخد. نه اصطکاک و نه گشتاور محرک در کار نیستند. یک ظرف گرد روی این گردونه قرار گرفته است و با آن می‌چرخد (شکل ۲۲). در ته ظرف یک لایه یخ با ضخامت یکنواخت قرار دارد، که البته آن هم با ظرف می‌چرخد. یخ ذوب می‌شود ولی هیچ آبی از ظرف خارج نمی‌شود. آیا حالا سرعت زاویه‌ای مجموعه بیشتر از برابر با، یا کمتر از مقدار اولیه است؟ برای پاسخ خودتان دلیل ارائه بدهید.

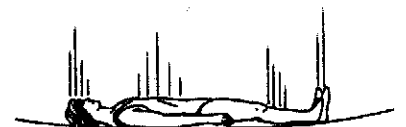


شکل ۲۲. برش ۲۱

۲۲. در شکل ۲۳ الف آکروبات بازی را می‌بینید که توسط یک ترامپولین با تکانه زاویه‌ای صفر به طرف بالا به حرکت درآمده است. آیا این شخص



(الف)



(ب)

شکل ۲۳. برش ۲۲

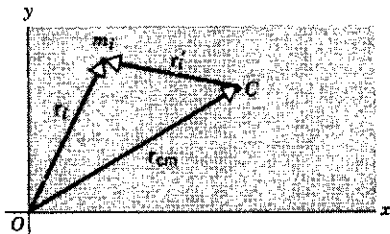
برای تکانه زاویه‌ای کل این سیستم حول هر مبدأ دلخواه به دست بیاورید.

۶. تکانه زاویه‌ای شخصی به جرم ۸۴۳kg واقع بر استوای زمین را حول مرکز زمین محاسبه کنید.

بخش ۱۳-۲ سیستمهای ذرات

۷. تکانه زاویه‌ای کل یک سیستم از ذرات، نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت از عبارت $\mathbf{L} = \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i$ حاصل می‌شود که در آن \mathbf{r}_i و \mathbf{p}_i نسبت به مبدأ O اندازه‌گیری شده‌اند. (الف) از رابطه‌های $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$ و $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_{cm} + \mathbf{p}'_i$ استفاده کنید و \mathbf{L} را برحسب مکانهای \mathbf{r}'_i و تکانه‌های \mathbf{p}'_i نسبت به مرکز جرم C بیان کنید (نگاه کنید به شکل ۲۵). (ب) از تعریف مرکز جرم و تعریف تکانه زاویه‌ای \mathbf{L}' نسبت به مرکز جرم استفاده کنید و عبارت $\mathbf{L} = \mathbf{L}' + \mathbf{r}_{cm} \times M \mathbf{v}_{cm}$ را به دست بیاورید. (ج) نشان بدهید که این عبارت را می‌توان چنین تعبیر کرد که تکانه زاویه‌ای کل برابر است با تکانه زاویه‌ای اسپینی (تکانه زاویه‌ای نسبت به مرکز جرم) به اضافه تکانه زاویه‌ای مداری (تکانه زاویه‌ای مربوط به حرکت مرکز جرم C نسبت به مبدأ O وقتی که تمام جرم جسم در نقطه C متمرکز شده باشد).

۸. فرض کنید \mathbf{r}_{cm} بردار مکان مرکز جرم C سیستمی از ذرات نسبت به مبدأ O یک چارچوب مرجع لخت باشد، و فرض کنید که \mathbf{r}'_i بردار مکان ذره i ام با جرم m_i نسبت به مرکز جرم C باشد. بنابراین $\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_{cm} + \mathbf{r}'_i$ است (شکل ۲۵). حالا تکانه زاویه‌ای کل سیستم ذرات را نسبت به مرکز جرم C به صورت $\mathbf{L}' = \sum \mathbf{r}'_i \times \mathbf{p}'_i$ که در آن $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}'_i/dt$ است، تعریف کنید. (الف) نشان بدهید که $\mathbf{p}'_i = m_i d\mathbf{r}_i/dt - m_i d\mathbf{r}_{cm}/dt = \mathbf{p}_i - m_i \mathbf{v}_{cm}$ (ب) حالا نشان بدهید $d\mathbf{L}'/dt = \sum \mathbf{r}'_i \times d\mathbf{p}'_i/dt$. (ج) نتایج قسمتهای (الف) و (ب) را با هم ترکیب کنید و با استفاده از تعریف مرکز جرم و قانون سوم نیوتون نشان بدهید که $d\mathbf{L}'/dt = \boldsymbol{\tau}'_{ext}$ است. در این رابطه آخر $\boldsymbol{\tau}'_{ext}$ عبارت از جمع کل گشتاورهای خارجی وارد بر سیستم حول مرکز جرم است.



شکل ۲۵. مسئله‌های ۷ و ۸

بخش ۱۳-۳ تکانه زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای

۹. انتگرال زمانی گشتاور نیرو را ضربه زاویه‌ای می‌گوییم. (الف) با $\boldsymbol{\tau} = d\mathbf{L}/dt$ معادله $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$ نشان بدهید که ضربه زاویه‌ای کل برابر

آب‌پز سفت شده استفاده کنید؛ رفتار "ایستادن روی پا"ی تخم مرغ چرخان را می‌توانید با گذاشتن یک علامت جوهری روی سر "تیر" تخم مرغ بررسی کنید.

مسئله‌ها

بخش ۱۳-۱ تکانه زاویه‌ای ذره

۱. اگر θ و ρ معلوم باشند، می‌توانیم با استفاده از معادله ۲ تکانه زاویه‌ای ذره را محاسبه کنیم. ولی، گاهی اوقات مؤلفه‌های (x, y, z) بردار \mathbf{r} و (v_x, v_y, v_z) سرعت \mathbf{v} را می‌دانیم. (الف) نشان بدهید که مؤلفه‌های بردار \mathbf{l} در امتداد محورهای x, y, z عبارت‌اند از

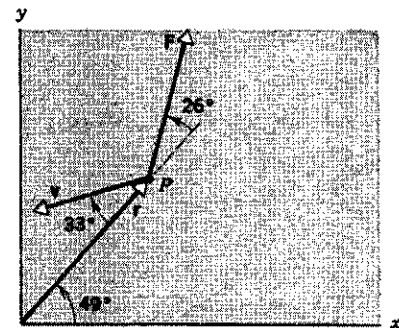
$$l_x = m(yv_z - zv_y)$$

$$l_y = m(zv_x - xv_z)$$

$$l_z = m(xv_y - yv_x)$$

(ب) نشان بدهید که اگر ذره در صفحه xy حرکت کند، بردار تکانه زاویه‌ای برابند تنه‌اداری مؤلفه z است. (راهنمایی: نگاه کنید به معادله ۱۷ در فصل ۳).

۲. ذره P به جرم ۲.۱۳kg که بردار مکان آن \mathbf{r} و سرعت آن \mathbf{v} است تحت تأثیر نیروی \mathbf{F} قرار می‌گیرد (شکل ۲۴). این سه بردار در یک صفحه قرار دارند. فرض کنید که $r = ۲.۹۱\text{m}$ ، $v = ۴.۱۸\text{m/s}$ و $F = ۱.۸۸\text{N}$ باشد. کمیت‌های زیر را محاسبه کنید: (الف) تکانه زاویه‌ای ذره و (ب) گشتاور وارد بر ذره حول مبدأ. جهت این دو بردار را مشخص کنید.



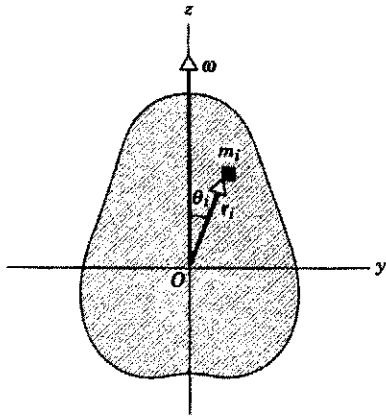
شکل ۲۴. مسئله ۲

۳. نشان بدهید تکانه زاویه‌ای ذره‌ای که با سرعت ثابت در حرکت است، حول هر نقطه دلخواه در طی حرکت ثابت می‌ماند.

۴. (الف) با استفاده از داده‌های ارائه شده در پیوسته‌ها، تکانه زاویه‌ای کل ناشی از دوران همه سیاره‌ها به دور خورشید را محاسبه کنید. (ب) چه کسری از این تکانه زاویه‌ای مربوط به سیاره مشتری است؟

۵. دو ذره، هر کدام با جرم m و سرعت v ، در امتداد دو خط موازی که به فاصله d از هم قرار دارند در جهت‌های مخالف در حرکت‌اند. عا...

که در آن L تکانه زاویه‌ای کل است.



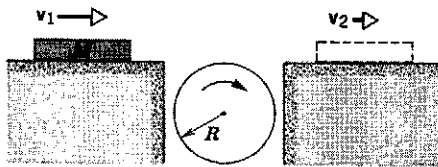
شکل ۲۷. مسئله ۱۶

۱۷. طول چوبدستی به جرم 4.42 kg برابر با 1.23 m است. این چوبدست روی سطح افقی بدون اصطکاک در حال سکون قرار گرفته است. یک نیروی ضربه‌ای افقی عمود بر چوبدست در فاصله 46.4 cm از مرکز جرم به آن وارد می‌شود و ضربه‌ای برابر با $12.8 \text{ N} \cdot \text{s}$ تولید می‌کند. حرکت بعدی چوبدست چگونه است؟

۱۸. استوانه‌ای روی سطح شیب‌داری با زاویه θ به پایین می‌غلتد. با کاربرد مستقیم معادله $\sum \tau_{\text{ext}} = dL/dt$ نشان دهید که شتاب مرکز جرم آن برابر $\frac{2}{3}g \sin \theta$ است. این روش را با روش مثال ۸ فصل ۱۲ مقایسه کنید.

۱۹. برای اینکه توپ بیلیارد از حالت سکون، بدون لغزش به غلتش دربیاید، چوب بیلیارد نباید در راستای مرکز (یعنی در ارتفاعی به اندازه شعاع توپ بالاتر از سطح میز) به آن برخورد کند بلکه باید در ارتفاع $2R/5$ بالاتر از مرکز به توپ برخورد کند. این را اثبات کنید.

۲۰. محور استوانه شکل ۲۸ ثابت است. استوانه در آغاز در حالت سکون است. جسمی به جرم M که بدون اصطکاک با سرعت v_1 به سمت راست در حرکت است از روی استوانه می‌گذرد و به موقعیت خط چین می‌رسد. وقتی این جسم با استوانه تماس پیدا می‌کند، ابتدا روی آن می‌لغزد، ولی اصطکاک آنقدر هست که قبل از آنکه تماس



شکل ۲۸. مسئله ۲۰

۱. نگاه کنید به

Arnold Sommerfeld, *Mechanics, Volume I of Lectures on Theoretical Physics*, Academic Press Orlando (1964 paperback edition), pp. 158-161, for a supplement on the mechanics of billiards.

با تغییر تکانه زاویه‌ای است. این رابطه مشابه زاویه‌ای رابطه ضربه-تکانه در حرکت خطی است. (ب) برای دوران حول یک محور ثابت، نشان دهید که

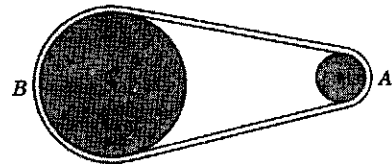
$$\int \tau dt = \bar{F}r(\Delta t) = I(\omega_f - \omega_i)$$

که در آن τ بازوی گشتاور است، \bar{F} میانگین نیرو در مدتی است که بر جسم اثر می‌کند و ω_i و ω_f به ترتیب عبارت‌اند از سرعت زاویه‌ای جسم درست قبل و بعد از اعمال نیرو.

۱۰. قرصی با لختی دورانی $1.22 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ روی یک مته برقی نصب می‌شود. موتور این مته گشتاور $15.8 \text{ N} \cdot \text{m}$ را بر جسم وارد می‌کند. 33.0 ms پس از روشن شدن موتور، (الف) تکانه زاویه‌ای و (ب) سرعت زاویه‌ای قرص چقدر است؟

۱۱. چرخ‌های A و B توسط تسمه‌ای مطابق شکل ۲۶ به هم متصل شده‌اند. شعاع چرخ B سه برابر شعاع چرخ A است. در دو حالت کنید. (الف) شتاب خطی و (ب) شتاب زاویه‌ای چرخ. (ج) اگر لختی دورانی چرخ برابر با $155 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ باشد، گشتاور وارد بر چرخ در اثر اصطکاک غلتشی را محاسبه کنید.

۱۲. چرخ‌های A و B توسط تسمه‌ای مطابق شکل ۲۶ به هم متصل شده‌اند. شعاع چرخ B سه برابر شعاع چرخ A است. در دو حالت زیر نسبت لختیهای دورانی I_A/I_B چقدر است؟ (الف) هر دو چرخ تکانه زاویه‌ای یکسانی دارند و (ب) هر دو چرخ انرژی جنبشی دورانی یکسانی دارند. فرض می‌کنیم که تسمه روی چرخها نمی‌لغزد.



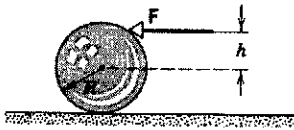
شکل ۲۶. مسئله ۱۲

۱۳. نشان دهید که برای سیستم دودره‌ای شکل ۲۷، $L = I\omega$ است. ۱۴. با استفاده از داده‌های مندرج در پیوسته‌ها، تکانه زاویه‌ای اسپینی زمین را حول محور دورانش تعیین کنید. فرض کنید زمین کره‌ای یکنواخت است.

۱۵. تکانه زاویه‌ای چرخ‌لنگری با لختی دورانی $142 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ در مدت 1.53 s از 3.07 به $788 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ کاهش پیدا می‌کند. (الف) گشتاور متوسط وارد بر چرخ‌لنگر را در این مدت تعیین کنید. (ب) با فرض اینکه شتاب زاویه‌ای ثابت باشد، چرخ‌لنگر در این مدت چه زاویه‌ای را طی می‌کند؟ (ج) روی این چرخ لنگر چقدر کار انجام شده است؟ (د) این چرخ‌لنگر چه توان متوسطی فراهم می‌کند؟

۱۶. در شکل ۲۷ جسم صلب متقارنی را می‌بینیم که حول محور ثابتی دوران می‌کند. به منظور ساده کردن محاسبات، مبدأ مختصات را در مرکز جرم قرار می‌دهیم. با جمع تکانه‌های زاویه‌ای مربوط به همه جرمهای m_i که جسم به آنها تقسیم شده است، نشان دهید که

داشته‌ایم. توپ با سرعت v_0 از چوب جدا می‌شود و به خاطر "حرکت اسپینی به طرف جلو"، سرعت آن سرانجام به $9v_0/7$ می‌رسد. نشان بدهید که $h = 4R/5$ است (شعاع R شعاع توپ بیلیارد است).



شکل ۳۱. مسئله ۲۳

۲۴. در مسئله ۲۳، فرض کنید نیروی F به نقطه‌ای پایین‌تر از خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، وارد می‌شود. (الف) نشان بدهید که با این "حرکت اسپینی به سوی عقب" غیرممکن است بتوان سرعت پیشروی را، بدون ایجاد غلتش به صفر کاهش داد، مگر اینکه $h = R$ باشد. (ب) نشان بدهید که ایجاد یک حرکت به سوی عقب در توپ غیرممکن است مگر اینکه F یک مؤلفه قائم به طرف پایین داشته باشد.

۲۵. یک بازیکن بولینگ توپ بولینگ با شعاع $R = 11\text{ cm}$ با سرعت اولیه $v_0 = 8.5\text{ m/s}$ در امتداد دالان پرتاب می‌کند. این توپ قبل از اینکه شروع به غلتیدن کند مسافت معینی را می‌لغزد. قبل از برخورد توپ با کف دالان، حرکت آن انتقالی محض است و هیچ چرخشی ندارد. ضریب اصطکاک جنبشی بین توپ و کف دالان 0.21 است. (الف) این توپ چه مدتی روی کف دالان می‌لغزد؟ (راهنمایی: در حین لغزش، سرعت v توپ کاهش پیدا می‌کند و سرعت زاویه‌ای آن افزایش می‌یابد؛ لغزش وقتی تمام می‌شود که $v = R\omega$ شود). (ب) چه مسافتی را با لغزش طی می‌کند؟ (ج) قبل از آغاز غلتش چند دور می‌زند؟ (د) وقتی شروع به غلتیدن می‌کند سرعت آن چقدر است؟

بخش ۱۳-۴ پایستگی تکانه زاویه‌ای

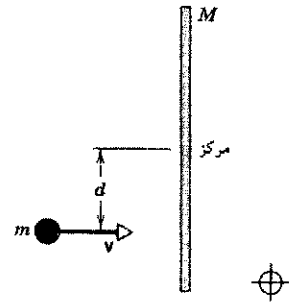
۲۶. مشاهدات اخترشناختی نشان می‌دهد که از سال ۱۸۷۰ تا سال ۱۹۰۰، طول مدت شبانه‌روز به مقدار تقریبی $2.3 \times 10^{-8} \text{ s}$ افزایش پیدا کرده است. (الف) تغییر نسبی متناظر در سرعت زاویه‌ای زمین چقدر بوده است؟ (ب) فرض کنید این تغییر ناشی از جابه‌جایی مواد گداخته در هسته زمین بوده باشد. چه تغییر نسبی‌ای در لختی دورانی زمین می‌تواند پاسخ قسمت (الف) را توجیه کند؟

۲۷. فرض کنید خورشید با تمام شدن سوخت هسته‌ای‌اش ناگهان می‌رمبد و به یک کوتوله سفید تبدیل می‌شود، و در این فرایند قطر آن برابر با قطر زمین می‌شود. اگر هیچ اتلاف جرمی در کار نباشد، دوره تناوب چرخش خورشید که اکنون در حدود ۲۵ روز است چقدر خواهد شد؟ فرض کنید خورشید و کوتوله سفید کره‌های یکنواختی باشند.

۲۸. شخصی روی سکوی بدون اصطکاک که با سرعت 22 rev/s دوران می‌کند ایستاده است؛ دستهایش را به طرفین باز کرده و با هر کدام وزنه‌ای را نگه داشته است. وقتی دستهای او در چنین وضعی قرار دهند لختی دورانی کل شخص، وزنه‌ها، و سکو برابر

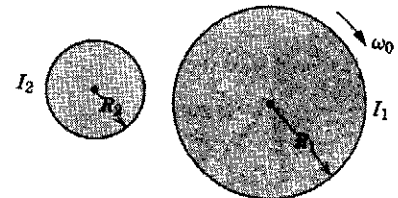
جسم با استوانه قطع شود لغزش تمام می‌شود. شعاع استوانه R و لختی دورانی آن I است. سرعت نهایی v_2 را برحسب v_1 ، M ، I و R بیان کنید. ساده‌ترین راه برای رسیدن به این نتیجه آن است که از رابطه میان ضربه و تغییر تکانه استفاده کنید.

۲۱. چوبدستی به طول L و با جرم M روی سطح یک میز افقی بدون اصطکاک قرار گرفته است. این چوبدستی را می‌توانیم آزادانه به هر سو که مایل باشیم به چرخش وایداریم. جسمی به جرم m که با سرعت v ، مطابق شکل ۲۹، در حرکت است با چوبدستی برخورد کشسان انجام می‌دهد. (الف) در این برخورد چه چیزی پایسته است؟ (ب) برای اینکه جسم بلافاصله پس از برخورد به حالت سکون در بیاید جرم آن، m ، باید چقدر باشد؟



شکل ۲۹. مسئله ۲۱

۲۲. دو استوانه به شعاعهای R_1 و R_2 به ترتیب دارای لختی دورانی I_1 و I_2 هستند. این استوانه‌ها توسط محورهایی که بر صفحه شکل ۳۰ عمودند نگهداری می‌شوند. استوانه بزرگتر در آغاز با سرعت زاویه‌ای ω در حرکت است. استوانه کوچکتر به سمت راست حرکت داده می‌شود تا با استوانه بزرگتر تماس پیدا کند و به واسطه اصطکاک با استوانه دیگر به دوران در بیاید. سرانجام لغزش به پایان می‌رسد و دو استوانه با آهنگهای ثابتی در جهت‌های مخالف دوران می‌کنند. سرعت زاویه‌ای نهایی، ω_2 ، استوانه کوچکتر را برحسب I_1 ، I_2 ، R_1 ، R_2 و ω پیدا کنید. (راهنمایی: تکانه زاویه‌ای و انرژی جنبشی هیچ‌کدام پایسته نیستند. معادله ضربه زاویه‌ای را در مورد هر یک از استوانه‌ها به کار بگیرید. نگاه کنید به مسئله ۹).



شکل ۳۰. مسئله ۲۲

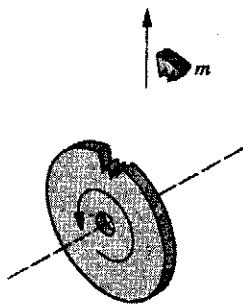
۲۳. به توپ بیلیاردی که در ابتدا ساکن است با چوب بیلیارد ضربه سریعی وارد می‌کنیم. چوب بیلیارد را، قبل از ضربه، به طور افقی در ارتفاع h بالای خطی که از مرکز توپ می‌گذرد، به کار می‌گیریم. -

و مقدار) سیستم را پیدا کنید. (ب) آزمایش را تکرار کنید، ولی این بار فرض می‌کنیم که اصطکاک محور چرخ قابل ملاحظه می‌باشد. چرخ با همان سرعت زاویه‌ای اولیه (57.7 rad/s) حرکت را آغاز می‌کند و به تدریج (نسبت به گردونه) متوقف می‌شود. این بار هم شخص چرخ را به همان صورت که در بالا توصیف شده نگه داشته است. (باز هم گردونه می‌تواند آزادانه و بدون اصطکاک بچرخد.) چگونگی حرکت این سیستم را متناسب با اطلاعات داده شده به طور کمی توصیف کنید.

۳۳. جوانی به جرم 50.6 kg روی لبه یک چرخ و فلک افقی بدون اصطکاک به جرم 827 kg و به شعاع 3.72 m ایستاده است. چرخ و فلک حرکتی ندارد، این شخص سنگی به جرم 1.13 kg را در امتداد افق و مماس با لبه بیرونی چرخ و فلک پرتاب می‌کند. سرعت سنگ نسبت به زمین برابر با 7.82 m/s است. (الف) سرعت زاویه‌ای چرخ و فلک و (ب) سرعت خطی شخص پس از پرتاب سنگ چقدر است؟ چرخ و فلک را به صورت یک قرص یکنواخت در نظر بگیرید.

۳۴. در مکان بازی بچه‌ها چرخ و فلک کوچکی به شعاع 1.22 m و جرم 176 kg نصب شده است. شعاع چرخش (نگاه کنید به مسئله ۱۱ در فصل ۱۲) این چرخ و فلک 91.6 cm است. نوجوانی به جرم 44.3 kg با سرعت 2.92 m/s مماس بر لبه چرخ و فلک ساکن می‌دود و روی آن می‌پرد. فرض کنید اصطکاک بین پاتاقها و محور چرخ و فلک ناچیز است. سرعت زاویه‌ای مجموعه چرخ و فلک و نوجوان را تعیین کنید.

۳۵. یک قرص تخت یکنواخت به جرم M و شعاع R حول محوری افقی که از مرکز آن می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای ω می‌چرخد. (الف) انرژی جنبشی آن چقدر است؟ تکانه زاویه‌ای آن چقدر است؟ (ب) یک تکه به جرم m از لبه قرص می‌شکند و در لحظه‌ای که از آن جدا می‌شود در راستای قائم به سمت بالا صعود می‌کند (شکل ۳۳). این تکه تا چه ارتفاعی از محل جدا شدن بالاتر می‌رود؟ (ج) سرعت زاویه‌ای نهایی قرص شکسته شده چقدر است؟

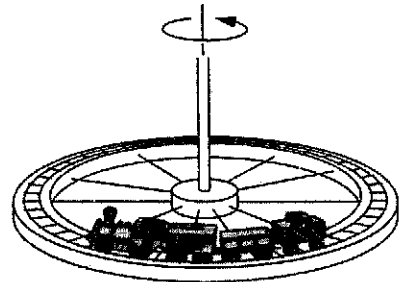


شکل ۳۳. مسئله ۳۵

۳۶. سوسکی به جرم m روی لبه صفحه گردنده دایره‌ای شکلی به شعاع R و لختی دورانی I که می‌تواند بدون اصطکاک حول محور قائم بچرخد، در جهت پادساعتگرد حرکت می‌کند. سرعت سوسک (نسبت به زمین) v است، در حالی که صفحه با سرعت زاویه‌ای ω در جهت ساعتگرد می‌چرخد. سوسک روی لبه صفحه به ریزه‌نانی می‌رسد، و سرعت زاویه‌ای صفحه پس از توقف سوسک

با $6.13 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است. اگر این شخص با جابه‌جا کردن دستهایش لختی دورانی را به $1.97 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ کاهش بدهد (الف) سرعت زاویه‌ای سکو چقدر خواهد شد و (ب) نسبت انرژی جنبشی فعلی به انرژی جنبشی اولیه چقدر است؟

۲۹. در یک نمایش کلاسی، ریلهای یک قطار اسباب‌بازی روی یک چرخ بزرگ نصب می‌شود. این چرخ می‌تواند (با اصطکاک ناچیز) حول یک محور قائم به دوران بیاید (شکل ۳۲). قطار اسباب‌بازی به جرم m را روی ریلها قرار می‌دهیم. مجموعه در آغاز در حال سکون است. قطار را روشن می‌کنیم. سرعت قطار پس از مدتی به مقدار پایایی v نسبت به مسیر می‌رسد. اگر جرم چرخ M و شعاع آن R باشد، سرعت زاویه‌ای اش، ω ، چقدر است؟ (جرم پره‌های چرخ ناچیز است.)



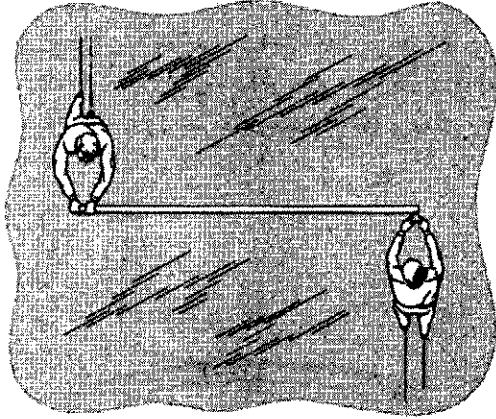
شکل ۳۲. مسئله ۲۹

۳۰. لختی دورانی چرخانه یک موتور الکتریکی حول محور مرکزی اش برابر است با $2.47 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. این موتور موازی با محور یک کاوه فضایی نصب شده است. لختی دورانی کاوه فضایی حول محورش برابر با $12.6 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است. تعداد دورهایی که باید موتور بچرخد تا کاوه را به اندازه 25.0° حول محورش بچرخاند چقدر است؟

۳۱. چرخ لختی دورانی آن $1.27 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است با سرعت زاویه‌ای 824 rev/min روی محوری با لختی دورانی ناچیز می‌چرخد. چرخ دیگری با لختی دورانی $4.85 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ که در ابتدا ساکن است، به طور ناگهانی به همان محور جفت می‌شود. (الف) سرعت زاویه‌ای نهایی مجموعه محورو دو چرخ چقدر است؟ (ب) چه کسری از انرژی جنبشی اولیه به علت این جفت‌شدگی تلف می‌شود؟

۳۲. شعاع چرخ دوچرخه‌ای با طوق نازک برابر با 36.3 cm است. جرم توبی و پره‌های این چرخ قابل اغماض و جرم طوق آن 3.66 kg است؛ این چرخ را می‌توان با اصطکاک ناچیز حول محورش به چرخش درآورد. شخصی چرخ را طوری بالای سرش نگه داشته است که محور چرخ قائم است. این شخص روی یک گردونه ایستاده است که می‌تواند (بدون اصطکاک) دوران کند. اگر از بالا نگاه کنیم چرخ ساعتگرد می‌چرخد. گردونه در ابتدا ساکن است. سرعت زاویه‌ای اولیه چرخ 57.7 rad/s است. لختی دورانی چرخ + شخص + گردونه حول محور مشترکشان برابر با $2.88 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است. دست این شخص ناگهان چرخ را از چرخش (نسبت به گردونه) بازمی‌دارد. سرعت

می‌گذرد انتهای دیگر چوب را به دست می‌گیرد (شکل ۳۶). فرض کنید اصطکاک وجود ندارد. (الف) حرکت اسکیت‌بازها را پس از آنکه توسط چوب پرچم به هم مرتبط شدند به طور کمی توصیف کنید. (ب) دو اسکیت‌باز در امتداد چوب پرچم به هم نزدیک می‌شوند و فاصله‌شان را به $94m$ کاهش می‌دهند. در این حالت سرعت زاویه‌ای آنها را تعیین کنید. (ج) انرژی جنبشی سیستم را در قسمتهای (الف) و (ب) محاسبه کنید. اختلاف انرژی از کجا پدید می‌آید؟



شکل ۳۶. مسئله ۳۹

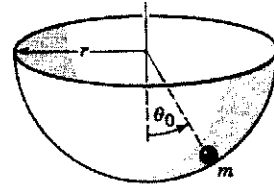
۴۰. اگر یخهای قطبهای زمین آب می‌شد و به اقیانوسها می‌ریخت، عمق اقیانوسها حدوداً 30 متر بیشتر می‌شد. این حادثه چه تأثیری در چرخش زمین می‌داشت؟ در صورت وقوع چنین حادثه‌ای طول شبانه‌روز، به تخمین، چقدر می‌شد؟ (در واقع نگرانیهایی ابراز شده است که گرم شدن جو زمین به علت آلودگیهای صنعتی ممکن است نهایتاً موجب ذوب شدن یخهای قطبی شود.)

۴۱. زمین در حدود 4.5 میلیارد سال پیش، احتمالاً به صورت کره‌ای با چگالی کم‌وبیش یکنواخت به وجود آمده است. کمی بعد، گرمای ناشی از واپاشی عناصر پرتوزا سبب شده است که بخش اعظم زمین ذوب شود. به این ترتیب مواد سنگینتر به سمت مرکز زمین رفته و هسته زمین را تشکیل داده‌اند. امروزه می‌توانیم زمین را چنین ترسیم کنیم که تشکیل شده است از یک هسته مرکزی به شعاع 3570 km و چگالی 10.3 g/cm^3 که توسط "گوشته" ای با چگالی 4.5 g/cm^3 که تا سطح زمین (تا شعاع 6370 km) ادامه دارد احاطه شده است. از پوسته زمین چشمپوشی می‌کنیم. تغییر نسبی در مدت شبانه‌روز، ناشی از شکل‌گیری هسته، چقدر بوده است؟

بخش ۵-۱۳ فرفره چرخان

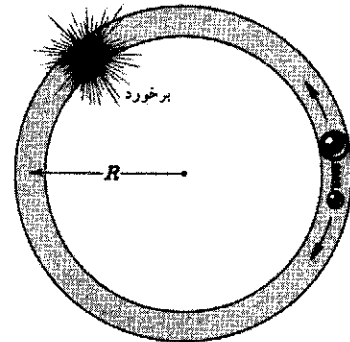
۴۲. فرفره‌ای با سرعت زاویه‌ای 28.6 rev/s حول محوری که با امتداد قائم محل زاویه 34° می‌سازد، می‌چرخد. جرم این فرفره 492 g و لختی دورانی آن $10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است. مرکز جرم آن در فاصله 3.88 cm از تکیه‌گاه قرار دارد. اگر از بالا به فرفره نگاه کنیم چرخش آن ساعتگرد است. مقدار (برحسب rev/s) و جهت سرعت

چقدر است؟ (ب) در این فرایند چقدر انرژی جنبشی تلف می‌شود. ۳۷. ذره‌ای به طور افقی روی سطح داخل یک جام نیمکره به شعاع r پرتاب می‌شود. جام را بی حرکت نگه داشته‌ایم (شکل ۳۴). می‌خواهیم سرعت اولیه v_0 را چنان تعیین کنیم که ذره درست تا لبه جام بالا برود. v_0 را به صورت تابعی از θ_0 ، مکان زاویه‌ای اولیه ذره، تعیین کنید. (راهنمایی: از اصول پایستگی استفاده کنید.)



شکل ۳۴. مسئله ۳۷

۳۸. روی یک مسیر دایره‌ای افقی بدون اصطکاک به شعاع R ، دو گوی کوچک به جرمهای m و M قرار گرفته‌اند که می‌توانند آزادانه روی مسیر بلغزند. بین دو گوی فنری فشرده شده است، ولی این فنر به گویها متصل نیست. دو گوی توسط ریسمانی به هم متصل شده‌اند. (الف) اگر ریسمان پاره شود، فنر فشرده (که بدون جرم فرض می‌شود) دو گوی را در دو جهت مخالف شلیک می‌کند؛ و خودش همانجا باقی می‌ماند. گویها وقتی بار دیگر روی مسیر به هم می‌رسند برخورد می‌کنند (شکل ۳۵). این برخورد در کجا صورت می‌گیرد؟ جواب را به صورت زاویه‌ای که گوی M طی می‌کند، برحسب رادیان، بیان کنید. (ب) انرژی پتانسیلی که در آغاز در فنر ذخیره می‌شود U_0 است. زمان لازم برای وقوع برخورد پس از پاره شدن ریسمان چقدر است؟ (ج) فرض کنید برخورد کاملاً کشسان و رودرو است. گویها پس از اولین برخورد، مجدداً در کجا با هم برخورد می‌کنند؟



شکل ۳۵. مسئله ۳۸

۳۹. دو اسکیت‌باز، که جرم هر کدام از آنها 51.2 kg است، در امتداد دو مسیر موازی به سوی یکدیگر در حرکت‌اند. فاصله بین دو مسیر 2.92 m است. سرعت این دو اسکیت‌باز مساوی و در جهت‌های مخالف، و مقدار آن 1.38 m/s است. اسکیت‌باز اولی چوب پرچم بلند و سبکی به طول 2.92 m در دست دارد؛ دومی وقتی از کنار او

که در آن m جرم الکترون و v سرعت آن است. (ب) حالا فرض کنید که تکانه زاویه‌ای الکترون حول پروتون فقط می‌تواند مضارب صحیح $(n) h/2\pi$ را اختیار کند، که در آن h ثابت پلانک است. نشان بدهید که در این صورت تنها مدارهای ممکن برای الکترون عبارت‌اند از مدارهایی با شعاع

$$r = \frac{nh}{2\pi mv}$$

(ج) بین جوابهای قسمت (الف) و (ب) را حذف می‌کنیم و نشان می‌دهیم شعاعهای تنها مدارهایی که با هر دو شرط سازگارند برابرند با

$$r = \frac{n^2 \epsilon_0 h^2}{\pi m e^2}$$

به این ترتیب شعاعهای مجاز با مربع اعداد صحیح ۱، ۲، ۳، والی آخر متناسب‌اند. به ازای $n = 1$ باشد، r کمترین مقدار را دارد که برابر است با $m \times 10^{-10} \times 0.529 \text{ \AA}$.

پروژه کامپیوتری

۴۶. فرض کنید دو چرخ‌لنگر که روی محور مشترکی سوار شده‌اند می‌توانند مستقل از یکدیگر بچرخند. لختی دورانی چرخ ۱، که در آغاز با سرعت زاویه‌ای 10° rad/s می‌چرخد برابر با $4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ ، و لختی دورانی چرخ ۲، که در آغاز ساکن است برابر با $1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ است. با لغزاندن یک چرخ روی محور، چرخها در تماس با یکدیگر قرار می‌گیرند، به هم گشتاور وارد می‌کنند و سرانجام به سرعت زاویه‌ای یکسانی می‌رسند. (الف) فرض کنید جزگشتاورهایی که چرخها به هم اعمال می‌کنند هیچ گشتاور دیگری وجود ندارد و با استفاده از اصل پایستگی تکانه زاویه‌ای نهایی چرخها را معین کنید.

اگر بتوانیم گشتاور یک چرخ‌لنگر را روی چرخ دیگر حساب کنیم، می‌توانیم برای پیگیری حرکت چرخها که به یک سرعت مشترک می‌رسند از کامپیوتر استفاده کنیم. فرض کنید گشتاوری که چرخ ۲ به چرخ ۱ اعمال می‌کند با رابطه $\tau_1 = -0.20(\omega_1 - \omega_2)$ بیان می‌شود، که در آن ω_1 سرعت زاویه‌ای چرخ ۱ و ω_2 سرعت زاویه‌ای چرخ ۲ است. τ_1 برحسب $\text{N} \cdot \text{m}$ و سرعتهای زاویه‌ای برحسب rad/s بیان شده‌اند. گشتاور چرخ ۱ روی چرخ ۲ برابر است با $\tau_2 = +0.20(\omega_1 - \omega_2)$. گشتاورها تا وقتی که سرعتهای زاویه‌ای چرخها یکسان شوند بر آنها وارد می‌شوند. در ضمن برهم‌کنش چرخها، چرخ ۱ از $I_1 \alpha_1 = \tau_1$ و چرخ ۲ از $I_2 \alpha_2 = \tau_2$ پیروی می‌کند. این معادلات از نظر ریاضی مشابه معادلات مربوط به قانون دوم نیوتون هستند و می‌توان به روش عددی به ترتیبی که در بخش ۶-۶ و پروژه‌های کامپیوتری در پایان بخش ۶ توصیف شد انتگرال گرفت. بازه‌های زمانی به مدت Δt را در نظر بگیرید و فرض کنید که چرخ ۱، در آغاز یک بازه زمانی، زاویه‌ای θ_{1b} و سرعت زاویه‌ای آن ω_{1b} باشد. در این صورت مکان زاویه‌ای و سرعت زاویه‌ای این چرخ در پایان بازه زمانی t را به صورت $\theta_{1e} = \theta_{1b} + \omega_{1b} \Delta t$ و $\omega_{1e} = \omega_{1b} + \alpha_{1b} \Delta t$ بیان کنید. (الف) فرض کنید در اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به دور پروتون می‌چرخد. نیروی مرکزگری وارد بر الکترون را نیروی کتریکی $r^2 / 4\pi\epsilon_0 e^2$ تأمین می‌کند، که در آن e مقدار بار یک الکترون یا یک پروتون است، r شعاع مدار است و ϵ_0 مقدار ثابتی است. نشان بدهید که شعاع مدار از رابطه زیر تعیین می‌شود

$$r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m v^2}$$

زاویه‌ای حرکت تقدیمی را تعیین کنید.

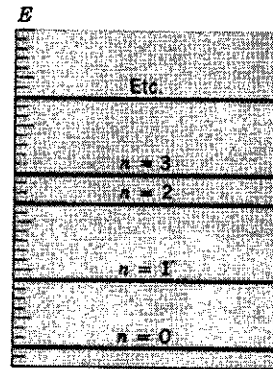
۴۳. زیروسکوپ شامل یک قرص چرخان با شعاع 48.7 cm است که به‌دقت در وسط یک محور به طول 12.2 cm سوار شده است. این زیروسکوپ می‌تواند آزادانه بچرخد و حرکت تقدیمی داشته باشد. سرعت چرخش آن 975 rev/min است. جرم قرص 1.14 kg و جرم محور 130 g است. اگر محورا افقی و یک انتهای آن روی تکیه‌گاه باشد، زمان لازم برای انجام یک دور حرکت تقدیمی چقدر است؟

بخش ۱۳-۶ کوانتس تکانه زاویه‌ای

۴۴. در سال ۱۹۱۳ نیلس بور فرض کرد که تکانه زاویه‌ای هر سیستم چرخنده مکانیکی با لختی دورانی I ، کوانتیده است. یعنی،

$$L = I\omega = n(h/2\pi)$$

که در آن L تکانه زاویه‌ای و n هر عدد درست مثبت یا صفر است. (الف) نشان بدهید که این فرض ایجاب می‌کند که انرژی جنبشی هر سیستم چرخنده‌ای منحصر به مجموعه‌ای از اعداد گسسته باشد، یعنی انرژی کوانتیده است؛ عبارتی برای کوانتس انرژی به‌دست بیاورید. (ب) یک چرخنده صلب، شامل ذره‌ای به جرم m را که مقید به دوران روی دایره‌ای به شعاع R است، در نظر بگیرید. اگر این فرض درست باشد، ذره چه سرعت زاویه‌ای می‌تواند داشته باشد؟ انرژی جنبشی ذره چقدر است؟ (ج) یک نمودار تراز انرژی، مانند شکل ۳۷، رسم کنید و روی این نمودار نشان بدهید که فاصله بین ترازهای انرژی با افزایش n چگونه تغییر می‌کند. رفتار بعضی از مولکولهای دواتمی کم‌انرژی مانند یک چرخنده صلب است.



شکل ۳۷. مسئله ۴۴

۴۵. (الف) فرض کنید در اتم هیدروژن الکترون در مداری دایره‌ای به دور پروتون می‌چرخد. نیروی مرکزگری وارد بر الکترون را نیروی کتریکی $r^2 / 4\pi\epsilon_0 e^2$ تأمین می‌کند، که در آن e مقدار بار یک الکترون یا یک پروتون است، r شعاع مدار است و ϵ_0 مقدار ثابتی است. نشان بدهید که شعاع مدار از رابطه زیر تعیین می‌شود

است، که در آن گشتاورها برحسب $N \cdot m$ و سرعت‌های زاویه‌ای برحسب rad/s اند. این روابط حاکی از یک گشتاور خارجی برابر با $4 \times 10^0 N \cdot m$ است. با بهره‌گیری از برنامه کامپیوتری‌تان، سرعت‌های زاویه‌ای چرخها و تکانه زاویه‌ای کل را در پایان بازه‌های زمانی ۱ ثانیه‌ای از $t = 0$ تا $t = 25s$ تعیین کنید. اینجا هم بازه‌های انتگرال‌گیری را $0.1s$ به $0.9s$ اختیار کنید. سرعت‌های زاویه‌ای را به صورت توابع زمانی رسم کنید. چون $\tau_{ext} = dL_{total}/dt$ است، گشتاور خارجی باید در مدت ۲۵ ثانیه اول سبب ایجاد تغییر تکانه زاویه‌ای کل به اندازه $\Delta L = \tau_{ext} \Delta t = -4 \times 25 = -100 kg \cdot m/s$ آيا جواب شما با این مقدار همخوانی دارد؟ کدام چرخ متحمل این تغییر تکانه می‌شود (این مورد را با وقتی که گشتاور نیروی خارجی در کار نیست مقایسه کنید)؟ یا شاید هر دو چرخ در آن سهیم‌اند؟

(د) سرعت زاویه‌ای نهایی به چگونگی اعمال گشتاور از یک چرخ به چرخ دیگر بستگی ندارد. چه کمیتی به گشتاور نیروها بستگی دارد؟

روابط τ_{1b} گشتاور وارد بر چرخ ۱ در آغاز این بازه زمانی است. روابط مشابهی هم برای چرخ ۲ برقرار است. هر چه بازه Δt کوچکتر باشد، تقریب انجام شده تقریب بهتری است.

(ب) سرعت زاویه‌ای چرخها را در پایان هر ثانیه در مدت زمان $t = 0$ تا $t = 25s$ با نوشتن یک برنامه کامپیوتری یا با استفاده از یک فهرست برای این منظور، محاسبه کنید. بازه انتگرال‌گیری را $0.1s$ بگیرد. سرعت‌های زاویه‌ای را به صورت تابعهایی از زمان روی یک نمودار رسم کنید، سپس با استفاده از نمودار یا فهرست، مقادیر سرعت‌های زاویه‌ای نهایی را تعیین کنید و جوابهای حاصل را با مقادیر به دست آمده در قسمت (الف) مقایسه کنید.

(ج) برای اینکه تأثیر یک گشتاور خارجی را ببینید، فرض کنید گشتاور وارد بر چرخ ۱ به صورت $\tau_1 = -4 \times 10^0 - 0.2 \times 10^0 (\omega_1 - \omega_2)$ و گشتاور وارد بر چرخ ۲ به صورت $\tau_2 = +0.2 \times 10^0 (\omega_1 - \omega_2)$

۱۴

شرایط تعادل

برجهای نگهدارنده یک پل معلق باید به قدر کافی مستحکم باشند تا زیر سنگینی پل و بار رفت و آمد روی آن فرو نریزند؛ سیستم فرود هواپیمایی که کمی ناجور به زمین می‌نشیند نباید به راحتی صدمه شدید ببیند؛ صندلی نباید با نشستن کسی بشکند یا واژگون شود. طراحان همه این چیزها سعی‌شان بر این است که این ساختارهای صلب، زیر بار نیروها و گشتاورهایی که به آنها وارد می‌شوند هم واقعاً صلب بمانند.

در چنین مسائلی دو سؤال مطرح است که باید به آنها جواب داد: ۱. چه نیروها و گشتاورهایی به جسم صلب اثر می‌کنند؟ ۲. با در نظر گرفتن طرح و مواد ساختمانی، آیا این اجسام، زیر بار این نیروها و گشتاورها، همچنان صلب خواهند ماند؟ در این فصل به طور مشروح به سؤال اول خواهیم پرداخت. پاسخ به سؤال دوم مستلزم آشنایی کافی با خواص مواد است، و بررسی کامل آن در حیطه مباحث این کتاب نیست؛ در این باره به بحث کوتاهی در بخش آخر همین فصل اکتفا کرده‌ایم.

۱-۱۴ شرایط تعادل

داریم $d\mathbf{P}/dt = 0$. به این ترتیب اولین شرط تعادل این است: جمع برداری تمام نیروهای وارد بر جسم باید برابر صفر باشد، یا

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = 0 \quad (1)$$

این معادله برداری هم‌ارز سه معادله اسکالر است:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum F_z = 0 \quad (2)$$

که در این روابط برای سهولت شاخص "ext" را از F_{ext} حذف کرده‌ایم. معادلات ۱ و ۲ حاکی از آن‌اند که برآیند مؤلفه‌های نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به دو متعامدی، برابر صفر است. حرکت دورانی یک جسم صلب از معادله ۸ فصل ۱۳، یعنی از

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{L}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}}$ برآیند تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم است. اگر \mathbf{L} هر مقدار ثابتی، منجمه صفر، را اختیار کند، در آن صورت داریم $d\mathbf{L}/dt = 0$. به این ترتیب دومین شرط تعادل چنین است: جمع برداری تمام گشتاورهای خارجی وارد بر جسم باید برابر صفر شود، یا

$$\sum \boldsymbol{\tau}_{\text{ext}} = 0 \quad (3)$$

یک جسم صلب، مانند یک صندلی، یک پل، یا یک ساختمان، در صورتی در تعادل مکانیکی است که، اگر آن را از یک چارچوب مرجع لخت مشاهده کنیم، هم تکانه خطی \mathbf{P} و هم تکانه زاویه‌ای \mathbf{L} اش ثابت باشند. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که هم شتاب خطی مرکز جرم \mathbf{a}_{cm} و هم شتاب زاویه‌ای $\boldsymbol{\alpha}$ حول هر محور ثابتی در چارچوب مرجع صفر است.

این تعریف از تعادل مکانیکی ایجاب نمی‌کند که جسم حتماً در حال سکون باشد؛ یعنی، بردارهای \mathbf{P} و \mathbf{L} الزاماً صفر نیستند. اگر این بردارها صفر باشند (به عبارت دیگر اگر سرعت مرکز جرم و سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ حول هر محور واقع در چارچوب مرجع صفر باشند)، جسم در تعادل استاتیکی است.

در این فصل محدودیتهایی را جستجو می‌کنیم که باید بر نیروها و گشتاورهای وارد بر جسم اعمال کرد تا شرط تعادل برقرار شود. بیشتر به تعادل استاتیکی خواهیم پرداخت، ولی خواهیم دید اعم از اینکه تعادل استاتیکی باشد یا نه، همین محدودیتهای برقرارند.

حرکت انتقالی مرکز جرم یک جسم صلب از معادله ۲۷ فصل ۹،

یعنی از

$$\sum \mathbf{F}_{\text{ext}} = \frac{d\mathbf{P}}{dt}$$

پیروی می‌کند، که در آن $\sum \mathbf{F}_{\text{ext}}$ برآیند تمام نیروهای خارجی وارد بر جسم است. اگر \mathbf{P} هر مقدار ثابتی، منجمه صفر، باشد، د. آن صورت - -

$$\begin{aligned}\tau_P &= (r_1 - r_P) \times F_1 + (r_2 - r_P) \times F_2 \\ &+ \dots + (r_N - r_P) \times F_N \\ &= [r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \dots + r_N \times F_N] \\ &- [r_P \times F_1 + r_P \times F_2 + \dots + r_P \times F_N]\end{aligned}$$

عبارت داخل کروشه اول، بنابر معادله ۵، τ_0 را به دست می‌دهد. عبارت داخل کروشه دوم را می‌توانیم با فاکتورگیری از عامل ثابت r_P بازنویسی کنیم و در این صورت داریم

$$\begin{aligned}\tau_P &= \tau_0 - [r_P \times (F_1 + F_2 + \dots + F_N)] \\ &= \tau_0 - [r_P \times (\sum F_{\text{ext}})] \\ &= \tau_0.\end{aligned}$$

تساوی آخر را به این دلیل نوشتیم که برای هر جسمی که در تعادل انتقالی باشد $\sum F_{\text{ext}} = 0$ است. به این ترتیب برای هر جسم در حال تعادل انتقالی گشتاور نیرو حول هر دو نقطه‌ای که اختیار کنیم مقدار یکسانی دارد.

اغلب با مسائلی سروکار داریم که در آنها همه نیروها در یک صفحه واقع می‌شوند. در چنین مواردی شش شرط مربوط به معادله‌های ۲ و ۴ به سه شرط کاهش می‌یابد. اینجا نیروها را به دو مؤلفه تجزیه می‌کنیم:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0 \quad (6)$$

و اگر گشتاورها را حول نقطه‌ای که آن هم در صفحه xy باشد محاسبه کنیم، همه گشتاورها در راستای عمود بر صفحه xy قرار می‌گیرند. در این مورد داریم

$$\sum \tau_z = 0 \quad (7)$$

بررسی را به مسائل مربوط به نیروهای واقع در یک صفحه محدود می‌کنیم تا محاسبات ساده‌تر باشد؛ این شرط هیچ‌گونه محدودیت بنیادی در کاربرد اصول کلی تعادل ایجاد نمی‌کند.

۲-۱۴ گرانیگاه

یکی از نیروهایی که در دینامیک جسم صلب با آن مواجه می‌شویم نیروی گرانشی است، که وزن جسم را تعیین می‌کند. قبلاً برای جسمی به جرم M این نیرو را (بدون هیچ توجیهی) به صورت تک بردار Mg که در مرکز جرم وارد می‌شود، نمایش داده‌ایم. در اینجا این اقدام را توجیه می‌کنیم و شرایطی را که در آن چنین کاری مجاز است توضیح می‌دهیم. وزن یک جسم گسترده در واقع برآیند تعداد بسیار زیادی نیروست، که از گرانش به هر یک از ذرات آن وارد می‌شود. یعنی، می‌توانیم به‌حای جمع برداری تمام نیروهای گرانشی وارد بر تمام ذرات یک جسم،

این معادله برداری را می‌توانیم به صورت سه معادله اسکالر بنویسیم (باز هم شاخص "ext" را حذف می‌کنیم)

$$\sum \tau_x = 0, \quad \sum \tau_y = 0, \quad \sum \tau_z = 0 \quad (4)$$

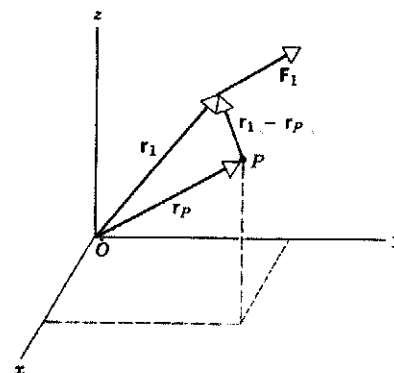
روابط فوق حاکی از آنند که، در حالت تعادل، برآیند مؤلفه‌های گشتاور نیروهای خارجی، در امتداد هر سه راستای دو به دو متعامدی، برابر صفر است.

شرط دوم تعادل به انتخاب مبدأ و محورهای مختصاتی که برای محاسبه مؤلفه‌های گشتاورها به‌کار می‌روند بستگی ندارد. اگر گشتاور کل برابر با صفر باشد، مؤلفه‌های آن برای هر مجموعه‌ای از محورهای x ، y ، و z صفر است. بعلاوه، برای یک جسم در حال تعادل، انتخاب مبدأ مختصات برای محاسبه گشتاورها اهمیتی ندارد و برحسب مورد می‌توان هر نقطه راحتی یا مناسبی را انتخاب کرد؛ اگر حول یک مبدأ مشخص O داشته باشیم $\tau = 0$ ، در آن صورت گشتاور وارد بر جسم در حال تعادل حول هر نقطه دیگری از چارچوب مرجع هم صفر است.

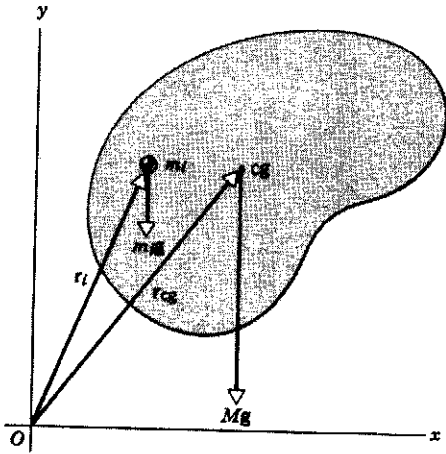
حالا این ادعا را اثبات می‌کنیم. فرض کنید N نیروی خارجی به جسمی وارد شود. نسبت به مبدأ مختصات O ، نیروی F_1 به نقطه‌ای در مکان r_1 وارد می‌شود، F_2 به r_2 و الی‌آخر. بنابراین گشتاور خالص حول نقطه O برابر است با

$$\begin{aligned}\tau_0 &= \tau_1 + \tau_2 + \dots + \tau_N \\ &= r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2 + \dots + r_N \times F_N\end{aligned} \quad (5)$$

نقطه‌ای مانند P را در نظر بگیرید که نسبت به O در مکان r_P قرار گرفته است (شکل ۱). نقطه اثر نیروی F_1 نسبت به نقطه P ، عبارت از $(r_1 - r_P)$ است. گشتاور کل حول نقطه P برابر است با



شکل ۱. نیروی F_1 یکی از N نیروی خارجی است که بر یک جسم صلب (که در شکل نشان داده نشده است) اثر می‌کند. بردار r_1 مکان نقطه اثر نیروی F_1 را نسبت به O مشخص می‌کند. از این بردار برای محاسبه گشتاور نیروی F_1 حول O استفاده می‌کنیم. از بردار $r_1 - r_P$ برای محاسبه گشتاور نیروی F_1 حول P استفاده می‌کنیم.



شکل ۴. هر ذره‌ای از جسم، مانند m_i ، تحت تأثیر یک نیروی گرانشی مانند $m_i g$ قرار می‌گیرد. با آنکه وزن کل جسم در سرتاسر حجم آن به صورت مجموع نیروهای گرانشی وارد بر تمام چنین ذراتی توزیع شده است، می‌توان به جای آن یک تک‌نیرو به مقدار Mg که در گرانیگاه وارد می‌شود در نظر گرفت. اگر میدان گرانشی یکنواخت باشد (یعنی، برای همه ذرات جسم یکسان باشد) گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق می‌شوند، و بنابراین r_{cg} و r_{cm} یکی هستند.

به این ترتیب برآیند گشتاورهای وارد بر جسم برابر است با گشتاوری که از تک‌نیروی Mg وارد بر مرکز جرم جسم ایجاد می‌شود. به این ترتیب گرانیگاه و مرکز جرم جسم بر هم منطبق می‌شوند و بنابراین دو معادله ۱۱ عبارتی که در بالا اظهار کردیم اثبات می‌شود. یک نتیجه مفید معادله ۱۱ آن است که گشتاور ناشی از گرانی حول مرکز جرم جسم صفر است. در چه شرایطی یک جسم در میدان گرانشی زمین در حال تعادل است؟ معادلات ۹ و ۱۱ نشان می‌دهند که، اگر یک نیروی F' به مقدار Mg در جهت بالا به مرکز جرم وارد شود، هم نیروی خالص و هم گشتاور خالص وارد بر جسم صفر خواهد شد و به این ترتیب شرایط تعادل برقرار است. در واقع نیروی F' در هر نقطه‌ای از خط قائم گذرنده از مرکز جرم هم به جسم وارد شود، باز جسم در حال تعادل خواهد بود. در این مورد گشتاور خالص برابر با صفر است، زیرا Mg و $F' (= -Mg)$ خط اثرشان یکی است. بنابراین می‌توانیم هر جسم را با اعمال یک نیروی قائم F' نه فقط به مرکز جرم، بلکه به هر نقطه‌ای مستقیماً در پایین یا در بالای مرکز جرم، به تعادل در بیاوریم.

از این خاصیت می‌توانیم برای تعیین مرکز جرم اجسام گسترده استفاده کنیم. جسمی به شکل دلخواه را در نظر بگیرید که از نقطه S آویخته شده است (شکل ۳) نقطه آویز، که در آن نیروی $F' = -Mg$ به طرف بالا به جسم اعمال می‌شود، باید روی خط قائمی باشد که از مرکز جرم جسم می‌گذرد. اگر خط قائمی را که از S می‌گذرد رسم کنیم، می‌دانیم که مرکز جرم باید جایی روی این خط باشد. این کار را می‌توانیم با انتخاب یک نقطه آویز دیگر تکرار کنیم (شکل ۳ب) و به این ترتیب خط دیگری به دست می‌آوریم که آن هم شامل مرکز جرم است روشن است که مرکز جرم جسم باید در محل تلاقی این دو خط باش

وزن آن جسم را قرار بدهیم. به علاوه، به جای برآیند خالص گشتاورهای گرانشی وارد بر همه ذرات می‌توانیم گشتاور ناشی از این تک‌نیرو (وزن) را بگذاریم، مشروط بر اینکه فرض کنیم این نیرو به نقطه‌ای از جسم به نام گرانیگاه وارد می‌شود.

اگر شتاب گرانشی g در تمام نقاط جسم مقدار ثابتی داشته باشد، که در تمام مواردی که عملاً با آنها سروکار داریم واقعیت دارد، می‌توانیم این ساده‌سازیها را اعمال کنیم: (۱) وزن جسم برابر با Mg است و گرانیگاه و مرکز جرم بر هم منطبق‌اند. حالا می‌خواهیم نتایج بالا را اثبات کنیم.

فرض کنید جسمی با جرم M را به تعداد بسیار زیادی ذره تقسیم کرده‌ایم. نیروی گرانشی وارد از طرف زمین به ذره m_i ، با جرم m_i ، برابر است با $m_i g$. این نیرو به سوی پایین و به سمت مرکز زمین است. نیروی خالص ناشی از گرانی وارد بر کل جسم برابر است با مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک ذرات، با

$$\sum \mathbf{F} = \sum m_i \mathbf{g} \quad (۸)$$

چون فرض کرده‌ایم که g برای تمام ذرات جسم مقدار واحدی دارد، می‌توانیم از g در علامت مجموع در معادله ۸ به عنوان عامل مشترک فاکتور بگیریم، و در این صورت داریم

$$\sum \mathbf{F} = g \sum m_i = Mg \quad (۹)$$

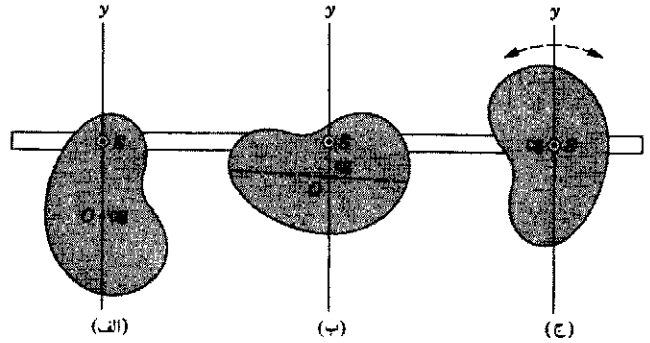
این نتیجه اثبات اولین عبارتی است که در بالا اظهار شد، یعنی به جای برآیند نیروهای گرانشی وارد بر کل جسم می‌توان تک‌نیروی Mg را گذاشت.

حالا می‌خواهیم شرط گشتاور نیرو، یعنی معادله ۳، را به کار ببریم و گشتاورها را حول نقطه دلخواه O ، آن‌طور که در شکل ۲ نشان داده شده است، تعیین کنیم. بردار r_i موقعیت ذره‌ای به جرم m_i را نسبت به این مبدأ مشخص می‌کند. گشتاور برآیند ناشی از نیروی گرانش وارد بر تمام ذرات حول این نقطه برابر است با

$$\sum \boldsymbol{\tau} = \sum (r_i \times m_i g) = \sum (m_i r_i \times g) \quad (۱۰)$$

که تساوی آخر را با جابه‌جا کردن کمیت اسکالر m_i در داخل مجموع به دست آوردیم. اینجا هم از ثابت بودن g استفاده می‌کنیم و آن را از زیر علامت جمع درمی‌آوریم، و توجه می‌کنیم که ترتیب بردارهای r_i و g عوض نشود، یعنی علامت حاصل ضرب خارجی تغییر نکند. بنابر معادله ۱۲ از فصل ۹، باقی‌مانده مجموع، یعنی $\sum m_i r_i$ ، درست همان $M r_{cm}$ است. بردار r_{cm} برداری است که مکان مرکز جرم جسم را نسبت به مبدأ O مشخص می‌کند. با انجام این عملیات معادله ۱۰ را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

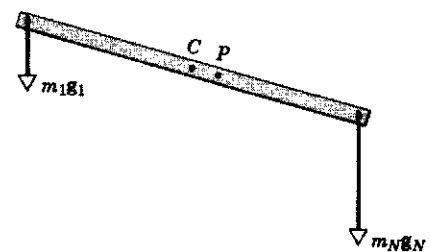
$$\sum \boldsymbol{\tau} = (\sum m_i r_i) \times g = M r_{cm} \times g = r_{cm} \times Mg \quad (۱۱)$$



شکل ۳. جسمی از نقطه دلخواه S آویخته شده است، اگر مانند قسمتهای (الف) و (ب) گرانیه (cg) جسم مستقیماً در زیر نقطه آویز S قرار داشته باشد، در آن صورت جسم در حال تعادل پایدار است. خط چین در شکل (ب) همان خط قائم شکل (الف) است و نشان می‌دهد که گرانیه جسم را می‌توان با آویختن آن از دو نقطه متفاوت مشخص کرد. (ج) اگر جسم از گرانیه آویخته شود، همواره در تعادل است و فرقی هم نمی‌کند که به کدام سمت قرار گرفته باشد.

اگر جسم را، مانند شکل ۳ ج، از مرکز جرمش بیاویزیم، به هر سستی هم که قرارش بدسیم، همواره در حال تعادل است. یعنی آن را هر طوری هم که بچرخانیم، باز در حال تعادل می‌ماند. این مشاهده گویای همان نتیجه‌ای است که از معادله ۱۱ حاصل می‌شود: گشتاور نیروی گرانی حول مرکز جرم صفر است.

در این بخش "مرکز جرم" و "گرانیه" را به جای یکدیگر هم به کار بردیم. مرکز جرم برای همه اجسام تعریف می‌شود و می‌توان، با روشهای توصیف شده در فصل ۹، آن را از روی ابعاد و شکل جسم محاسبه کرد. اما گرانیه فقط برای اجسامی که در میدان گرانشی قرار دارند تعریف می‌شود. برای محاسبه گرانیه نه تنها باید شکل هندسی جسم را با تمام جزئیات بشناسیم، بلکه باید چگونگی تغییرات g را هم در سراسر جسم بدانیم. اگر g در تمام جسم ثابت نباشد، مرکز جرم و گرانیه بر هم منطبق نیستند و نمی‌توان g را از زیر علامت مجموع در معادلات ۸ و ۱۰ بیرون آورد. میله یکنواخت شکل ۴ را در نظر بگیرید که محورش با افق زاویه غیر صفر می‌سازد. مرکز جرم C میله در مرکز هندسی آن قرار دارد. اگر میله افقی قرار می‌گرفت، گرانیه P آن بر مرکز جرمش منطبق می‌بود؛ یعنی تک نیروی F^V (به بزرگی Mg) که



شکل ۴. میله یکنواخت در میدان گرانشی غیر یکنواخت. گرانیه در نقطه P است، که بر مرکز جرم (C) منطبق نیست.

در نقطه C به طرف بالا به جسم اعمال می‌شود می‌توانست جسم را در تعادل نگه دارد. اگر میله افقی قرار نگیرد دیگر با تک نیروی اعمال شده در C نمی‌توان آن را متعادل کرد. از آنجا که g با دور شدن از زمین اندکی کاهش پیدا می‌کند، به ذره‌ای که در انتهای پایینی میله قرار دارد جاذبه گرانشی بیشتری وارد می‌شود تا به ذره کاملاً مشابهی که در انتهای بالایی واقع است برای جبران این تمایل به چرخش ساعتگرد حول C ، گرانیه P (محل اعمال نیروی رو به بالای متعادل کننده) باید اندکی پایین تر از C قرار بگیرد. اگر زاویه میل تغییر کند، محل P هم تغییر می‌کند. اگر میله را به جایی ببریم که مقدار g دیگری داشته باشد، رابطه بین P و C برای یک زاویه میل معین تغییر خواهد کرد. به این ترتیب گرانیه نه تنها به سمتگیری جسم بستگی دارد بلکه به میدان گرانشی در محل نیز وابسته است. برای میله‌ای که در نزدیکی سطح زمین باشد و با افق زاویه 45° بسازد، فاصله بین مرکز جرم و گرانیه در حدود 18 nm است، که این مقدار بسیار کوچکتر از دقتی است که ما در مسائل مربوط به تعادل با آن سروکار داریم و بنابراین کاملاً قابل اغماض است. در مسائل مربوط به تعادل، بی‌هیچ دغدغه خاطر می‌توانیم فرض کنیم که گرانیه و مرکز جرم بر هم منطبق اند.

۳-۱۴ مثالهایی از تعادل

در استفاده از شرایط تعادل (برایند نیروها صفر و برایند گشتاورها حول هر نقطه‌ای صفر) می‌توانیم مراحل کار را به صورت زیر روشن و ساده کنیم.

اول، یک مرز فرضی در اطراف سیستم مورد نظر رسم می‌کنیم. این کار به ما کمک می‌کند که بدانیم قوانین تعادل را در مورد کدام جسم یا سیستمی از اجسام اعمال می‌کنیم. به این فرایند منزوی کردن سیستم می‌گوییم.

دوم، بردارهایی را که نشاندهنده مقدار، جهت، و نقطه اثر تمام نیروهای خارجی هستند رسم می‌کنیم. نیروی خارجی نیرویی است که از خارج مرزی که قبلاً مشخص کرده‌ایم اثر می‌کند. نیروهای خارجی ای که معمولاً با آنها مواجه می‌شویم عبارت‌اند از نیروهای گرانشی و نیروهایی که توسط ریسمانها، سیماها، یا میله‌هایی که مرز را قطع می‌کنند اعمال می‌شوند. توجه داشته باشید که فقط باید به نیروهای خارجی وارد بر سیستم توجه کنیم؛ تمام نیروهای داخلی دو به دو همدیگر را خنثی می‌کنند.

مواردی پیش می‌آید که در آنها جهت یک نیرو ممکن است خوب مشخص نباشد. برای اینکه جهت نیرویی را تعیین کنیم، ارتباط عامل اعمال نیرو را در نقطه‌ای که از مرز سیستم می‌گذرد به طور فرضی قطع می‌کنیم. اگر دو سر این برش از هم دور شوند، در آن صورت نیرو به طرف بیرون است. اگر در این مورد شک دارید، یک جهت دلخواه اختیار کنید. به دست آوردن جواب منفی برای یک نیرو به این معنی است که آن نیرو در خلاف جهت مفروض است.

سوم، قبل از اینکه شرط اول تعادل (معادلات ۱ و ۲) را به کار ببریم

مرکز قالب در فاصله یک چهارم طول تیرک از انتهای چپ تیرک واقع شده است. ترازوها چه ارقامی را نشان می دهند؟

حل: سیستم را متشکل از تیرک و قالب در نظر می گیریم. شکل ۵ ب نمودار جسم آزاد این سیستم است که تمام نیروهای خارجی وارد بر آن را نشان می دهد. وزن تیرک، mg ، به طرف پایین در مرکز جرم اثر می کند. چون تیرک یکنواخت است مرکز جرم آن در مرکز هندسی اش واقع می شود. وزن قالب، Mg ، هم به طرف پایین است و به مرکز جرم قالب وارد می شود. ترازوها دو سر تیرک را با نیروهای F_l و F_r به طرف بالا می فشارند. مقادیر این دو نیرو همان ارقامی است که ترازوها نشان می دهند و ما باید پدایشان کنیم.

این سیستم در تعادل استاتیکی است و بنابراین می توانیم معادله موازنه نیروها (معادله ۶) و معادله موازنه گشتاورها (معادله ۷) را به کار بگیریم. این مسئله را از دو راه هم ارز حل می کنیم.

۱. راه حل اول. هیچ یک از نیروها مؤلفه x ندارند و بنابراین شرط $\sum F_x = 0$ هیچ اطلاعاتی به دست نمی دهد. برای مؤلفه های y داریم

$$\sum F_y = F_l + F_r - Mg - mg = 0 \quad (12)$$

در اینجا دو نیروی مجهول داریم که نمی توانیم هر دو را از همین یک معادله تعیین کنیم. خوشبختانه یک معادله دیگر، یعنی معادله موازنه گشتاورها (معادله ۷) را هم در اختیار داریم.

می توانیم معادله ۷ را در مورد هر محوری که بر صفحه شکل ۵ عمود باشد به کار بگیریم. اگر محوری را که از انتهای چپ تیرک می گذرد اختیار کنیم، نیروی مجهول F_l از معادله گشتاورها حذف می شود. در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_l)(0) + (F_r)(L) - (mg)(L/2) - (Mg)(L/4) = 0 \quad (13)$$

یا

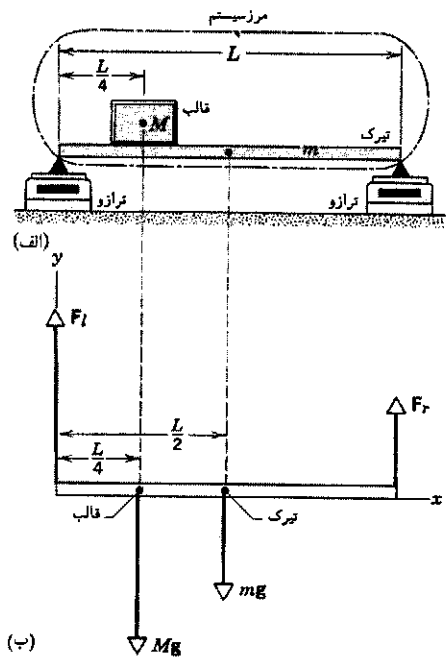
$$F_r = (g/4)(M + 2m) \\ = \left(\frac{1}{4}\right)(9.8 \text{ m/s}^2)[2.7 \text{ kg} + 2(1.8 \text{ kg})] = 15 \text{ N}$$

توجه کنید که چگونه با این محوری که انتخاب کردیم نیروی F_l از معادله گشتاور حذف شد و این امکان فراهم آمد که معادله را مستقیماً برای نیروی دیگر حل کنیم. اگر گشتاورها را حول هر نقطه دلخواهی محاسبه می کردیم معادله ای به دست می آمد که شامل F_l و F_r بود و می شد آن را همزمان با معادله ۱۲ حل کرد. انتخاب محور مناسب کمک می کند که جبر مسئله را تا حدودی ساده کنیم، ولی به هیچ وجه حادب نما را تقسیم نمی دهد.

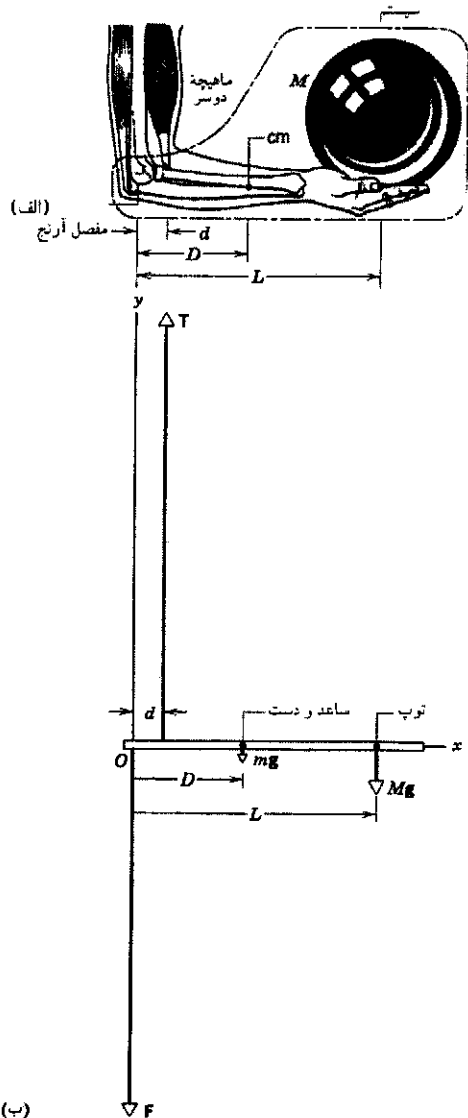
یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می کنیم و نیروهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه هایشان تجزیه می کنیم. هدف این است که محاسبات را ساده کنیم. بهتر است چنان دستگاه مختصاتی انتخاب کنیم که در آن تعداد نیروهایی که باید به مؤلفه ها تجزیه شوند به حداقل برسد. چهارم، قبل از اینکه شرط دوم تعادل (معادلات ۳ و ۴) را به کار ببریم یک دستگاه مختصات مناسب انتخاب می کنیم و گشتاورهای خارجی را در این دستگاه به مؤلفه هایشان تجزیه می کنیم. باز هم هدف ساده کردن محاسبات است و در اعمال کردن دو شرط تعادل استاتیکی، در صورتی که ببینیم کار ساده تر می شود، می توانیم از دو دستگاه مختصات متفاوت استفاده کنیم. مثلاً اگر گشتاورها را حول نقطه ای که از آن چند نیرو می گذرد در نظر بگیریم، تمام آن نیروها از معادله گشتاور حذف می شوند.

در وضعیت تعادل، گشتاورهای حاصل از تمام نیروهای خارجی باید حول هر محوری صفر باشد. گشتاورهای داخلی دو به دو همدیگر را خنثی می کنند و نیازی به در نظر گرفتن آنها نداریم. در اینجا هم از همان قرارداد فصلهای قبل در مورد علامت جبری گشتاور حول هر محور مشخص پیروی می کنیم: گشتاور را وقتی سبب ایجاد چرخش پادساعتگرد حول محور شود مثبت می گیریم.

مثال ۱. تیرک یکنواختی به طول L و جرم $m = 1.8 \text{ kg}$ در اختیار داریم. دو سر آن را روی دو ترازوی رقمی قرار می دهیم (شکل ۵ الف). قالبی به جرم $M = 2.7 \text{ kg}$ را روی این تیرک گذاشته ایم، به طوری که



شکل ۵. مثال ۱. الف) قالبی به جرم M روی تیرکی به جرم m قرار گرفته است. ترازوهای رقمی نیروهای قائمی را که به دو سر تیرک وارد می شود نشان می دهند. ب) نمودار جسم آزاد نیروهای وارد بر سیستم متشکل از تیرک و قالب.



اگر مقدار F_r را در معادله ۱۲ بگذاریم و آن را برای F_i حل کنیم، خواهیم داشت

$$F_i = (M + m)g - F_r \\ = (2.7\text{kg} + 1.8\text{kg})(9.8\text{m/s}^2) - 15\text{N} = 29\text{N}$$

توجه کنید که ارتفاع مرکز جرم قالب در محاسبات این مسئله دخالتی ندارد. آیا این از نظر فیزیکی منطقی است؟

۲. راه حل دوم. حالا مسئله را از راه دیگری حل می‌کنیم تا صحت جوابها را امتحان کرده باشیم. در این روش از معادله موازنه گشتاورها حول دو محور متفاوت استفاده می‌کنیم. با انتخاب محوری که از انتهای چپ تیرک می‌گذرد، همان‌طور که در بالا دیدیم، نتیجه می‌شود $F_r = 15\text{N}$.

محور دوم را چنان اختیار می‌کنیم که از انتهای راست تیرک بگذرد، در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\sum \tau_z = (F_r)(0) - (F_i)(L) + (mg)(L/2) \\ + (Mg)(3L/4) = 0 \quad (14)$$

از حل این معادله برای F_i نتیجه می‌گیریم

$$F_i = (g/4)(3M + 2m) \\ = \left(\frac{1}{4}\right)(9.8\text{m/s}^2)[3(2.7\text{kg}) + 2(1.8\text{kg})] = 29\text{N}$$

می‌بینیم که جوابها همان جوابهای قبلی‌اند. توجه کنید که طول تیرک در این‌گونه مسائل صریحاً در محاسبات وارد نمی‌شود.

برای تعیین دو مجهول این مسئله (F_r و F_i) نیاز به دو معادله مستقل داریم. در روش دوم، دو معادله (معادلات ۱۳ و ۱۴) معادلات مربوط به گشتاورها هستند؛ معادله نیرو (معادله ۱۲) هیچ اطلاعات مستقل دیگری به دست نمی‌دهد. در واقع، می‌توانیم نشان بدهیم که از تفریق دو معادله گشتاور، معادله نیرو حاصل می‌شود.

مثال ۲. شخصی توپ بولینگ به جرم $M = 7.2\text{kg}$ را در کف دست نگه داشته است. همان‌طور که در شکل ۶الف می‌بینیم، بازوی بازیکن قائم و ساعد افقی است. ماهیچه دو سر و ساختار استخوانی بازو چه نیروهایی به ساعد وارد می‌کنند؟ جرم ساعد و کف دست روی هم $m = 1.8\text{kg}$ است و فواصل مورد نیاز عبارت‌اند از $d = 40\text{cm}$ ، $D = 15\text{cm}$ و $L = 33\text{cm}$.

حل: سیستم مورد نظر ما تشکیل شده است از ساعد و توپ بولینگ. شکل ۶ب نمودار جسم آزاد این سیستم را نشان می‌دهد. نیروهای مجهول عبارت‌اند از T ، نیرویی که ماهیچه به ساعد اعمال می‌کند، و F ، نیرویی که بازو به ساعد اعمال می‌کند. اینجا هم مانند مثال ۱ همه نیروها در راستای قائم‌اند.

شکل ۶. مثال ۲. الف) دستی که یک توپ بولینگ را نگه داشته است. مرز سیستم را با خط چین مشخص کرده‌ایم. ب) نمودار جسم آزاد که نیروهای مؤثر را نشان می‌دهد. بردارها عمداً به مقیاس رسم شده‌اند تا نشان بدهند که چه نیروهای بزرگی توسط ماهیچه دو سر و بازو در مفصل آرنج (نقطه O) اعمال می‌شوند.

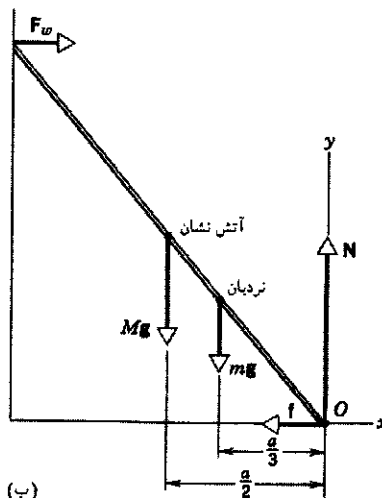
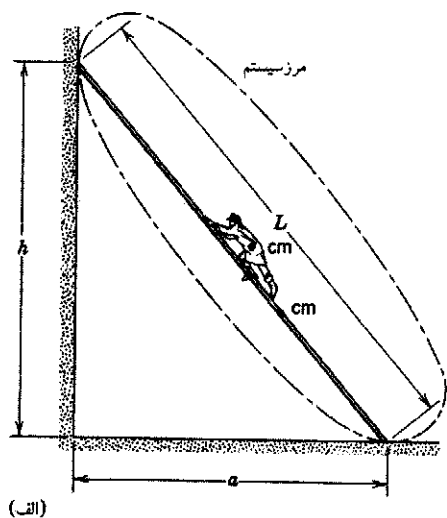
$$\text{از } \sum F_y = 0 \text{ (معادله ۶) نتیجه می‌گیریم}$$

$$\sum F_y = T - F - mg - Mg = 0 \quad (15)$$

از کاربرد معادله ۷ حول محوری که از O می‌گذرد و با استفاده از این قرارداد که چرخشهای پادساعتگرد را مثبت می‌گیریم، داریم

$$\sum \tau_z = (T)(d) + (F)(0) - (mg)(D) - (Mg)(L) = 0 \quad (16)$$

با انتخاب محوری که از نقطه O می‌گذرد، نیروی مجهول F را از این معادله حذف کرده‌ایم. معادله ۱۶ را حل می‌کنیم و از آن T را به دست



شکل ۷. مثالهای ۳ و ۴. (الف) مأمور آتش‌نشانی تا نیمه طول نردبانی که به دیوار بدون اصطکاک تکیه دارد بالا می‌رود. (ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر سیستم را (در مقیاس متناسب) نشان می‌دهد.

می‌آوریم

عمود بر سطح تماس است. محورهای مختصات را به صورتی که در شکل می‌بینید اختیار می‌کنیم و مبدأ O را محل تلاقی نردبان با زمین می‌گیریم. فاصله پای نردبان از دیوار a ، از رابطه زیر به دست می‌آید

$$a = \sqrt{L^2 - h^2} = \sqrt{(12\text{m})^2 - (9.3\text{m})^2} = 7.6\text{m}$$

از معادله ۶، معادله موازنه نیروها، داریم

$$\sum F_x = F_w - f = 0 \quad (17)$$

و

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0 \quad (18)$$

از معادله ۱۸ نتیجه می‌گیریم

$$\begin{aligned} N &= g(M + m) \\ &= (9.8\text{m/s}^2)(72\text{kg} + 45\text{kg}) = 1150\text{N} \end{aligned}$$

از معادله ۷، معادله موازنه گشتاور نیروها، با انتخاب محوری که از

نقطه O (نقطه تماس نردبان با زمین) می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (Mg)(a/2) + (mg)(a/3) = 0 \quad (19)$$

با این انتخاب مناسب، دو متغیر f و N از معادله موازنه گشتاورها حذف می‌شود. از حل معادله ۱۹ برای F_w داریم

$$\begin{aligned} F_w &= \frac{ga(M/2 + m/3)}{h} \\ &= \frac{(9.8\text{m/s}^2)(7.6\text{m})[(72\text{kg})/2 + (45\text{kg})/3]}{9.3\text{m}} \\ &= 410\text{N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= g \frac{mD + ML}{d} \\ &= (9.8\text{m/s}^2) \frac{(1.8\text{kg})(15\text{cm}) + (7.2\text{kg})(33\text{cm})}{4.9\text{cm}} \\ &= 648\text{N} = 146\text{lb} \end{aligned}$$

به این ترتیب ماهیچه دو سر ساعد را با نیرویی که تقریباً نه برابر وزن توپ بولینگ است به بالا می‌کشد.

اگر معادله ۱۵ را برای مجهول F حل کنیم و مقدار محاسبه شده

برای T را در آن قرار بدهیم، داریم

$$\begin{aligned} F &= T - g(M + m) \\ &= 648\text{N} - (9.8\text{m/s}^2)(7.2\text{kg} + 1.8\text{kg}) \\ &= 560\text{N} = 126\text{lb} \end{aligned}$$

نیروی F هم بسیار بزرگ و تقریباً هشت برابر وزن توپ بولینگ است.

مثال ۳. نردبانی به طول $L = 12\text{m}$ و جرم $m = 45\text{kg}$ به دیواری تکیه داده شده است. سر بالای این نردبان در ارتفاع $h = 9.3\text{m}$ از سطح زمین قرار دارد (شکل ۷الف). مرکز جرم نردبان در فاصله یک‌سوم طول آن از سر متکی به زمین واقع است. آتش‌نشانی به جرم $M = 72\text{kg}$ تا نیمه این نردبان بالا رفته است. فرض کنید دیوار بدون اصطکاک است، ولی زمین با نردبان اصطکاک دارد. از طرف دیوار و زمین چه نیروهایی به نردبان وارد می‌شود؟

حل: شکل ۷ب نمودار جسم آزاد نردبان را نشان می‌دهد. دیوار نیروی افقی، F_w ، به نردبان وارد می‌کند؛ چون فرض کرده‌ایم تماس بین دیوار-نردبان بدون اصطکاک است، دیوار نمی‌تواند هیچ نیروی قائمی به نردبان وارد کند. زمین نیرویی به نردبان وارد می‌کند که مؤلفه افقی آن، f ، ناشی از اصطکاک است و مؤلفه قائم آن، N ، نیروی

و از معادله ۱۷ فوراً نتیجه می‌گیریم که

$$f = F_w = 410 \text{ N}$$

از ترکیب معادلات ۲۱ و ۲۲ نتیجه می‌گیریم

$$F_w = \mu_s g (M + m) \quad (23)$$

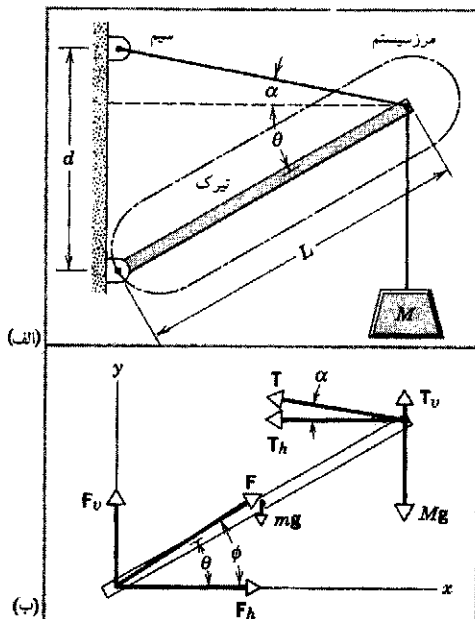
سرانجام d را از ترکیب معادلات ۲۰ و ۲۳ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d &= L \left[\frac{\mu_s h}{a} \frac{(M + m)}{M} - \frac{m}{3M} \right] \\ &= (12 \text{ m}) \left[\frac{(0.54)(9.3 \text{ m})}{7.6 \text{ m}} \frac{(72 \text{ kg} + 45 \text{ kg})}{72 \text{ kg}} - \frac{45 \text{ kg}}{(3)(72 \text{ kg})} \right] \\ &= 10.4 \text{ m} \end{aligned}$$

به این ترتیب آتش‌نشان می‌تواند تا ۸۷٪ طول نردبان را قبل از آغاز لغزش ببیند.

حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا آتش‌نشان بتواند تمام طول نردبان را بالا برود ($d = L$)؟ حداقل ضریب اصطکاک چقدر باشد تا وقتی آتش‌نشان پا روی نردبان گذاشت، نردبان نلغزد؟

مثال ۵. تیرک یکنواختی به طول $L = 3.3 \text{ m}$ و جرم $m = 8.5 \text{ kg}$ به دیواری لولا شده است (شکل ۸ الف). سیمی که در فاصله $d = 2.1 \text{ m}$ بالاتر از لولا به دیوار متصل است به سر دیگر تیرک وصل است، و طول سیم چنان است که تیرک با افق زاویه $\theta = 30^\circ$



شکل ۸. مثال ۵. الف) تیرکی را از سر پایین توسط لولا و از سر بالایی توسط یک رشته سیم به دیوار متصل کرده‌ایم. جسمی به جرم M را به سر بالایی این تیرک آویخته‌ایم. ب) نمودار جسم آزادی که نیروهای وارد بر تیرک را نشان می‌دهد. نیروی F توسط لولا اعمال می‌شود و نیروی کشش T سیم

مثال ۴. در مثال ۳، ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و نردبان μ_s است. آتش‌نشان تا چه طولی از نردبان می‌تواند بالا برود بی‌آنکه نردبان شروع به لغزش کند؟

حل: در مثال ۳، دیدیم که وقتی آتش‌نشان تا نیمی نردبان بالا رفته باشد، نیروی عمود بر سطح N برابر با 1150 N است. بیشترین نیروی اصطکاک ایستایی برابر است با $f_{\max} = \mu_s N = (0.54)(1150 \text{ N}) = 620 \text{ N}$. نیروی اصطکاک که در آن مثال تعیین کردیم $f = 410 \text{ N}$ بود که کمتر از f_{\max} است. وقتی آتش‌نشان به صعود خود روی نردبان ادامه می‌دهد، f افزایش پیدا می‌کند تا آنکه وقتی به فاصله d از پای نردبان رسید $f = f_{\max}$ می‌شود و آن وقت لغزش آغاز می‌شود. می‌خواهیم فاصله d را تعیین کنیم.

نیروهای مؤثر همان نیروهای شکل ۷ هستند. با استفاده از معادله ۷ حول محوری که از نقطه تماس نردبان با زمین می‌گذرد داریم

$$\sum \tau_z = -(F_w)(h) + (mg)(a/3) + (Mg)(da/L) = 0$$

که در آن da/L فاصله افقی بین نقطه O و امتداد وزن Mg آتش‌نشان است. از حل این معادله برای F_w نتیجه می‌شود

$$F_w = \frac{ga}{h} \left(M \frac{d}{L} + \frac{m}{3} \right) \quad (20)$$

معادله ۲۰ نشان می‌دهد که وقتی آتش‌نشان از نردبان بالا می‌رود (یعنی، وقتی d زیاد می‌شود)، نیروی F_w هم برای حفظ تعادل باید زیاد شود. برای اینکه d متناظر با شروع لغزش را تعیین کنیم، ابتدا باید F_w را به دست بیاوریم.

معادله ۶، معادله مربوط به موازنه نیروها در امتداد x ، نتیجه می‌دهد

$$\sum F_x = F_w - f = 0$$

در لحظه آغاز لغزش داریم

$$F_w = f = f_{\max} = \mu_s N \quad (21)$$

از معادله ۶ برای موازنه نیروها در امتداد محور y ، داریم

$$\sum F_y = N - Mg - mg = 0$$

یا

$$N = g(M + m) \quad (22)$$

از ترکیب چهار معادله بالا و پس از انجام عملیات جبری لازم، به دست می‌آوریم

$$F_v = 506 \text{ N}, F_h = 804 \text{ N}, T_v = 126 \text{ N}, T_h = 804 \text{ N}$$

و به این ترتیب کشش سیم برابر است با

$$T = \sqrt{T_h^2 + T_v^2} = 814 \text{ N}$$

و نیرویی که از طرف لولا به تیرک وارد می‌شود عبارت است از

$$F = \sqrt{F_h^2 + F_v^2} = 950 \text{ N}$$

توجه کنید که نیروهای T و F هر دو به طور قابل ملاحظه‌ای بیشتر از مجموع وزن تیرک و جسم آویخته به آن (۶۳۲N) است.

بردار F با افق زاویه‌ای می‌سازد که از رابطه زیر معین می‌شود

$$\phi = \tan^{-1} \frac{F_v}{F_h} = 32.7^\circ$$

بنابراین بردار نیروی برابندی که از لولا به تیرک وارد می‌شود، کاملاً در راستای خود تیرک قرار نمی‌گیرد.

در مثالهای قبلی مواظب بوده‌ایم که تعداد نیروهای مجهول را برابر با تعداد معادلات مستقلی اختیار کنیم که این نیروها را به هم مربوط می‌کنند. اگر همه نیروها در صفحه باشند، تنها می‌توانیم سه معادله مستقل برای تعادل داشته باشیم، یک معادله برای تعادل دورانی حول هر محور عمود بر صفحه و دو معادله دیگر برای تعادل انتقالی در صفحه نیروها. ولی، اغلب با بیش از سه نیروی مجهول مواجه هستیم. مثلاً اگر در مثالهای ۳ و ۴ فرض بدون اصطکاک بودن دیوار را حذف کنیم، در آن صورت چهار کمیت اسکالر مجهول داریم که عبارت‌اند از مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از دیوار به نردبان و مؤلفه‌های عمودی و افقی نیروی وارد از زمین به نردبان. چون فقط سه معادله اسکالر داریم، این نیروها را نمی‌توانیم پیدا کنیم. اگر به یکی از نیروهای مجهول مقداری نسبت بدهیم، سایر نیروها را می‌توانیم معین کنیم. ولی اگر هیچ معیاری برای نسبت دادن یک مقدار به یک نیروی مجهول نداشته باشیم، از نظر ریاضی بینهایت جواب امکانپذیر خواهد بود. بنابراین اگر بخواهیم جواب منحصر به فردی به دست بیاوریم باید بتوانیم یک رابطه مستقل دیگر بین نیروهای مجهول پیدا کنیم. (در مثال ۵، چنین رابطه‌ای را از خواص فیزیکی یکی از اجزای سیستم نتیجه گرفتیم.) محاسبه گشتاور حول یک محور دیگر، معادله مستقل دیگری به دست نمی‌دهد؛ می‌توانیم نشان بدهیم که چنین معادله‌ای ترکیبی خطی از معادله مربوط به گشتاور و دو معادله مربوط به نیروست و بنابراین حاوی اطلاعات جدیدی نیست.

مثال ساده دیگری از یک ساختار نامعین، وقتی پیش می‌آید که بخواهیم نیروهای وارد از زمین به چهار چرخ اتومبیلی را که روی سطح

می‌سازد. جسمی به جرم $M = 56 \text{ kg}$ را به انتهای بالایی تیرک آویخته‌ایم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را تعیین کنید. حل: در شکل ۸ نیروهای خارجی وارد بر تیرک را نشان داده‌ایم. تیرک را به عنوان سیستم در نظر گرفته‌ایم. چون دو نیرو از نیروهای وارد بر سیستم قائم و به طرف پایین هستند، محورهای مختصات را افقی و قائم اختیار می‌کنیم. کشش سیم و نیروی وارد از لولا به تیرک را با مؤلفه‌های افقی و قائم آنها نمایش داده‌ایم. از معادله ۶، معادله تعادل انتقالی، داریم

$$\sum F_x = F_h - T_h = 0 \quad (24)$$

و

$$\sum F_y = F_v + T_v - mg - Mg = 0 \quad (25)$$

برای اعمال شرط تعادل دورانی، محوری را انتخاب می‌کنیم که از انتهای بالایی تیرک می‌گذرد. (چرا؟) در این صورت از معادله ۷ داریم

$$\sum \tau_z = -F_v(L \cos \theta) + F_h(L \sin \theta) + mg \left(\frac{L}{2} \cos \theta \right) = 0$$

یا

$$F_v = F_h \tan \theta + \frac{mg}{2} \quad (26)$$

با قراردادن مقادیر عددی، معادلات ۲۴ تا ۲۶ به صورت زیر در می‌آیند

$$F_h = T_h$$

$$F_v + T_v = 632 \text{ N}$$

و

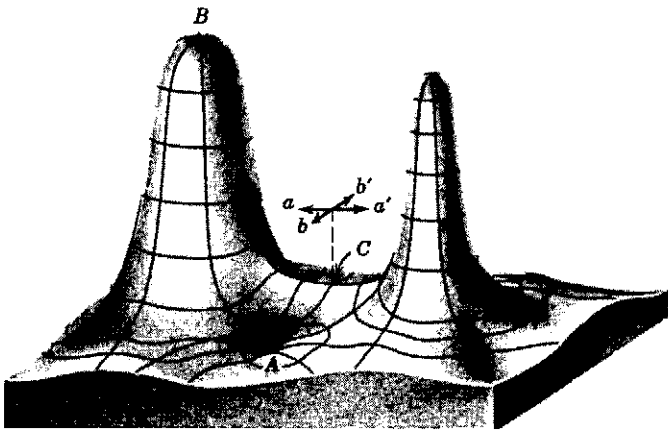
$$F_v = (0.577)F_h + 41.7 \text{ N}$$

بررسی مسئله نشان می‌دهد که در این مورد چهار مجهول، یعنی F_h ، F_v ، T_h و T_v داریم، ولی فقط توانسته‌ایم سه رابطه برای آنها بنویسیم. اگر قرار باشد این مسئله را حل کنیم، به رابطه دیگری بین این کمیتها نیاز داریم. این رابطه آخری از این واقعیت نتیجه می‌شود که از جمع T_h و T_v باید بردار T حاصل شود که در راستای سیم است. سیم (انعطاف‌پذیر) نمی‌تواند نیرویی را که عمود بر طولش باشد تحمل کند. [توجه کنید که این گفته در مورد تیرک (صلب) صدق نمی‌کند]. بنابراین چهارمین معادله ما چنین است

$$T_v = T_h \tan \alpha \quad (27)$$

که در آن داریم $\tan \alpha = (d - L \sin \theta) / (L \cos \theta) = 0.157$ که متناظر با $\alpha = 8.9^\circ$ است. بنابراین معادله چهارم ما به صورت زیر در می‌آید

$$T_v = 0.157 T_h$$



شکل ۹. یک سطح انرژی پتانسیل گرانشی. ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی گرانشی متناظر با این شکل قرار بگیرد مانند ذره‌ای رفتار می‌کند که روی یک سطح جامد واقعی و بدون اصطکاک، به همین شکل، می‌لغزد، ذره در نقاط A ، B ، یا C در حال تعادل است. در نقطه A تعادل پایدار است، زیرا اگر ذره را اندکی از A دور کنیم تمایل دارد که به همان نقطه بازگردد. در نقطه B تعادل ناپایدار است، زیرا ذره‌ای که اندکی از B دور شود تمایل به افزایش فاصله دارد. در نقطه C ، اگر ذره در امتداد محور aa' جابه‌جا شود مایل به بازگشت به نقطه C است، ولی اگر در امتداد محور bb' جابه‌جا شود مایل به افزایش فاصله است. نقطه C را نقطهٔ زین می‌نامند، زیرا این سطح در این ناحیه تقریباً به شکل زین است. تعادل خنثی را اینجا نشان نداده‌ایم؛ این نوع تعادل را باید روی سطح افقی نمایش داد.

دارد. به عبارت دیگر، می‌توانیم بگوییم که اگر جسمی در حال تعادل پایدار باشد، برای تغییر مکان جسم باید یک عامل خارجی روی آن کار انجام بدهد. این کار سبب افزایش انرژی پتانسیل جسم می‌شود. وقتی U بیشینه باشد (نقطهٔ B در شکل ۹)، ذره در حال تعادل ناپایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی از این وضعیت سبب ایجاد نیرویی می‌شود که تمایل به دور کردن ذره از موقعیت تعادل دارد. در این مورد برای تغییر مکان ذره اصلاً نیازی به کار عامل خارجی روی ذره نیست؛ این کار را نیروی پایستار انجام می‌دهد، و در نتیجه انرژی پتانسیل کاهش می‌یابد.

اگر U ثابت باشد، ذره در حال تعادل خنثی است. در این مورد ذره را می‌توان بدون اعمال هیچ نیروی دورکننده یا بازگرداننده‌ای، اندکی جابه‌جا کرد.

نکاتی که بیان کردیم در مورد ذرات صدق می‌کند، یعنی برای حرکت انتقالی معتبر است. حالا می‌خواهیم به جسم صلب بپردازیم. در این صورت علاوه بر تعادل انتقالی باید تعادل دورانی را هم در نظر بگیریم. مسئلهٔ حرکت جسم صلب در میدان گرانشی مسئلهٔ بسیار ساده‌ای است، چون می‌توانیم فرض کنیم که تمام نیروهای گرانشی وارد بر ذرات یک جسم صلب به یک نقطهٔ واحد اثر می‌کنند — چه به منظور بررسی تعادل انتقالی باشد و چه به منظور بررسی تعادل دورانی. در مسائل مربوط به تعادل تحت تأثیر نیروهای گرانشی، می‌توانیم به جای تمامی جسم صلب، نقطه‌ای با همان جرم و مستقر در گرانیگاه را در نظر بگیریم.

افقی قرار گرفته است مشخص کنیم. اگر فرض کنیم که این نیروها جملگی بر سطح زمین عمودند، در آن صورت با چهار کمیت اسکالر مجهول مواجه‌ایم. تمام نیروهای دیگر از جمله وزن اتومبیل و سرنشینان آن عمود بر سطح زمین وارد می‌شوند. بنابراین، تنها سه معادلهٔ مستقل داریم که شرایط تعادل را مشخص می‌کنند، یکی از این معادلات مربوط به تعادل انتقالی در تنها راستای مشترک همهٔ نیروهاست و دو معادلهٔ دیگر از تعادل دورانی حول دو محور عمود بر هم در صفحهٔ افق نتیجه می‌شود. پس جواب این مسئله هم از نظر ریاضی نامعین است. میز چهارپایه‌ای که همهٔ پایه‌هایش روی زمین قرار داشته باشند هم نمونهٔ دیگری از این نوع مسائل است.

البته، چون برای این مسئلهٔ فیزیکی در واقع جواب یگانه‌ای وجود دارد، باید بر مبنای فیزیکی، رابطهٔ مستقل دیگری بین نیروها پیدا کنیم تا بتوانیم مسئله را حل کنیم. برای رفع این مشکل باید توجه کنیم که هیچ ساختاری هرگز چنان صلب نیست که ما تلویحاً در این مسائل فرض کرده‌ایم. همهٔ ساختارها تا حدودی تغییر شکل می‌دهند. مثلاً، نزدیکان و دیوار تغییر شکل می‌دهند؛ لاستیک‌های اتومبیل و زمین هم تغییر شکل می‌دهند. ماهیت این تغییر شکل را قوانین کشسانی و خواص کشسانی هر ساختار تعیین می‌کنند و رابطهٔ مورد نیاز دیگر بین نیروها از همین‌جا فراهم می‌شود. بنابراین برای تحلیل کامل مسئله نه تنها به قوانین مکانیک جسم صلب، بلکه به قوانین کشسانی هم نیاز داریم. این مطالب را به‌طور خلاصه در بخش ۱۴-۵ مطالعه خواهیم کرد.

۱۴-۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

در فصل ۸، دیدیم که نیروی گرانشی یک نیروی پایستار است. برای نیروهای پایستار می‌توانیم یک تابع انرژی پتانسیل $U(x, y, z)$ تعریف کنیم، که به صورت زیر با \mathbf{F} مرتبط است

$$F_x = -\frac{\partial U}{\partial x}, \quad F_y = -\frac{\partial U}{\partial y}, \quad F_z = -\frac{\partial U}{\partial z}$$

در نقاطی که $\partial U/\partial x$ صفر است، ذره‌ای که تحت تأثیر این نیروی پایستار باشد در راستای x در تعادل انتقالی است، چون در این صورت F_x صفر است. به همین صورت، در نقاطی که $\partial U/\partial y$ یا $\partial U/\partial z$ صفر باشد، ذره به ترتیب در راستاهای y و z در تعادل انتقالی است. مشتق U در یک نقطه، و مؤلفهٔ نیروی متناظر با آن در صورتی صفر است که U در آن نقطه دارای یک مقدار فرین (بیشینه یا کمینه) باشد، یا اینکه U نسبت به مختصهٔ متغیر ثابت باشد. پس جسم وقتی در حال تعادل است که U بیشینه، کمینه یا ثابت باشد. هر یک از این سه حالت را جداگانه بررسی می‌کنیم.

وقتی U کمینه باشد (نقطهٔ A در شکل ۹)، ذره در حال تعادل پایدار است؛ هرگونه جابه‌جایی ذره از این وضعیت سبب ایجاد یک نیروی بازگرداننده می‌شود که میل به بازگرداندن ذره به مکان تعادل

تبادل خنثای جسم صلب با یک کره روی یک سطح افقی نشان داده می‌شود (شکل ۱۰ ج). اگر به یک نیروی افقی اعمال شود، گرانیگاه آن نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید بلکه روی یک خط افقی حرکت می‌کند. مسیر گرانیگاه در شکل با خط چین افقی مشخص شده است. انرژی پتانسیل کره، همانند انرژی پتانسیل ذره‌ای با جرم معادل واقع در گرانیگاه، در طی جابه‌جایی ثابت است. این سیستم در غیاب نیرو هیچ تمایلی به حرکت در جهت خاصی ندارد. جسم صلب در صورتی در حال تعادل خنثی است که نیروهای افقی نتوانند گرانیگاه آن را پایین و یا بالا ببرند.

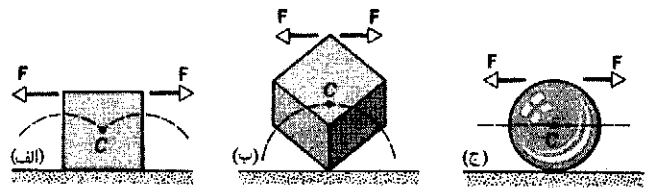
تبادل یک جسم صلب آویخته در چه شرایطی پایدار است؟ چه موقع ناپایدار است؟ و در کدام شرایط خنثی است؟

۱۴-۵ کشسانی

میز سه پایه ساختاری است که می‌توانیم تعادل آن را با روشهایی که در این فصل ارائه شد بررسی کنیم. هر سه پایه روی زمین قرار دارند، و زمین نیروهای قائمی به هر کدام از آنها وارد می‌کند. با استفاده از یک معادله نیرو (وزن که در گرانیگاه وارد می‌شود باید با جمع سه نیروی قائم برابر باشد) و دو معادله گشتاور (گشتاورها را حول دو محور عمود بر هم واقع در صفحه افقی کف اتاق محاسبه می‌کنیم)، می‌توانیم سه نیروی مجهول را پیدا کنیم.

اما مسئله میز چهار پایه شامل چهار نیروی مجهول است و نمی‌توانیم، بدون داشتن اطلاعات بیشتری در مورد ارتباط میان نیروهای قائم، آن را حل کنیم. مثلاً، فرض کنید پایه‌ها از نظر طول اندکی با هم تفاوت دارند. با قراردادن یک وزنه بسیار سنگین روی میز می‌توانیم پایه‌های آن را به اندازه‌های متفاوت فشرده کنیم، تا هر چهار تایشان با زمین در تماس قرار بگیرند. در این صورت می‌توانیم با استفاده از فشرده‌گی پایه‌ها رابطه چهارم بین نیروها را پیدا کنیم و به حل مسئله بپردازیم (نگاه کنید به مثال ۸).

صلبیت اجسام به اصطلاح صلب در واقع یک تصور است. جامدها از اتمها شکل گرفته‌اند و این اتمها در تماس صلب با یکدیگر قرار ندارند. اتمها رویه‌های سختی ندارند که بتوان آنها را خیلی کب در کنار هم چید؛ ابر الکترونی آنها را می‌توان با نیروهای خارجی شکل داد و یا تغییر شکل داد. در اجسام جامد، پیوند اتمها به واسطه نیروهایی است که تا حدود زیادی مانند نیروی فنر رفتار می‌کنند. شکل ۱۱ قسمتی از یک شبکه جامد را نشان می‌دهد. شبکه آرایش منظمی از اتمهاست که می‌توان آن را در بلورها مشاهده کرد. هر اتم تحت تأثیر شش فزنی که آن را احاطه کرده به حال تعادل درآمده است؛ ثابت مؤثر فنر بسیار بزرگ است، یعنی تغییر دادن فاصله میان اتمها مستلزم نیروی بسیار بزرگی است. به خاطر بزرگی این نیروست که فرض می‌کنیم اجسام صلب‌اند. در جامدهای دیگر، آرایش اتمها ممکن است به صورتی غیر از شبکه مکعبی، مثلاً به شکل ردیفهای طولیل باشد؛ این نوع اجسام خیلی صلب نیستند. لاستیک نمونه‌ای از آنهاست.



شکل ۱۰. تعادل یک جسم گسترده (الف) مکعبی که روی یک وجه تکیه دارد در تعادل پایدار است، زیرا اگر در اثر نیروی افقی F از جا بلند شود، گرانیگاه آن، C ، بالا می‌رود. (ب) مکعبی که روی یک کنج متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است، چون در اثر نیروی افقی F ، گرانیگاهش سقوط می‌کند. (ج) کره در مقابل یک نیروی افقی در حال تعادل خنثی است، چون در اثر اعمال نیروی F ، گرانیگاه C نه بالا می‌رود و نه پایین می‌آید. این معیارهای تعادل برای اجسام بعددار را با شرایط مربوط به ذره شکل ۹ مقایسه کنید.

مثلاً مکعبی را در نظر بگیرید که روی یک وجه اش روی یک میز افقی قرار گرفته است. گرانیگاه مکعب در مرکز سطح مقطع مرکزی‌اش واقع می‌شود (شکل ۱۰ الف). فرض کنید نیرویی به این مکعب اعمال می‌کنیم که آن را حول محوری در امتداد یکی از اضلاعش و بدون لغزش می‌چرخاند. توجه کنید که گرانیگاه بالا برده شده و به این ترتیب روی مکعب کار صورت گرفته است، و این کار انرژی پتانسیل را افزایش می‌دهد. اگر نیرو را حذف کنیم، مکعب به وضعیت اولیه‌اش باز می‌گردد. بنابراین این وضعیت اولیه یک حالت تعادل پایدار است. این فرایند، برای ذره‌ای با همان جرم در مکان گرانیگاه، در شکل نشان داده شده است. خط چین نماینده مسیری است که گرانیگاه در طی این حرکت می‌پیماید. مشاهده می‌کنیم، چنان که باید، ذره در مکان تعادل پایدار، حداقل انرژی پتانسیل را دارد. به این ترتیب می‌شود نتیجه گرفت که جسم صلب در صورتی در تعادل پایدار است که با اعمال نیرو بتوانیم گرانیگاه آن را بالا ببریم ولی نتوانیم پایین بیاوریم.

اگر مکعب را بچرخانیم تا روی یک کنج به توازن برسد (شکل ۱۰ ب). در این صورت هم مکعب در حال تعادل است. مشاهده می‌کنیم که این وضعیت تعادل یک وضعیت ناپایدار است. اعمال کوچکترین نیروی افقی سبب دور شدن مکعب از این وضعیت می‌شود و انرژی پتانسیل هم در این فرایند کاهش می‌یابد. ذره‌ای با جرم معادل، که در گرانیگاه مستقر باشد مسیری را که با خط چین نشان داده‌ایم طی می‌کند. در وضعیت تعادل ناپایدار، همان‌طور که باید، ذره بیشترین انرژی پتانسیل را دارد. مطلب بالا را می‌توانیم چنین خلاصه کنیم که، جسم صلب در حال تعادل ناپایدار است اگر هر نیروی افقی بتواند گرانیگاه آن را پایین بیاورد. مکعبی که روی یک ضلع‌اش متوازن شده باشد در تعادل ناپایدار است اگر تحت تأثیر یک نیروی افقی عمود بر آن ضلع قرار بگیرد، ولی در مقابل نیروی افقی‌ای که موازی با آن ضلع وارد شود در تعادل پایدار است. به این ترتیب ذره ممکن است نسبت به یک مختصه در تعادل پایدار باشد و نسبت به مختصه دیگر در تعادل ناپایدار. چنین وضعیتی را نقطه زین می‌نامیم. این وضعیت متناظر با نقطه C در شکل ۹ است.

متناسب‌اند. ضریب تناسب آنها را مدول کشسانی می‌نامند. بنابراین

$$(28) \quad \text{کرنش} \times \text{مدول کشسانی} = \text{تنش}$$

در شکل ۱۳ ارتباط بین تنش و کرنش را برای یک استوانه فولادی آزمونی (مانند شکل ۱۴) نشان داده‌ایم. در گستره وسیعی از تنشهای اعمال شده، منحنی تنش-کرنش یک منحنی خطی است و معادله ۲۸، با یک مدول ثابت، برقرار است (این قسمت متناظر با بخش خطی شکل ۱۳ است). با افزایش تنش، ممکن است رابطه تنش-کرنش غیرخطی شود، ولی ماده باز هم کشسان می‌ماند؛ یعنی، اگر تنش را برداریم، نمونه به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد.

اگر تنش از استقامت تسلیم یا حد کشسانی نمونه بیشتر شود، نمونه به‌طور دائمی تغییر شکل می‌دهد و پس از حذف تنش هم به ابعاد اولیه‌اش بازمی‌گردد، این نوع رفتار را رفتار پلاستیک می‌گوییم. فراتر از آنچه که استقامت تسلیم نامیده می‌شود، ناگزیر گسیختگی پدید می‌آید. این پدیده وقتی روی می‌دهد که تنش به استقامت حدی برسد.

کشش و تراکم

در مورد کشیدگی یا فشردگی ساده، تنش را به‌صورت F/A ، نیرو تقسیم بر مساحتی که نیرو بر آن اثر می‌کند، و کرنش، یا تغییر شکل را به‌صورت کمیت بدون بعد $\Delta L/L$ ، تغییر نسبی طول نمونه، تعریف می‌کنیم. توجه کنید که اگر نمونه یک میله بلند باشد، نه تنها تمامی میله بلکه هر قسمت آن، تحت تأثیر یک تنش معلوم، کرنش یکسانی را متحمل می‌شود. چون کرنش یک کمیت بدون بعد است، معادله ۲۸ دارای بعد تنش، یعنی نیرو بر واحد سطح است.

مدول مربوط به تنشهای کششی و تراکمی را مدول یانگ می‌نامند. این مدول در کاربردهای مهندسی با نماد E نشان داده می‌شود. معادله ۲۸ به صورت زیر درمی‌آید

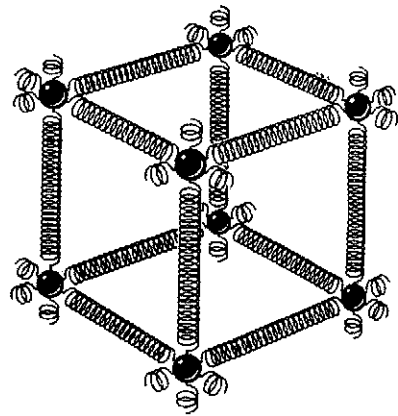
$$\frac{E}{A} = E \frac{\Delta L}{L}$$

یا

$$\Delta L = \frac{EL}{EA} \quad (29)$$

کرنش در یک نمونه، $\Delta L/L$ ، را معمولاً می‌توان به راحتی با کرنش سنج اندازه‌گیری کرد (شکل ۱۵). این وسایل ساده و کارآمد، که می‌توان آنها را مستقیماً با چسب روی ماشین‌آلات در حال کار نصب کرد، مبتنی بر این اصل ساخته شده‌اند که مقاومت الکتریکی یک سیم (از جنس بعضی مواد) تابعی از کرنش در سیم است.

با آنکه ممکن است مدول کشش و فشارش تقریباً یکی باشد، امکان دارد استقامت جدی در دو مورد کاملاً متفاوت باشد. مثلاً بتون تحت فشار بسیار مقاوم است ولی تحت کشش آن چنان سست است که هرگز از آن در کارهای مهندسی (به این منظور) استفاده نمی‌شود.



شکل ۱۱. اتمهای یک جسم جامد روی یک شبکه سه‌بعدی تکرارشونده توزیع شده‌اند. نیروهای بین اتمی را با فنر نمایش داده‌ایم.

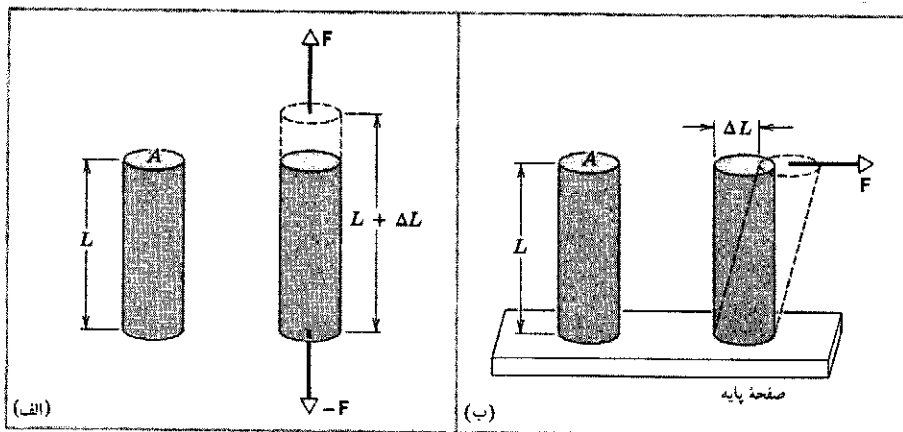
وقتی چنین موادی را می‌کشیم، در واقع نیروی کافی برای تغییر دادن فاصله بین آنها را اعمال می‌کنیم.

همه اجسام "صلب" واقعی تا حدودی کشسان‌اند، یعنی، با کشیدن، هل دادن، چرخاندن یا فشردن آنها می‌توانیم ابعادشان را اندکی تغییر بدهیم. برای اینکه شناختی از مرتبه بزرگی این نوع تغییر ابعاد داشته باشیم، استوانه‌ای فولادی به طول ۱m و قطر ۱cm را در نظر می‌گیریم. اگر اتومبیل کوچکی را از چنین میله‌ای بیاویزیم، میله فقط در حدود ۵mm یا ۰.۵% در صد تغییر طول می‌دهد. به علاوه، وقتی اتومبیل را جدا کنیم، میله به طول اصلی‌اش بازمی‌گردد.

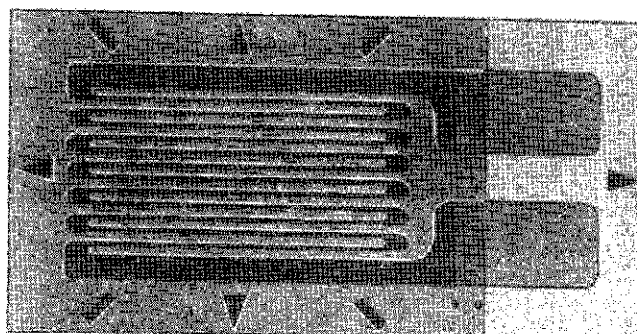
اگر به این میله دو اتومبیل آویزان کنید، میله به‌طور دائم کشیده خواهد ماند و با برداشتن بار به طول اولیه‌اش باز نمی‌گردد. اگر سه اتومبیل به آن آویزان کنید، میله می‌شکند. درست در لحظات قبل از گسیستگی، افزایش طول آن کمتر از ۲% است. تغییر شکلهایی به این اندازه اگرچه کوچک به نظر می‌رسند، ولی در کارهای مهندسی بسیار اهمیت دارند.

در شکل ۱۲ دو نوع تغییر شکل (یا تغییر ابعاد) ممکن برای جسم جامد، در اثر نیروهای وارد بر آن را نشان داده‌ایم. در شکل ۱۲ الف استوانه تحت تأثیر نیروهای کششی قرار گرفته است. در شکل ۱۲ ب استوانه تحت تأثیر نیروهای به اصطلاح برشی تغییر شکل پیدا کرده است. این نوع تغییر شکل مانند تغییر شکل یک بسته کارت یا تغییر شکل یک کتاب است. (نوع سومی که ممکن است یک جسم تغییر شکل بدهد، تغییر شکل در اثر فشردگی یکنواخت است. این نوع تغییر شکل ناشی از اعمال نیروهای یکنواخت در همه جهتهاست. فشردگی یکنواخت را در فصل ۱۷ بررسی می‌کنیم.) آنچه در هر سه این صورتهای مشترک است یکی تنش است که به نیروهای اعمال شده مربوط می‌شود و دیگری کرنش، که نوعی از تغییر شکل است.

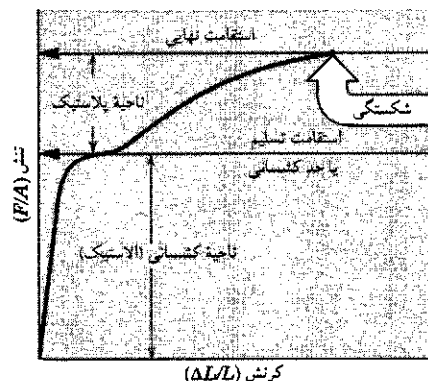
تنش و کرنش در موارد متفاوت شکل ۱۲ به شکلهای مختلفی بروز می‌کنند، ولی در محدوده کاربردهای مفید مهندسی، با هم



شکل ۱۲. (الف) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش کششی به اندازه ΔL درازتر شده است. (ب) استوانه‌ای تحت تأثیر تنش برشی، مانند یک دسته کارت تغییر شکل داده است.



شکل ۱۵. یک کرنش‌سنج با ابعاد کلی ۹۸mm در ۴.۶mm. این سنجه را با چسب به جسمی که می‌خواهیم کرنش آن را اندازه‌گیری کنیم متصل می‌کنیم. مقاومت الکتریکی سنجه با کرنش تغییر می‌کند و این امکان را فراهم می‌آورد تا کرنشهایی تا حدود ۳٪ را اندازه‌گیری کنیم.



شکل ۱۳. منحنی تنش-کرنش برای یک نمونه فولادی، مانند شکل ۱۴. وقتی تنش برابر با استقامت تسلیم نمونه باشد، نمونه به طور دائمی تغییر شکل می‌دهد. وقتی تنش برابر با استقامت حدی نمونه شود، نمونه از هم می‌گسلد.



شکل ۱۴. نمونه مورد آزمون برای تعیین منحنی تنش-کرنش (مانند شکل ۱۳).

در جدول ۱ مقادیر مربوط به مدول یانگ و سایر خواص کشسانی چند نوع مصالح مورد استفاده در مهندسی را آورده‌ایم.

برش

در مورد نیروهای برشی هم تنش به صورت نیرو بر واحد سطح است، ولی در اینجا بردار نیرو در صفحه سطح مورد نظر قرار می‌گیرد و بر آن عمود نیست. کرنش هم به صورت نسبت بدون بعد $\Delta L/L$ است. این کمیتها در شکل ۱۲ ب نشان داده شده‌اند. مدول مربوط به اینگونه نیروها را که در کاربردهای مهندسی با نماد G نشان داده می‌شود، مدول برشی می‌نامیم. معادله ۲۹، با نشان دادن G به جای E ، در مورد تنشهای برشی هم به کار می‌رود.

تنشهای برشی در میل‌گردانهایی که زیر بار دوران می‌کنند، در شکستگیهای استخوان به علت پیچش، و در فترها نقش بسیار مهمی دارند.

مثال ۶. میله‌ای از فولادسازه‌ای در اختیار داریم. شعاع R این میله ۹۵mm و طول L آن برابر ۸۱cm است. نیروی $F = ۶.۲ \times ۱۰^۴ N$ (حدود ۷ تن) این میله را در راستای محور می‌کشد. (الف) تنش در این میله چقدر است؟ (ب) در اثر این نیرو میله چقدر افزایش طول پیدا می‌کند؟

حل: (الف) تنش طبق تعریف عبارت است از

$$\text{تنش} = \frac{F}{A} = \frac{F}{\pi R^2} = \frac{۶.۲ \times ۱۰^۴ N}{(\pi)(۹.۵ \times ۱۰^{-۲} m)^2} = ۲.۲ \times ۱۰^۸ N/m^2$$

استقامت تسلیم برای فولادسازه‌ای برابر با $۲.۵ \times ۱۰^۸ N/m^2$ است، پس این تنش خیلی نزدیک به استقامت حدی میله است.

(ب) با استفاده از معادله ۲۹ و نتیجه‌ای که در (الف) به دست

آوردیم داریم

$$\Delta L = \frac{(F/A)L}{E} = \frac{(۲.۲ \times ۱۰^۸ N/m^2)(۰.۸۱ m)}{۲.۰ \times ۱۰^{۱۱} N/m^2} = ۸.۹ \times ۱۰^{-۴} m = ۰.۸۹ mm$$

جدول ۱. بعضی خواص کشسانی بعضی از مصالح مورد استفاده در مهندسی.

مواد	چگالی (kg/m ³)	مدول یانگ (۱۰ ^۹ N/m ^۲)	استقامت حدی (۱۰ ^۶ N/m ^۲)	استقامت خم شدن (۱۰ ^۶ N/m ^۲)
فولاد ^۱	۷۸۶۰	۲۰۰	۴۰۰	۲۵۰
آلومینیم	۲۷۱۰	۷۰	۱۱۰	۹۵
شیشه	۲۱۹۰	۶۵	۲۵۰	—
بتون ^۲	۲۳۲۰	۳۰	۲۴۰	—
چوب ^۳	۵۲۵	۱۳	۲۵۰	—
استخوان	۱۹۰۰	۲۹	۲۱۷۰	—
پلی استرین	۱۰۵۰	۳	۴۸	—

۱. فولادسازه‌ای (با استاندارد ASTM - A۳۶)

۲. تحت تراکم

۳. استقامت بالا

۴. نوعی کاج

چوبی با سطح مقطع $A = 17 \text{ cm}^2$ است. مدول یانگ برای چوب اگر صفحه‌ی میز تراز باقی بماند، هر یک از سه پایه کوتاه‌تر باید با نیروی یکسان F_T به یک اندازه، ΔL_T متراکم شده باشند. پایه بلندتر هم باید با نیروی F_1 به اندازه ΔL_1 متراکم شده باشد، و باید شرط زیر برقرار باشد می‌کند؟

حل: صفحه‌ی میز را به عنوان سیستم مورد مطالعه انتخاب می‌کنیم. اگر صفحه‌ی میز تراز باقی بماند، هر یک از سه پایه کوتاه‌تر باید با نیروی یکسان F_T به یک اندازه، ΔL_T متراکم شده باشند. پایه بلندتر هم باید با نیروی F_1 به اندازه ΔL_1 متراکم شده باشد، و باید شرط زیر برقرار باشد

$$\Delta L_T + d = \Delta L_1$$

از معادله ۲۹ ($\Delta L = FL/EA$)، رابطه‌ی بالا را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم

$$F_T D + dAE = F_1(D + d) \simeq F_1 D \quad (30)$$

که در جمله آخر تساوی، از d در مقایسه با D چشم پوشیده‌ایم. از معادله ۶ برای موازنه نیروها در راستای قائم، داریم

$$\sum F_y = 3F_T + F_1 - Mg = 0 \quad (31)$$

اگر معادلات ۳۰ و ۳۱ را برای کمتهای مجهول حل کنیم، به دست می‌آوریم

$$F_T = \frac{Mg}{4} - \frac{dAE}{4D} = \frac{(290 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2)}{4} - \frac{(0.05 \text{ m})(10^{-4} \text{ m}^2)(1.3 \times 10^{11} \text{ N/m}^2)}{(4)(1.0 \text{ m})} = 711 \text{ N} - 163 \text{ N} = 548 \text{ N}$$

به این ترتیب کرنش $\Delta L/L$ برابر است با $(81 \text{ m}) / (9 \times 10^{-4} \text{ m})$ ، که برابر با 1.1×10^{-2} یا ۱۱٪ است.

مثال ۷. حداقل قطر استخوان قلم ران در مردان در حدود 2.8 cm است، که متناظر است با سطح مقطع $A = 6 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ تحت چه بار تراکمی‌ای این استخوان می‌شکند؟

حل: از جدول ۱ می‌بینیم که استقامت حدی، S_u ، استخوان تحت تراکم برابر است با $170 \times 10^6 \text{ N/m}^2$. بنابراین نیروی فشارشی به صورت زیر به دست می‌آید

$$F = S_u A = (170 \times 10^6 \text{ N/m}^2)(6 \times 10^{-4} \text{ m}^2) = 1.0 \times 10^5 \text{ N}$$

این نیرو تقریباً معادل ۱۱ تن است. با آنکه این نیرو نیروی بزرگی است، ولی امکان مواجه شدن با آن وجود دارد. مثلاً ممکن است در یک فرود ناشیانه با چتر روی زمین سخت چنین نیرویی به پاها وارد شود. لازم نیست که نیرو مداوم باشد؛ چند میلی‌ثانیه هم کافی است!

حالا این آمادگی را داریم که بفهمیم چگونه خواص کشسانی مواد می‌تواند در تعیین شرایط تعادل مفید باشد. به مثال زیر توجه کنید.

مثال ۸. طول سه تا از پایه‌های یک میز چهارپایه $D = 1.0 \text{ m}$ است؛ پایه چهارم اندکی، به اندازه $d = 50 \text{ mm}$ ، از سه پایه دیگر بلندتر است، بنابراین میز کمی لنگ است. یک استوانه فولادی سنگینی به جرم $M = 290 \text{ kg}$ را به طور سرپا روی میز قرار می‌دهیم، بدین ترتیب همه پایه‌ها متراکم می‌شوند و میز دیگر لنگی ندارد.

طنابهایش سفت بسته‌ایم، و (ب) نو را شل بسته‌ایم، طوری که مقدار قابل توجهی شکم داده است. درباره پاسخ خودتان توضیح بدهید.
۱۰. یک سر نردبانی را به زمین و سر دیگر آن را به دیوار قائمی تکیه داده‌ایم. احتمال لغزش نردبان وقتی روی پله پایین ایستاده‌ایم بیشتر است یا وقتی روی پله بالا ایستاده‌ایم؟ توضیح بدهید که چرا.

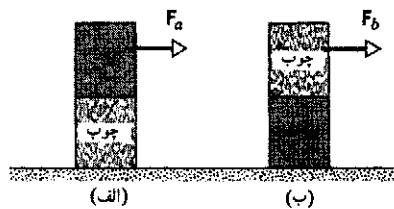
۱۱. کتابی روی میزی قرار گرفته است. میز نیرویی دقیقاً برابر با وزن کتاب به طرف بالا به آن وارد می‌کند. میز از کجا "می‌داند" که چه نیرویی به طرف بالا باید وارد کند؟ این نیرو، از طریق چه سازوکاری وارد عمل می‌شود؟^۱

۱۲. اگر چنان در برابر یک در باز بایستیم که صورتمان در برابر لبه در و هر پایمان در یک طرف در قرار بگیرد، در می‌یابیم که نمی‌توانیم روی پنجه‌ها بایستیم. چرا؟

۱۳. روی یک صندلی که پشتی آن قائم است بنشینید و سعی کنید بدون خم شدن به سمت جلو از جا بلند شوید. چرا نمی‌توانید این کار را انجام بدهید؟

۱۴. یک تیرک موازنه بلند به بندباز در حفظ تعادلش کمک می‌کند. چگونه؟

۱۵. یک قالب مرکب متشکل از چوب و فلز روی سطح یک میز قرار گرفته است. در کدام یک از دو وضعیتی که در شکل ۱۶ نشان داده شده است می‌توانید قالب را با نیروی کمتری واژگون کنید؟



شکل ۱۶. پرسش ۱۵

۱۶. در مثال ۵، چرا منظور کردن اصطکاک لولا ضروری نیست؟
۱۷. تابلویی توسط دو سیم به دیواری آویزان شده است. سیمها باید در چه راستاهایی باشند تا کشش در آنها به حداقل برسد؟ توضیح بدهید که چطور با آنکه جرم تابلو معین است تعادل تابلو به‌ازای راستاها و کششهای متفاوتی امکان دارد.
۱۸. نشان بدهید که چگونه می‌توان با استفاده از یک نیروسنج اجسامی را وزن کرد که وزن آنها خیلی بیشتر از بزرگترین مقداری است که نیروسنج می‌تواند نشان بدهد.

۱۹. با استفاده از نیروها و گشتاورها توضیح بدهید که چگونه یک درخت می‌تواند در بادهای بسیار شدید تعادلش را حفظ کند.

۲۰. ویروسی که در یک لوله آزمایش پر از مایع در دستگاه سانتریفوژ

۱. نگاه کنید به

"The Smart Table," Earl Zwicker, *The Physics Teacher*, December 1981, p. 633.

$$F_1 = \frac{Mg}{4} + \frac{3dAE}{4D}$$

$$= 711\text{N} + 489\text{N} = 1200\text{N}$$

می‌توانیم نشان بدهیم، برای اینکه میز به‌وضعیت تعادل برسد، هر یک از سه پایه کوتاهتر به‌اندازه 42mm و پایه بلندتر به‌اندازه 92mm متراکم می‌شود. اختلاف این دو مقدار 50mm ، یعنی همان مقداری است که انتظار می‌رود.

برای اینکه سطح میز افقی قرار بگیرد باید استوانه را نزدیکتر به پایه بلندتر قرار بدهیم تا به هر یک از پایه‌های کوتاهتر. محل دقیق استوانه را می‌توانیم از معادله موازنه گشتاورها پیدا کنیم، به شرطی که ابعاد سطح میز و موقعیت پایه‌ها را بدانیم.

پرسشها

۱. آیا معادله‌های ۱ و ۳ هر دو با هم شرایط لازم و کافی برای تعادل مکانیکی را فراهم می‌آورند؟ برای تعادل ایستایی چطور؟

۲. آیا توپ بیسبال در لحظه‌ای که در بالاترین نقطه مسیرش یک پرواز قائم به حال سکون درمی‌آید در حال تعادل است؟

۳. آیا وزنه یک آونگ ساده در هیچ نقطه‌ای از مسیرش در حال تعادل هست؟ اگر چنین نقطه‌ای وجود دارد، آن نقطه کدام است؟

۴. چرخشی که با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول محور ثابتی می‌چرخد در حال تعادل مکانیکی است، چون هیچ نیرو یا گشتاور خارجی به آن وارد نمی‌شود. ولی ذراتی که چرخ را تشکیل داده‌اند شتاب مرکزگرای a به‌سوی محور دارند. چون $a \neq 0$ است، چگونه می‌توان گفت که چرخ در حال تعادل است؟

۵. مثالهایی بیاورید از مواردی که در آنها با آنکه برابند نیروهای وارد بر یک جسم صفر است آن جسم در حال تعادل نیست.

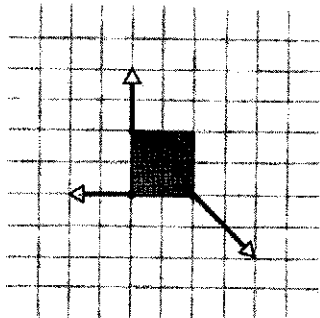
۶. آیا در یک ساختمان مسکونی مرکز جرم و گرانیگاه برهم منطبق‌اند؟ در مورد یک دریاچه چطور؟ تحت چه شرایطی تفاوت میان مرکز جرم و گرانیگاه قابل توجه می‌شود؟ مثالی ذکر کنید.

۷. اگر جسم صلبی را بدون چرخش به‌هوا پرتاب کنیم، در صورتی که بتوانیم از مقاومت هوا چشم‌پوشیم، در طی پرواز هم چرخشی کسب نمی‌کند. از این آزمایش ساده در مورد مرکز ثقل (گرانیگاه) چه نتیجه‌ای می‌گیریم؟

۸. قهرمان المپیک ژیمناستیک ماری لورتون عملیات حیرت‌انگیزی روی پارالل با میله‌های ناهمسطح انجام می‌داد. کسی به‌او می‌گوید که تحلیل دقیق فیلمهای عملیات این ژیمناست نشان می‌دهد که مرکز جرم این ژیمناست در تمام حرکتهایی که انجام می‌دهد همواره، همان‌طور که قوانین فیزیک ایجاب می‌کند، بالاتر از تکیه‌گاه(های) او قرار دارد. درباره این گفته چه نظری دارید؟

۹. نوبی را بین دو درخت بسته‌ایم و آن‌را تکان می‌دهیم. در کدام یک از دو مورد زیر احتمال پاره‌شدن آن بیشتر است: (الف) نو را با کشیدن

که بیشترین گشتاور را حول تکیه‌گاه (الف) به سمت جلوی صفحه و (ب) به سمت پشت صفحه ایجاد می‌کند چند است؟
 ۲. یک جسم صلب مربع شکل با وزن ناچیز تحت تأثیر سه نیرو قرار گرفته است، که مطابق شکل ۱۸ به سه گوشه آن وارد می‌شوند. این نیروها در شکل با بردارهایی در مقیاس متناسب رسم شده‌اند. (الف) آیا شرط اول تعادل برقرار است؟ (ب) آیا شرط دوم تعادل برقرار است؟ (ج) اگر جواب هر یک از دو قسمت قبلی منفی است، آیا نیروی چهارمی می‌تواند تعادل جسم را برقرار کند؟ اگر چنین نیرویی وجود دارد، مقدار، جهت و نقطه اثر آن را مشخص کنید.

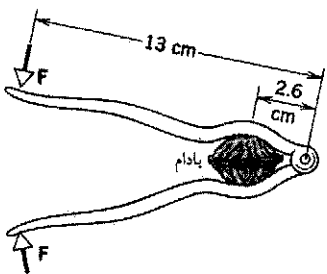


شکل ۱۸. مسئله ۲

۳. ثابت کنید که هرگاه جسمی فقط تحت تأثیر سه نیرو در تعادل باشد، این نیروها باید هم‌صفحه باشند و خط اثرهای آنها یا باید همدیگر را در یک نقطه قطع کنند یا با هم موازی باشند.

بخش ۱۴-۳ مثالهایی از تعادل

۴. فرض کنید برای اینکه بادامی را بشکنیم لازم است که نیروی ۴۶N از دو طرف به آن وارد کنیم. با استفاده از بادام‌شکن شکل ۱۹ چه نیرویی، F ، برای شکستن این بادام لازم است؟



شکل ۱۹. مسئله ۴

۵. ارتفاع برج کج بیزا ۵۵ متر و قطر آن 70 m است (شکل ۲۰). قسمت بالای برج به اندازه 40 m از حالت قائم جابه‌جا شده است. برج را به صورت یک استوانه دایره‌ای بکنواخت در نظر بگیرید، (الف) چه جابه‌جایی اضافی دیگری می‌تواند تا برج را به مرز واژگونی برساند؟ (ب) در آن لحظه برج با امتداد قائم چه زاویه‌ای می‌سازد؟ (فعلاً آهنگ

در حال چرخش باشد، از دیدگاه ناظر ساکن در آزمایشگاه، حرکت دایره‌ای بکنواخت (یعنی، حرکت شتابدار) دارد. ولی ناظری که با دستگاه سانتریفوژ می‌چرخد و بیروس را بدون شتاب می‌بیند. توضیح بدهید که چگونه این و بیروس می‌تواند برای ناظر دوم در حال تعادل باشد ولی برای ناظر اول خیر.

۲۱. قالبی به شکل مکعب مستطیل که نسبت اضلاع آن به صورت ۱ : ۲ : ۳ است، روی یک سطح افقی قرار دارد. در چه وضعیتی، یعنی وقتی کدام وجه آن در تماس با سطح افقی است، قالب در پایدارترین تعادل است؟

۲۲. آیا جسم واقعاً صلب وجود دارد؟ اگر وجود دارد، مثالی بیاورید. اگر نه، توضیح بدهید که چرا.

۲۳. در صندلی راننده یک اتومبیل ساکن نشسته‌اید. به شما گفته می‌شود که نیروهایی که زمین به طرف بالا بر هر یک از چهارچرخ وارد می‌کند با هم متفاوت‌اند. تأیید صحت و سقم این ادعا مستلزم بررسی چه عواملی است؟

۲۴. در مثال ۳، اگر دیوار بدون اصطکاک نباشد، آیا قوانین تجربی اصطکاک شرط اضافی دیگری را که برای تعیین مؤلفه قائم نیروی وارد از دیوار به نردبان لازم است فراهم می‌کند؟

۲۵. وقتی استوانه مورد آزمایش در شکل ۱۴ در اثر تنش اعمال شده کشیده می‌شود، افزایش طول می‌دهد. آیا قطر استوانه هم تغییر می‌کند؟ اگر می‌کند چگونه؟

۲۶. آیا مدول یانگ برای لاستیک از مدول یانگ برای فولاد بیشتر است یا کمتر؟ با این معیار، آیا لاستیک کشسانتر از فولاد است؟

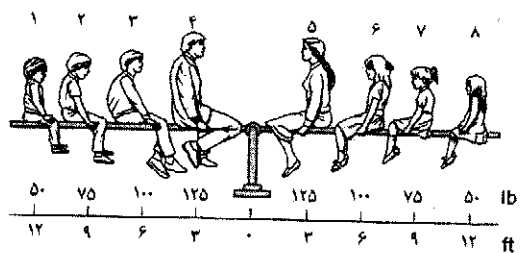
۲۷. یک تیر آهن افقی را که هر سر آن روی تکیه‌گاهی قرار دارد در نقطه وسط باز کرده‌ایم. نشان دهید که قسمت بالایی تیرک تحت تراکم است، در حالی که قسمت پایینی آن تحت کشش است.

۲۸. چرا در ساختارهای بتونی از میل‌گردهای تقویت‌کننده استفاده می‌کنند؟ (استقامت کششی بتون را با استقامت فشارشی (تراکمی) آن مقایسه کنید.)

مسئله‌ها

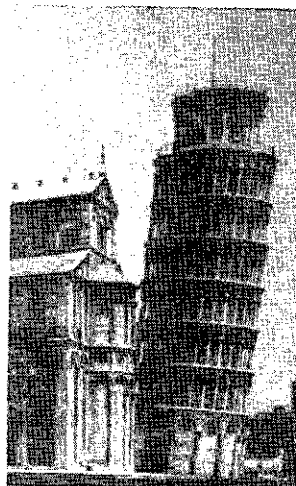
بخش ۱۴-۱ شرایط تعادل

۱. یک خانواده هشت‌نفره که وزنه‌های آنها برحسب پوند در شکل ۱۷ نشان داده شده است، یک الاکلنگ را متوازن کرده‌اند. شماره عضوی



شکل ۱۷. مسئله ۱

حرکت برج در قسمت بالایی ۱ میلی متر بر سال است.)



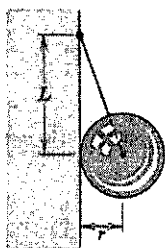
شکل ۲۰. مسئله ۵

و اتومبیل کم و بیش از جا تکان می خورد. نیروی وارد بر اتومبیل از طناب را معین کنید. (طناب در اثر کشش تا حدودی افزایش طول پیدا می کند.)



شکل ۲۲. مسئله ۹

۱۰. در شکل ۲۳ کره یکنواختی به وزن w و شعاع r توسط طنابی به یک دیوار بدون اصطکاک آویزان شده است. محل اتصال طناب به دیوار در فاصله L بالاتر از مرکز جرم کره است. (الف) کشش طناب و (ب) نیروی وارد بر کره از دیوار چقدر است؟

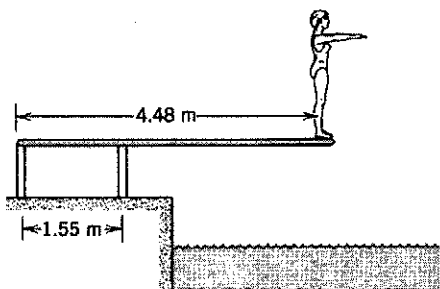


شکل ۲۳. مسئله ۱۰

۱۱. جرم اتومبیلی که روی جاده افقی پارک شده است 1360 kg و فاصله بین محورهای جلو و عقب آن 305 cm است. گرانیگاه این اتومبیل در فاصله 178 سانتی متر از محور جلو قرار دارد. کمیتهای زیر را معین کنید: (الف) نیرویی که زمین به طرف بالا به هر یک از چرخهای جلو وارد می کند. و (ب) نیرویی که زمین به طرف بالا به هر یک از چرخهای عقب وارد می کند. (در هر مورد فرض کنید که نیروهای وارد به دوچرخ با هم مساوی اند.)

۱۲. فردی به وزن 160 lb روی یک پل افقی راه می رود و در فاصله سه چهارم طول پل از یک انتها می ایستد. ساختار پل یکنواخت و وزن آن 600 lb است. نیروهای قائمی که از تکیه گاهها به هر یک از دو انتهای پل وارد می شود چقدر است؟

۱۳. شیرجه زنی به وزن 582 N در انتهای یک تخته شیرجه یکنواخت به طول 4.48 m و وزن 142 N ایستاده است. تخته شیرجه به دو پایه که در فاصله 1.55 m از یکدیگر قرار گرفته اند متصل شده است (شکل ۲۴). کشش (یا تراکم) را در هر یک از دو پایه محاسبه کنید.



شکل ۲۴. مسئله ۱۳

۶. نیروی افقی کوچکی عمود بر یکی از اضلاع بالایی مکعبی که روی یک میز افقی قرار گرفته است، بر وسط آن ضلع وارد می شود و مکعب هنوز ساکن است. حالا نیرو را به طور یکنواخت افزایش می دهیم. آیا مکعب از همان ابتدا واژگون می شود یا اینکه شروع به لغزیدن می کند؟ ضریب اصطکاک ایستایی بین دو سطح برابر با 0.46 است.

۷. صندوقی به شکل مکعب به ضلع 1.12 m حاوی یک ماشین صنعتی است. شکل این ماشین چنان است که گرانیگاه صندوق و محتوی آن 28 cm بالاتر از مرکز هندسی صندوق واقع شده است. صندوق روی سطح شیب داری قرار دارد که با افق زاویه θ می سازد. اگر θ را از صفر به تدریج افزایش بدهیم به زاویه ای می رسیم که در آن صندوق یا شروع به لغزیدن می کند یا واژگون می شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی برابر با (الف) 0.6 و (ب) 0.7 باشد کدام واقعه اتفاق می افتد؟ در هر یک از دو مورد زاویه نهایی را معین کنید.

۸. زنجیر قابل انعطافی به وزن W بین دو نقطه ثابت هم تراز A و B آویخته شده است (شکل ۲۱). پیدا کنید (الف) نیرویی را که زنجیر به هر یک از دو انتها وارد می کند و (ب) کشش زنجیر را در پایین ترین نقطه.



شکل ۲۱. مسئله ۸

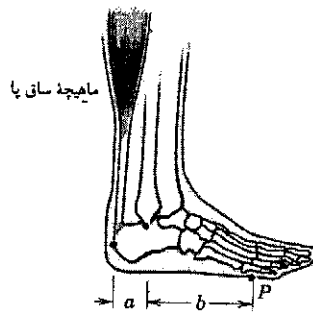
۹. در شکل ۲۲ شخصی می خواهد اتومبیلی را که در کنار جاده در گل گیر کرده است، بیرون بکشد. سر طنابی را محکم به سیر جلو اتومبیل گره می زند و سردیگر آن را به یک تیر تلفن که در فاصله 62 ft قرار دارد می بندد. سپس به وسط طناب یک نیروی $F = 120 \text{ lb}$ را عمود بر طناب وارد می کند و مرکز طناب را به اندازه 1.5 ft از موقعیت پیشین جابه جا می کند؛

۱۴. چوب‌متری روی نشانه 5°cm روی لبه کاردی متوازن شده است. اگر دو سکه روی نشانه 12°cm بچسبانیم، آنگاه مشاهده می‌کنیم که چوب‌متر روی نشانه 45.5°cm متوازن می‌شود. جرم هر سکه 5°g است. جرم چوب‌متر چقدر است؟

۱۵. سه کارگر تیرآهنی را حمل می‌کنند. یکی از آنها یک سر تیر را در دست دارد و دو نفر دیگر دو سر تیرچه باریکی را که از زیر تیرآهن گذشته است گرفته‌اند. تیرچه عمود بر تیرآهن چنان قرار گرفته است که وزن تیرآهن به‌طور مساوی بین سه نفر تقسیم شده است. تیرچه در کجای تیرآهن واقع شده است؟ جرم تیرچه در مقایسه با جرم تیرآهن قابل اغماض است.

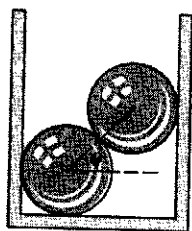
۱۶. یک نظافتچی به جرم 74.6kg از نردبانی به جرم 103kg و طول 5.12m استفاده می‌کند. پایه نردبان را در فاصله 2.45m از دیوار می‌گذرد و سر بالایی آن را به شیشه ترک‌خورده‌ای تکیه می‌دهد و از نردبان بالا می‌رود. وقتی 3.10m از طول نردبان را پیموده است شیشه می‌شکند. با چشمویشی از اصطکاک بین نردبان و شیشه و با این فرض که پایه نردبان نلغزیده است، کمیت‌های زیر را معین کنید: (الف) نیروی وارد بر شیشه از نردبان درست قبل از شکستن شیشه و (ب) مقدار و جهت نیرویی که درست قبل از شکستن شیشه از زمین به نردبان وارد شده است.

۱۷. در شکل ۲۵ ساختمان ساق و کف پا را مشاهده می‌کنید. وقتی پاشنه از زمین جدا می‌شود، پا عملاً فقط در یک نقطه با زمین در تماس قرار می‌گیرد. این نقطه را در شکل با P مشخص کرده‌ایم. نیروهایی را که باید از ماهیچه و استخوانهای ساق به کف پا وارد شوند تا شخصی به جرم 65kg بتواند روی پنجه یک پا بایستد محاسبه کنید. این نیروها را با وزن شخص مقایسه کنید. فرض کنید در این شکل $a = 5^\circ \text{cm}$ و $b = 15 \text{cm}$ است.



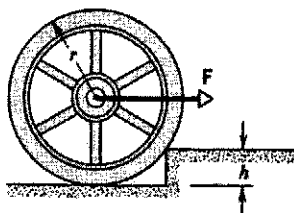
شکل ۲۵. مسئله ۱۷

۱۸. دو کره یکنواخت یکسان را که وزن هر کدام W است در نظر بگیرید. این کره‌ها در ته یک ظرف مکعب مستطیل شکل روی هم قرار گرفته‌اند (شکل ۲۶) و فرض کنید بین آنها اصطکاک وجود ندارد. خط واصل مراکز دو کره با امتداد افق زاویه θ می‌سازد. نیروهایی را که به هر یک از دو کره از (الف) کف ظرف، (ب) دیواره‌های ظرف و (ج) کره دیگر وارد می‌شود، پیدا کنید.



شکل ۲۶. مسئله ۱۸

۱۹. برای اینکه چرخ از پله‌ای به ارتفاع h بالا برود، حداقل نیروی افقی، F ، که باید به آن وارد شود چقدر است (شکل ۲۷)؟ شعاع چرخ را r و وزن آن را W بگیرید.

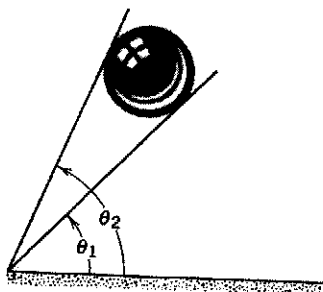


شکل ۲۷. مسئله ۱۹

۲۰. ترازویی تشکیل شده است از میله صلبی که می‌تواند حول نقطه‌ای که در مرکز میله واقع نیست دوران کند. این ترازو با قراردادن وزنه‌های نابرابر در کفه‌هایی که به دو انتهای میله متصل شده‌اند به حالت تعادل درمی‌آید. وقتی جسمی به جرم مجهول m را در کفه سمت چپ قرار می‌دهیم ترازو با وزنه‌ای به جرم m_1 در کفه سمت راست متوازن می‌شود و اگر جرم m را در کفه سمت راست قرار بدهیم ترازو با جرم m_2 در کفه سمت چپ متوازن می‌شود. نشان بدهید که

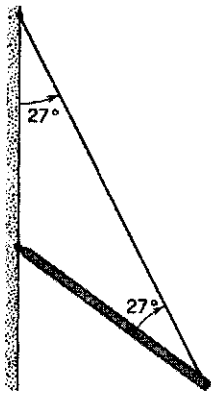
$$m = \sqrt{m_1 m_2}$$

۲۱. کره یکنواختی به وزن w بین دو سطح شیبدار با زوایای θ_1 و θ_2 (شکل ۲۸) در سکون است. (الف) فرض کنید هیچ اصطکاک‌کی در کار نیست و اندازه و جهت نیروهایی را که سطوح شیبدار به کره وارد می‌کنند پیدا کنید. (ب) اگر اصطکاک را منظور می‌کردیم، چه تغییری حاصل می‌شد؟



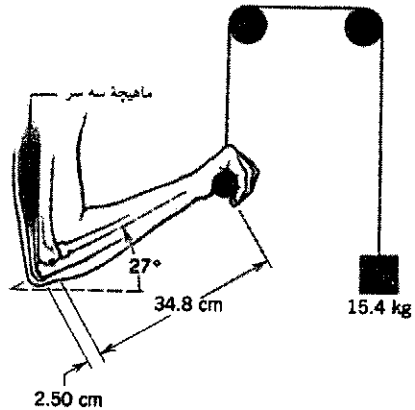
شکل ۲۸. مسئله ۲۱

از مرکز دریچه و به لولا نزدیکتر باشد، در این صورت (الف) چفت و (ب) لولا چه نیروهایی را باید تحمل کنند؟
 ۲۵. یک سر یک تیرچه یکنواخت به وزن 52.7 lb و طول 3.12 ft به دیواری لولا شده است. سر دیگر این تیرچه توسط سیمی که هم با تیرچه و هم با دیوار زاویه 27° می‌سازد، نگه داشته شده است (شکل ۳۱). (الف) کشش سیم را تعیین کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر لولا را به دست بیاورید.



شکل ۳۱. مسئله ۲۵

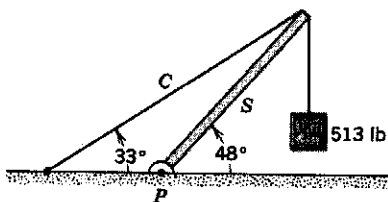
۲۲. جسمی به جرم 15.4 kg به وسیله سیستم قرقره‌های شکل ۲۹ به سمت بالا کشیده می‌شود. بازو در حالت قائم است و ساعد با افق زاویه 27° می‌سازد. چه نیروهایی از طرف (الف) ماهیچه سه سر بازو و (ب) استخوان قلم بازو به ساعد وارد می‌شود؟ فرض کنید جرم ساعد و دست روی هم برابر با 2.13 kg است و مرکز جرم آن در فاصله 14.7 cm از نقطه تماس دو استخوان در ساعد واقع شده است. ماهیچه سه سر نیروی قائمی به طرف بالا در فاصله 2.50 cm از محل تماس دو استخوان (نگاه کنید به شکل) به ساعد وارد می‌کند.



شکل ۲۹. مسئله ۲۲

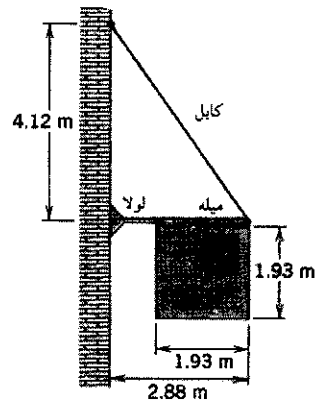
۲۶. جرم دری به ارتفاع 2.12 m و پهنای 9.07 m برابر با 268 kg است. این دری به وسیله دو لولا که در فاصله 2.94 m از بالا و از پایین در نصب شده‌اند نگه داشته شده است. هر یک از لولاها نصف وزن دری را تحمل می‌کند. فرض کنید که گرانیگاه در منطبق بر مرکز هندسی آن است. مؤلفه‌های افقی و قائم نیروهایی را که از دری به هر یک از لولاها وارد می‌شود محاسبه کنید.

۲۷. سیستم شکل ۳۲ در حال تعادل است. وزن جسمی که از انتهای شمع S آویخته شده 513 lb و وزن خود شمع 107 lb است. (الف) کشش کابل C را پیدا کنید و (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیرویی را که از تکیه‌گاه P به شمع وارد می‌شود محاسبه کنید.



شکل ۳۲. مسئله ۲۷

۲۳. در شکل ۳۰ یک نابولی تبلیغاتی مربع شکل یکنواخت به جرم 523 kg و به ضلع 1.93 m ، از میله‌ای به طول 2.88 m و با جرم قابل چشمپوشی آویخته شده است. کابلی انتهای میله را به نقطه روی دیوار در فاصله 4.12 m متر بالاتر از نقطه اتصال میله به دیوار وصل کرده است. (الف) کشش کابل را حساب کنید. (ب) مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از دیوار را حساب کنید.

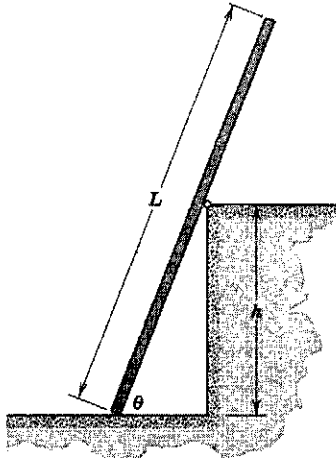


شکل ۳۰. مسئله ۲۳

۲۸. میله غیر یکنواختی به وزن W توسط دو نخ بی‌وزن آویخته شده است؛ شکل ۳۳. میله در حالت افقی و در حال سکون است. زاویه‌ای که یکی از نخها با امتداد قائم می‌سازد برابر با θ و زاویه نخ دیگر با امتداد قائم برابر با ϕ است. طول میله L است. فاصله گرانیگاه میله از انتهای سمت چپ آن، x ، چقدر است؟

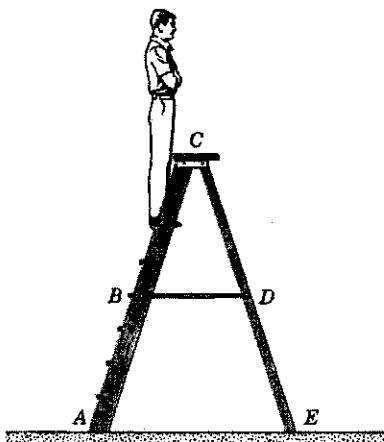
۲۴. دریچه‌ای به شکل مربع به ضلع 3 ft (مساوی با 0.91 m) در سقف کار گذاشته شده است. این دریچه که وزن 25 lb (11 kg) جرم دارد از یک طرف لولا شده است و در سمت مقابل دارای یک چفت است. اگر گرانیگاه این دریچه در فاصله 4 in (یعنی 10 cm)

۳۲. یک سر الواری به وزن $274N$ و طول $L = 6.23m$ روی زمین قرار گرفته است. این الوار را به غلتک بدون اصطکاک که روی یک دیوار در ارتفاع $h = 2.87m$ نصب شده است تکیه داده‌ایم (شکل ۳۶). گرانیگاه الوار در مرکز هندسی آن قرار دارد. این جسم به‌ازای تمام زوایای $\theta \geq 68.0^\circ$ متعادل باقی می‌ماند، ولی اگر $\theta < 68.0^\circ$ شود شروع به لغزیدن می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته و زمین را تعیین کنید.

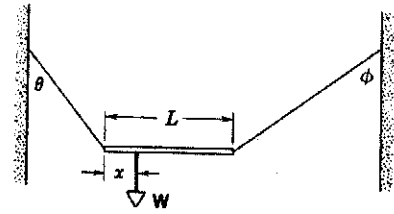


شکل ۳۶. مسئله ۳۲

۳۳. در نردبان دوطرفه شکل ۳۷ طول هر یک از دو شاخه AC و CE برابر با $8.7ft$ است. این دو قسمت در نقطه C به هم لولا شده‌اند. طول میله نگهدارنده BD که وسط دو شاخه را به هم وصل می‌کند برابر با $2.5ft$ است. شخصی به وزن $192lb$ روی نردبان $6.7ft$ بالا می‌رود. با فرض اینکه زمین بدون اصطکاک باشد، و از وزن نردبان هم بتوانیم چشمپوشی کنیم، کمیت‌های زیر را پیدا کنید: (الف) کشش در میله نگهدارنده و (ب) نیروهای وارد بر نردبان از طرف زمین. (راهنمایی: بهتر است هر یک از دو جزء نردبان را منزوی کنید و بعد شرایط تعادل را روی هر کدام اعمال کنید).

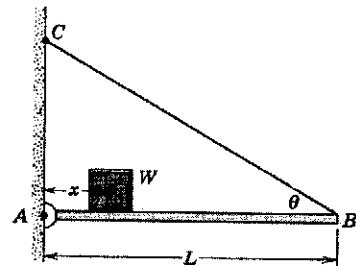


شکل ۳۷. مسئله ۳۳



شکل ۳۳. مسئله ۲۸

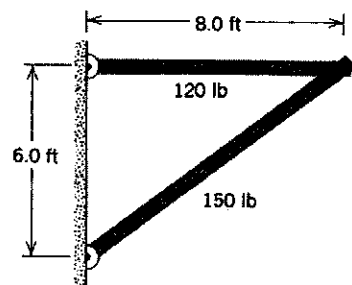
۲۹. میله نازک افقی AB به طول L از سر A به دیوار قائمی لولا شده و سر B آن توسط سیم نازک BC که با افق زاویه θ می‌سازد به دیوار متصل شده است. وزن میله قابل چشمپوشی است. فرض کنید وزنه W را می‌توان هر جایی روی این تسمه چسباند؛ مکان وزنه، با فاصله آن از دیوار، یعنی x ، مشخص می‌شود (شکل ۳۴). (الف) کشش سیم، T ، را به صورت تابعی از x پیدا کنید. مؤلفه‌های (ب) افقی و (ج) قائم نیروی وارد بر تسمه از لولا را محاسبه کنید.



شکل ۳۴. مسئله‌های ۲۹ و ۳۰

۳۰. در شکل ۳۴، طول میله (L) برابر با $2.76m$ و وزن آن w برابر با $194N$ است. همچنین، $W = 315N$ و $\theta = 32.0^\circ$ است. حداکثر کششی که سیم می‌تواند تحمل کند $520N$ است. (الف) بیشترین فاصله وزنه از دیوار، x ، قبل از اینکه سیم پاره شود، چقدر است؟ (ب) وقتی W در بیشترین فاصله قرار گرفت، مؤلفه‌های افقی و قائم نیروی وارد بر میله از لولا چقدر است؟

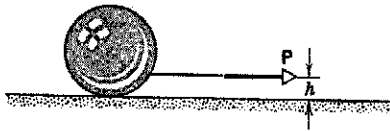
۳۱. در شکل ۳۵ دو تیرک یکنواخت هر کدام از یک سر به دیواری لولا شده‌اند. سرهای آزاد این دو تیرک با پیچ و مهره به هم وصل‌اند. مؤلفه‌های افقی و قائم (الف) نیروی وارد بر هر لولا. (ب) نیروی وارد بر هر تیرک از پیچ و مهره را حساب کنید.



شکل ۳۵. مسئله ۳۱

آجرهای یکنواختی را چنان روی هم قرار بدهیم که (بدون فروریختن) بیشترین پیش‌آمدگی را داشته باشند. این خواسته به این ترتیب عملی می‌شود که گرانیگاه آجر بالایی درست روی لبه آجر زیری‌اش قرار بگیرد، گرانیگاه مجموعه دو آجر بالایی هم درست روی لبه سومین آجر از بالا قرار بگیرد، و به همین ترتیب تا آخر. (الف) این معیار بیشترین پیش‌آمدگی را توجیه کنید؛ و بیشترین پیش‌آمدگی را برای یک مجموعه چهار آجری تعیین کنید. (ب) نشان بدهید که با ادامه این کار می‌توان به هر اندازه دلخواهی پیش‌برآمدگی داشت. (مارتین گاردنر در مقاله‌ای درباره این موضوع می‌گوید: "با یک دسته کارت شامل ۵۲ برگ" که اولین آنها روی میزی درست مماس بر لبه میز قرار داشته باشد، می‌توانید پیش‌آمدگی‌ای بسازید که به اندازه کمی بیشتر از $\frac{1}{4}$ برابر طول یک کارت از لبه میز جلو آمده باشد.) (ج) حالا، فرض کنید آجرهای یکنواخت را چنان روی هم می‌چینیم که انتهای هر یک به‌اندازه کسر ثابت $1/n$ طول آجر (L) از آجر زیری‌اش جلوتر آمده باشد. به این ترتیب، قبل از فروریختن ساختار، چه تعداد آجر (N) می‌توانیم روی هم بچینیم؟ معقول بودن پاسخی را که پیدا کرده‌اید در مورد $n = 1$, $n = 2$, $n = \infty$ بررسی کنید.

۳۸. در شکل ۴۰ کره همگنی به شعاع r و به وزن W ، تحت تأثیر نیروی افقی ثابت P که به ریسمان متصل به کره وارد می‌شود می‌لغزد. (الف) نشان بدهید که اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین کره و زمین μ باشد، ارتفاع h از رابطه $h = r(1 - \mu W/P)$ به‌دست می‌آید. (ب) نشان بدهید که کره در چنین شرایطی در تعادل انتقالی نیست. آیا نقطه‌ای وجود دارد که حول آن کره در تعادل دورانی باشد؟ (ج) آیا می‌توان با انتخاب مقدار متفاوتی برای h کره را هم در تعادل دورانی و هم در تعادل انتقالی نگه داشت؟ با انتخاب جهت متفاوتی برای P چطور؟ پاسخهای خودتان را توضیح بدهید.



شکل ۴۰. مسئله ۳۸

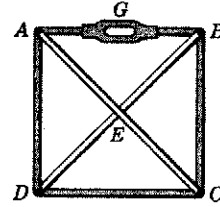
بخش ۱۴-۴ تعادل پایدار، ناپایدار، و خنثای اجسام صلب در میدان گرانشی

۳۹. جامی با شعاع انحنا r روی یک میز افقی قرار گرفته است. نشان بدهید که این جام فقط در صورتی در تعادل پایدار حول نقطه مرکز انحنا خواهد بود که ارتفاع مرکز جرم ماده انباشته شده در جام نسبت به مرکز جام از r بیشتر نباشد.

۱. نگاه کنید به

Scientific American, November 1964, p. 128.

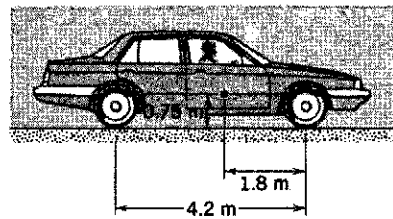
۳۴. به کمک سنگ پیچشی G ، در میله AB از کلاف مربعی $ABCD$ در شکل ۳۸، کشش T را ایجاد کرده‌ایم. نیروهای ایجاد شده در سایر شاخه‌های کلاف را تعیین کنید. قطرهای AC و BD ، بدون درگیری با هم، در نقطه E یکدیگر را قطع می‌کنند. ملاحظات مربوط به تقارن ممکن است این مسئله و مسائل مشابه را تا حد زیادی ساده‌تر کند.



شکل ۳۸. مسئله ۳۴

۳۵. یک جعبه مکعب شکل که با ماسه پر شده است $892N$ وزن دارد. می‌خواهیم این جعبه را با وارد کردن یک نیروی افقی به یکی از لبه‌های بالایی آن "بغلانیم". (الف) کمترین نیروی لازم چقدر است؟ (ب) ضریب اصطکاک ایستایی دست‌کم باید چقدر باشد؟ (ج) آیا راه مؤثرتری برای غلتاندن جعبه وجود دارد؟ اگر وجود دارد، کمترین نیرویی که به این منظور باید مستقیماً به جعبه وارد شود چقدر است؟

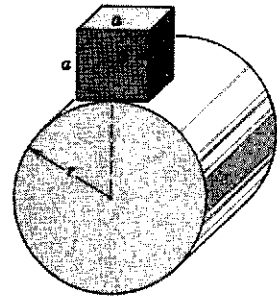
۳۶. اتومبیلی که در یک جاده افقی در حرکت است ناگزیر از یک توقف اضطراری می‌شود. راننده طوری ترمز می‌گیرد که تمام چرخها قفل می‌شوند و اتومبیل می‌لغزد. ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک و جاده 0.4 است. فاصله بین محور جلو و محور عقب 4.2 m است. مرکز جرم اتومبیل در فاصله 1.8 m از محور جلو و 0.75 m بالاتر از سطح جاده است (شکل ۳۹). وزن اتومبیل با راننده‌اش مجموعاً 110 kN است. کمیت‌های زیر را محاسبه کنید: (الف) شتاب کندکننده ناشی از ترمز، (ب) نیروی قائم وارد بر هر یک از چرخهای جلو و عقب و (ج) نیروی وارد از ترمز به هر کدام از چرخهای جلو و عقب. (راهنمایی: اتومبیل با آنکه در تعادل انتقالی نیست، در تعادل دورانی هست.)



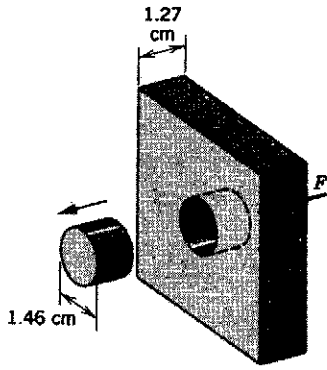
شکل ۳۹. مسئله ۳۶

۳۷. این مسئله یکی از مسائل مشهور تعادل است^۱ می‌خواهیم

۴۰. مکعبی به ضلع a با چگالی یکنواخت روی یک سطح استوانه‌ای به شعاع r در حال تعادل است (شکل ۴۱). نشان بدهید که شرط تعادل پایدار برای مکعب، با فرض اینکه اصطکاک برای جلوگیری از لغزش کافی باشد، این است که $r > a/2$ باشد.

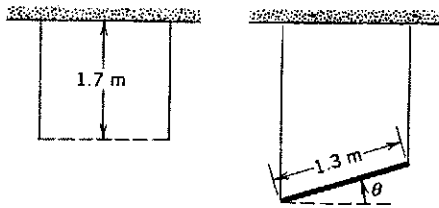


شکل ۴۱. مسئله ۴۰



شکل ۴۳. مسئله ۴۵

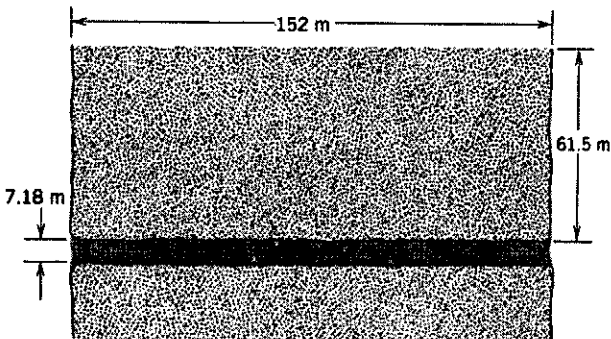
۴۶. در شکل ۴۴ میله یکنواختی به جرم 47 kg و طول 1.3 m توسط دو سیم از دو انتهایش آویزان شده است. یکی از سیمها فولادی و قطر آن 1.2 mm است؛ سیم دیگر آلومینیومی و قطر آن 84 mm است. قبل از آویختن میله، طول سیمها با هم یکی و برابر با 1.7 m است. زاویه بین میله و امتداد افقی، θ ، را تعیین کنید. (از تغییر قطر سیمها چشم ببوشید، میله و سیمها در یک صفحه قرار دارند.)



شکل ۴۴. مسئله ۴۶

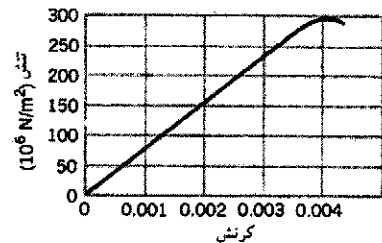
۴۷. پره چرخانه‌ای به طول 5.27 m از موادی به چگالی 555 g/cm^3 و استقامت کششی نهایی 446 MN/m^2 ساخته شده است. بیشترین سرعت دورانی ممکن برای این پره چقدر است؟ فرض کنید دوران حول محوری عمود بر پره که از یک انتهای آن می‌گذرد انجام می‌شود.

۴۸. می‌خواهیم تونلی به طول 1.52 m ، ارتفاع 7.18 m ، و عرض 5.77 m (با سقف تخت) در فاصله 61.5 m پایین‌تر از سطح زمین بسازیم (شکل ۴۵). سقف این تونل قرار است که روی ستونهای



شکل ۴۵. مسئله ۴۸

بخش ۵-۱۴ کشسانی
۴۱. منحنی تنش-سکرنش را برای سنگ شیشه نشان می‌دهد. مدول یانگ را برای این ماده محاسبه کنید.



شکل ۴۲. مسئله ۴۱

۴۲. در یک حادثه سقوط، صخره‌نوردی به جرم 95 kg از انتهای طنابی به طول 15 m و قطر 9.6 mm آویزان می‌ماند. اگر طناب به اندازه 2.8 cm افزایش طول پیدا کند، مدول یانگ برای آن چقدر است؟

۴۳. یک اتاقک بالابر از یک کابل فولادی به قطر 2.52 cm آویزان است. جرم کل اتاقک و مسافران 873 kg است. وقتی اتاقک 42.6 m پایین‌تر از موتور بالابر واقع شده باشد، افزایش طول کابل چقدر است؟ (جرم کابل را (در مقایسه با اتاقک) ناچیز فرض کنید.)

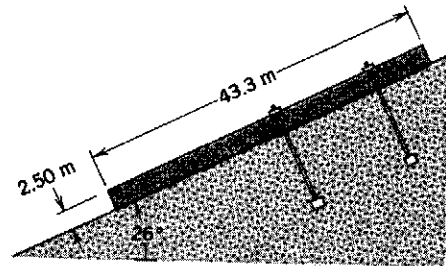
۴۴. یک دیرک آلومینیومی افقی به قطر 48.0 cm به اندازه 53.0 cm از دیواری بیرون آمده است. وزنه‌ای به جرم 120 kg از انتهای این دیرک آویزان است. مدول برشی آلومینیم $3.0 \times 10^{10}\text{ N/m}^2$ است. (الف) تنش برشی وارد بر دیرک را محاسبه کنید. (ب) انحراف قائم انتهای دیرک را تعیین کنید.

۴۵. برای ایجاد سوراخی به قطر 1.46 cm در یک ورق فولادی به ضخامت 1.27 cm چه نیرویی لازم است (شکل ۴۳)؟ استقامت برشی نهایی فولاد 345 MN/m^2 است.

است؟ (ج) جوابهای قسمتهای (الف) و (ب) را مقایسه کنید تا ببینید که تخته سنگ بدجوری در معرض لغزش است. تنها همچسبی بین تخته سنگ و سطح شیبدار مانع لغزیدن می شود. می خواهیم تخته سنگ را با میخهایی که عمود بر سطح شیبدار در آن فرو می ورد "پابرجا" کنیم، طوری که بدون اتکا با به همچسبی نیز در تعادل پایدار باشد. اگر سطح مقطع هر کدام از پیچهای مخصوص سنگ 6.38 cm^2 واستقامت برشی آنها 362 MN/m^2 باشد، دست کم به چند پیچ نیاز داریم؟ (پیچها سفت نمی شوند و بنابراین تأثیری بر نیروهای قائم نمی گذارند.)

۵۰. میله ای فلزی به طول L و سطح مقطع A را که فاصله آنهاش در حالت تعادل x است و مدول یانگ برای آن E است در نظر بگیرید. وقتی نیروی کششی F به میله وارد می شود، طول میله به اندازه ΔL زیاد می شود. برای محاسبه ثابت نیروی اتمی (k)، عباراتی برای (الف) تعداد زنجیره های اتمی در هر سطح مقطع، (ب) تعداد اتمهای موجود در زنجیره های به طول L ، (ج) افزایش طول میکروسکوپی Δx بین اتمها و (د) نیروی کششی f بین اتمها، به دست بیاورید. (ه) نیرو را به صورت $f = k\Delta x$ بنویسید و نشان بدهید که $k = Ex$ است. (و) مقدار k را برای یک فلز نوعی که برای آن $E = 1.2 \text{ GN/m}^2$ و $x = 0.16 \text{ nm}$ است، محاسبه کنید.

فولادی مربعی با سطح مقطع 962 cm^2 تکیه کنید. چگالی مواد تشکیل دهنده زمین 2.83 g/cm^3 است. (الف) حساب کنید که این ستونها باید چه وزنی را تحمل کنند. (ب) اگر بخواهیم ضریب ایمنی در برابر شکستگی برابر با ۲ باشد، به چه تعداد ستون نیاز داریم؟ ۴۹. تخته سنگ مکعب مستطیل شکلی روی یک سطح شیبدار 26° قرار گرفته است (شکل ۴۶). ابعاد این تخته سنگ عبارتند از 43.3 m طول، 2.50 m ضخامت و 12.2 m عرض. چگالی سنگ 3.17 g/cm^3 است. ضریب اصطکاک ایستایی بین تخته سنگ و سطح زیر آن 0.39 است. (الف) مؤلفه وزن تخته سنگ در راستای سطح شیبدار چقدر است؟ (ب) نیروی اصطکاک ایستایی چقدر



شکل ۴۶. مسئله ۴۹

پیوست الف

سیستم بین‌المللی یکاها (SI)^۱

یکاهای اصلی SI

تعریف	نماد	یکا	کمیت
"... طول مسیری که نور آن را در خلأ در $\frac{1}{299792458}$ ثانیه طی می‌کند." (۱۹۸۳)	m	متر	طول
"... این نمونه [استوانه خاصی از جنس پلاتین-ایریدیم] از این پس به‌عنوان یکای جرم در نظر گرفته می‌شود." (۱۸۸۹)	kg	کیلوگرم	جرم
"... مدتی برابر با 9192631770 دوره تناوب تابش متناظر با گذار میان دو تراز فوق ریز حالت پایه اتم سزیوم ^{133}Cs ." (۱۹۶۷)	s	ثانیه	زمان
"... جریان ثابتی که اگر در دو سیم راست به‌طول نامحدود و سطح مقطع دایره‌ای ناپیوسته به‌فاصله یک متر موازی با یکدیگر در خلأ واقع شده‌اند برقرار باشد، نیرویی برابر با 2×10^{-7} نیوتون به‌ازای هر متر از طول سیمها میان آنها ایجاد کند." (۱۹۴۶)	A	آمپر	جریان الکتریکی
"... دمای مطلق نقطه سه‌گانه آب." (۱۹۶۷)	K	کلوین	دمای ترمودینامیکی
"... مقدار ماده موجود در هر سیستمی که تعداد اجزای بنیادی آن برابر با تعداد اتمهای موجود در 12 گرم ^{12}C کیلوگرم از کربن 12 باشد." (۱۹۷۱)	mol	مول	مقدار ماده
"... شدت روشنایی ناشی از تابش عمودی سطحی برابر با $\frac{1}{680}$ مترمربع از جسم سیاهی در دمای ذوب پلاتین و فشار 101325 نیوتون بر مترمربع." (۱۹۶۷)	cd	شمع	شدت روشنایی

ه است. برگرفته از

یکای معادن	نماد	یکا	کمیت
	m^2	مترمربع	سطح
	m^3	مترمکعب	حجم
s^{-1}	Hz	هرتز	بسامد
	kg/m^3	کیلوگرم بر مترمکعب	چگالی (جرمی)
	m/s	متر بر ثانیه	سرعت
	rad/s	رادیان بر ثانیه	سرعت زاویه‌ای
	m/s^2	متر بر مجذور ثانیه	شتاب
	rad/s^2	رادیان بر مجذور ثانیه	شتاب زاویه‌ای
$kg \cdot m/s^2$	N	نیوتون	نیرو
N/m^2	Pa	پاسکال	فشار
$N \cdot m$	J	ژول	کار، انرژی
J/s	W	وات	توان
$A \cdot s$	C	کولن	مقدار الکتریسیته
$N \cdot m/C$	V	ولت	اختلاف پتانسیل
N/C	V/m	ولت بر متر	میدان الکتریکی
V/A	Ω	اهم	مقاومت الکتریکی
$A \cdot s/V$	F	فاراد	ظرفیت
$V \cdot s$	Wb	وبر	شار مغناطیسی
$V \cdot s/A$	H	هانری	القا
$Wb/m^2, N/A \cdot m$	T	تسلا	میدان مغناطیسی
	J/K	ژول بر کلوین	آنتروپی
	$J/(kg \cdot K)$	ژول بر کیلوگرم کلوین	ظرفیت گرمایی ویژه
	$W/(m \cdot K)$	وات بر متر کلوین	رسانایی گرمایی
	W/sr	وات بر استرادیان	شدت تابش

یکاهای مکمل SI

نماد	یکا	کمیت
rad	رادیان	زاویه
sr	استرادیان	زاویه فضایی

پیوست ب

بعضی ثابتهای بنیادی فیزیک

بهترین مقدار (تا سال ۱۹۸۶)				
عدم قطعیت ^۲	مقدار ^۱	مقدار محاسباتی	نماد	ثابت
تقریباً صفر	۲٫۹۹۷۹۲۴۵۸	$۳٫۰۰ \times ۱۰^۸ \text{m/s}$	c	سرعت نور در خلأ
۰٫۳۰	۱٫۶۰۲۱۷۷۳۳	$۱٫۶۰ \times ۱۰^{-۱۹} \text{C}$	e	بار بنیادی
۰٫۵۹	۹٫۱۰۹۳۸۹۷	$۹٫۱۱ \times ۱۰^{-۳۱} \text{kg}$	m_e	جرم سکون الکترون
تقریباً صفر	۸٫۸۵۴۱۸۷۸۱۷۶۲	$۸٫۸۵ \times ۱۰^{-۱۲} \text{F/m}$	ϵ_0	ثابت گذردهی
تقریباً صفر	۱٫۲۵۶۶۳۷۰۶۱۴۳	$۱٫۲۶ \times ۱۰^{-۶} \text{H/m}$	μ_0	ثابت تراوایی
۰٫۲۳	۵٫۴۸۵۷۹۹۰۲	$۵٫۴۹ \times ۱۰^{-۴} \text{u}$	m_e	جرم سکون الکترون ^۲
۰٫۱۴	۱٫۰۰۸۶۶۴۹۰۴	$۱٫۰۰۸۷ \text{u}$	m_n	جرم سکون نوترون ^۲
۰٫۱۱	۱٫۰۰۷۸۲۵۰۳۵	$۱٫۰۰۷۸ \text{u}$	$m(^1\text{H})$	جرم سکون اتم هیدروژن ^۲
۰٫۱۲	۲٫۰۱۴۱۰۱۷۷۹	$۲٫۰۱۴۱ \text{u}$	$m(^2\text{H})$	جرم سکون اتم دوتریم ^۲
۰٫۱۲	۴٫۰۰۲۶۰۳۲۴	$۴٫۰۰۲۶ \text{u}$	$m(^4\text{He})$	جرم سکون اتم هلیوم ^۲
۰٫۳۰	۱٫۷۵۸۸۱۹۶۲	$۱٫۷۶ \times ۱۰^{۱۱} \text{C/kg}$	e/m_e	نسبت بار به جرم الکترون
۰٫۵۹	۱٫۶۷۷۲۶۲۳۱	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	m_p	جرم سکون پروتون
۰٫۲۰	۱۸۳۶٫۱۵۲۷۰۱	۱۸۴۰	m_p/m_e	نسبت جرم پروتون به جرم الکترون
۰٫۵۹	۱٫۶۷۴۹۲۸۶	$۱٫۶۷ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$	m_n	جرم سکون نوترون
۰٫۶۱	۱٫۸۸۳۵۳۲۷	$۱٫۸۸ \times ۱۰^{-۲۸} \text{kg}$	m_μ	جرم سکون موئون
۰٫۶۰	۶٫۶۲۶۰۷۵۵	$۶٫۶۳ \times ۱۰^{-۳۲} \text{J}\cdot\text{s}$	h	ثابت پلانک
۰٫۸۹	۲٫۴۲۶۳۱۰۵۸	$۲٫۴۳ \times ۱۰^{-۱۲} \text{m}$	λ_e	طول موج کامپتون الکترون
۸٫۴	۸٫۳۱۴۵۱۰	$۸٫۳۱ \text{J/mol}\cdot\text{K}$	R	ثابت عمومی گازها
۰٫۵۹	۶٫۰۲۲۱۳۶۷	$۶٫۰۲ \times ۱۰^{۲۳} \text{mol}^{-1}$	N_A	ثابت آووگادرو

ثابت	نماد	مقدار محاسباتی	مقدار	عدم قطعیت
ثابت بولتزمن	k	$۱٫۳۸ \times ۱۰^{-۲۳} \text{J/K}$	۱٫۳۸۰۶۵۱۳	۱٫۸
حجم مولی گاز ایده‌آل در شرایط متعارفی	V_m	$۲٫۲۴ \times ۱۰^{-۲} \text{m}^3/\text{mol}$	۲٫۲۴۱۳۹۹۲	۱٫۷
ثابت فاراده	F	$۹٫۶۵ \times ۱۰^۴ \text{C/mol}$	۹٫۶۴۸۵۳۰۹	۰٫۳۰
ثابت استفان-بولتزمن	σ	$۵٫۶۷ \times ۱۰^{-۸} \text{W/m}^2 \cdot \text{K}^۴$	۵٫۶۷۰۳۹۹	۶٫۸
ثابت ریذبرگ	R	$۱٫۱۰ \times ۱۰^۷ \text{m}^{-۱}$	۱٫۰۹۷۳۷۳۱۵۷۱	۰٫۰۰۰۳۶
ثابت گرانش	G	$۶٫۶۷ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m}^۳/\text{s}^۲ \cdot \text{kg}$	۶٫۶۷۲۵۹	۱۲۸
شعاع بور	a_0	$۵٫۲۹ \times ۱۰^{-۱۱} \text{m}$	۵٫۲۹۱۷۷۲۴۹	۰٫۴۵
گشتاور مغناطیسی الکترون	μ_e	$۹٫۲۸ \times ۱۰^{-۲۴} \text{J/T}$	۹٫۲۸۴۷۷۰۰	۰٫۳۴
گشتاور مغناطیسی پروتون	μ_p	$۱٫۴۱ \times ۱۰^{-۲۶} \text{J/T}$	۱٫۴۱۰۶۰۷۶۱	۰٫۳۴
مگنتون بور	μ_B	$۹٫۲۷ \times ۱۰^{-۲۴} \text{J/T}$	۹٫۲۷۴۰۱۵۴	۰٫۳۴
مگنتون هسته	μ_N	$۵٫۰۵ \times ۱۰^{-۲۷} \text{J/T}$	۵٫۰۵۰۷۸۶۵	۰٫۳۴
ثابت ساختار ریز	α	$۱/۱۳۷$	۱/۱۳۷٫۰۳۵۹۸۹۵	۰٫۴۵
کوانتوم شار مغناطیسی	Φ_0	$۲٫۰۷ \times ۱۰^{-۱۵} \text{Wb}$	۲٫۰۶۷۸۳۴۶۱	۰٫۳۰
مقاومت هال کوانتیده	R_H	۲۵۸۰۰Ω	۲۵۸۱۲٫۸۰۵۶	۰٫۴۵

(۱) با همان یکا و همان توان ده مقدار محاسباتی.

(۲) قسمت در میلیون.

(۳) جرم برحسب یکای اتمی جرم، $۱۱۱ = ۱٫۶۶۰۵۴۰۲ \times ۱۰^{-۲۷} \text{kg}$.

(۴) شرایط متعارفی (دما و فشار استاندارد) = دمای صفر درجه سلیسیوس و فشار ۱ بار.

پیوست ج

اطلاعات نجومی

ماه	زمین	خورشید ^۱	خورشید و زمین و ماه ویژگی
$۷,۳۶ \times ۱۰^{۲۲}$	$۵,۹۸ \times ۱۰^{۲۴}$	$۱,۹۹ \times ۱۰^{۳۰}$	جرم (kg)
$۱,۷۴ \times ۱۰^۶$	$۶,۳۷ \times ۱۰^۶$	$۶,۹۶ \times ۱۰^۸$	شعاع متوسط (m)
۳۳۴۰	۵۵۲۰	۱۴۱۰	چگالی متوسط ($\text{kg}/\text{m}^۳$)
۱,۶۷	۹,۸۱	۲۷۴	شتاب ثقل در سطح ($\text{m}/\text{s}^۲$)
۲,۴۸	۱۱,۲	۶۱۸	سرعت گریز (km/s)
۲۷,۳	۰,۹۹۷	۲۶ تا ۳۷	دوره تناوب ^۲ چرخش (d)
$۶,۳۸۲ \times ۱۰^۵$	$۵,۱۵۰ \times ۱۰^۸$	$۲,۲۶ \times ۱۰^{۱۷}$	شعاع متوسط مدار (km)
۲۷,۳ روز ^۳	۱,۰۰ سال ^۴	$۱۰^۸ \times ۲,۴$ سال ^۴	دوره تناوب مداری

(۱) توان تابشی خورشید $۱۰^{۲۶} \text{W} \times ۳,۹۰$ است؛ با فرض تابش عمودی، انرژی خورشید با آهنگ $۱۳۸۰ \text{W}/\text{m}^۲$ به بالای جو زمین می‌رسد.

(۲) نسبت به ستاره‌های دور.

(۳) خورشید سکه کره‌ای از گاز است. مثل جسم صلب نمی‌چرخد؛ دوره چرخش آن در استوایش ۲۶ روز و در قطب‌هایش ۳۷ روز است.

(۴) حول مرکز کهکشان.

(۵) حول خورشید.

(۶) حول زمین.

خصوصیات سیاره‌های منظومه شمسی

پلوتون	نپتون	ارائوس	زحل	مشتری	مریخ	زمین	زهره	عطارد	
۵۹۰۰	۴۵۰۰	۲۸۷۰	۱۴۳۰	۷۷۸	۲۲۸	۱۵۰	۱۰۸	۵۷٫۹	فاصله متوسط از خورشید (km) ^۱
۲۴۸	۱۶۵	۸۴٫۰	۲۹٫۵	۱۱٫۹	۱٫۸۸	۱٫۰۰	۰٫۶۱۵	۰٫۲۴۱	دوره گردش به دور خورشید (سال)
۶٫۳۹	۰٫۶۵۸	۲٫۴۵۱	۰٫۴۲۶	۰٫۴۰۹	۱٫۰۳	۰٫۹۹۷	۲۴۳	۵۸٫۷	دوره چرخش ^۱ (روز)
۴٫۷۴	۵٫۴۳	۶٫۸۱	۹٫۶۴	۱۳٫۱	۲۴٫۱	۲۹٫۸	۳۵٫۰	۴۷٫۹	سرعت مداری (km/s)
۶۵°	۲۸٫۸°	۸۲٫۱°	۲۶٫۷°	۳٫۰۸°	۲۴٫۰°	۲۳٫۵°	۲٫۶°	۰°	تمایل محور به مدار
۱۷٫۲°	۱٫۷۷°	۰٫۷۷°	۲٫۴۹°	۱٫۳۰°	۱٫۸۵°	—	۳٫۳۹°	۷٫۰۰°	تمایل مدار به مدار زمین
۰٫۲۵۰	۰٫۰۰۸۶	۰٫۰۴۷۲	۰٫۰۵۵۶	۰٫۰۴۸۵	۰٫۰۹۳۴	۰٫۰۱۶۷	۰٫۰۰۶۸	۰٫۲۰۶	خروج از مرکز مدار
۳۴۰۰	۴۹۵۰۰	۵۱۸۰۰	۱۲۰۰۰۰	۱۴۳۰۰۰	۶۷۹۰	۱۲۸۰۰	۱۲۱۰۰	۴۸۸۰	قطر استوایی (km)
۰٫۰۰۲	۱۷٫۲	۱۴٫۵	۹۵٫۱	۳۱۸	۰٫۱۰۷	۱٫۰۰۰	۰٫۸۱۵	۰٫۰۵۵۸	جرم (نسبت به زمین = ۱)
۰٫۵(?)	۱٫۶۷	۱٫۲۱	۰٫۷۰۴	۱٫۳۱	۳٫۹۵	۵٫۵۲	۵٫۲۰	۵٫۶۰	چگالی متوسط (g/cm ^۳)
۰٫۰۳	۱۱٫۰	۷٫۷۷	۹٫۰۵	۲۲٫۹	۳٫۷۲	۹٫۷۸	۸٫۶۰	۳٫۷۸	شتاب ثقل در سطح ^۲ (m/s ^۲)
۱٫۳	۲۳٫۶	۲۱٫۲	۳۵٫۶	۵۹٫۵	۵٫۰	۱۱٫۲	۱۰٫۳	۴٫۳	سرعت گریز (km/s)
۱	+۸ حلقه‌ها	+۱۵ حلقه‌ها	+۱۹ حلقه‌ها	+۱۶ حلقه‌ها	۲	۱	۰	۰	تعداد قمرهای شناخته شده

(۱) نسبت به ستاره‌های دور.

(۲) جهت چرخش در خلاف جهت گردش مداری است.

(۳) در استوای سیاره.

پیوست د

خواص عناصر

عنصر	نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm ³) در ۲۰۰C	نقطه ذوب (°C)	نقطه جوش (°C)	گرمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C
آکتینیم	Ac	۸۹	(۲۲۷)	—	۱۰۵۰	۳۲۰۰	۰٫۹۲
آلمینیوم	Al	۱۳	۲۶٫۹۸۱۵	۲٫۶۹۹	۶۶۰	۲۴۶۷	۰٫۹۰۰
آمریکیم	Am	۹۵	(۲۴۳)	۱٫۳۷	۹۹۴	۲۶۰۷	—
آنتیموان	Sb	۵۱	۱۲۱٫۷۵	۶٫۶۹	۶۳۰٫۵	۱۷۵۰	۰٫۲۰۵
آرگون	Ar	۱۸	۳۹٫۹۴۸	$۱٫۶۶۲۶ \times ۱۰^{-۳}$	-۱۸۹٫۲	-۱۸۵٫۷	۰٫۵۲۳
آرسنیک	As	۳۳	۷۴٫۹۲۱۶	۵٫۷۲	(جو ۲۸)	۶۱۳	۰٫۳۳۱
استاتین	At	۸۵	(۲۱۰)	—	۳۰۲	۳۳۷	—
باریم	Ba	۵۶	۱۳۷٫۳۳	۳٫۵	۷۲۵	۱۶۴۰	۰٫۲۰۵
برکلیم	Bk	۹۷	(۲۴۷)	—	—	—	—
بریلیوم	Be	۴	۹٫۰۱۲۲	۱٫۸۴۸	۱۲٫۷۸	۲۹۷۰	۱٫۸۳
بیسموث	Bi	۸۳	۲۰۸٫۹۸۰	۹٫۷۵	۲۷۱٫۳	۱۵۶۰	۰٫۱۲۲
بور	B	۵	۱۰٫۸۱۱	۲٫۳۴	۲۰٫۷۹	۲۵۵۰	۱٫۱۱
برم	Br	۳۵	۷۹٫۹۰۹	(مایع) ۳٫۱۲	-۷٫۲	۵۸	۰٫۲۹۳
کادمیم	Cd	۴۸	۱۱۲٫۴۱	۸٫۶۵	۳۲۰٫۹	۷۶۵	۰٫۲۲۶
کلسیم	Ca	۲۰	۴۰٫۰۸	۱٫۵۵	۸۳۹	۱۴۸۴	۰٫۶۲۴
کالیفرنیم	Cf	۹۸	(۲۵۱)	—	—	—	—
کربن	C	۶	۱۲٫۰۱۱	۲٫۲۵	۳۵۵۰	—	۰٫۶۹۱
سرمیم	Ce	۵۸	۱۴۰٫۱۲	۶٫۷۶۸	۷۹۸	۳۴۴۳	۰٫۱۸۸
سزیم	Cs	۵۵	۱۳۲٫۹۰۵	۱٫۸۷۳	۲۸٫۴۰	۶۳۶۹	۰٫۲۴۳
کلر	Cl	۱۷	۳۵٫۴۵۳	$۳٫۲۱۴ \times ۱۰^{-۲}$ (۰°C)	-۱۰۱	-۲۴٫۶	۰٫۴۸۶
کرم	Cr	۲۴	۵۱٫۹۹۶	۷٫۱۹	۱۸۵۷	۲۶۷۲	۰٫۴۴۸
کیالت	Co	۲۷	۵۸٫۹۳۳۲	۸٫۸۵	۱۴۹۵	۲۸۷۰	۰٫۴۲۳
مس	Cu	۲۹	۶۳٫۵۴	۸٫۹۶	۱۰۸۳٫۴	۲۵۶۷	۰٫۳۸۵

(J/g ^o ·C)	نقطه جوش	نقطه ذوب	چگالی (g/cm ³) در ۲۰(°C)	جرم مولی (g/mol)	عدد اتمی (Z)	نماد	عنصر
در ۲۵(°C)	(°C)	(°C)					
—	—	۱۳۴۰	—	(۲۴۷)	۹۶	Cm	کوریوم Curium
۰٫۱۷۲	۲۵۶۷	۱۴۱۲	۸٫۵۵	۱۶۲٫۵۰	۶۶	Dy	دیسپروزیوم Dysprosium
—	—	—	—	(۲۵۲)	۹۹	Es	اینشتینیم Einsteinium
۰٫۱۶۷	۲۸۶۸	۱۵۲۹	۹٫۰۷	۱۶۷٫۲۶	۶۸	Er	اریبیم Erbium
۰٫۱۶۳	۱۵۲۷	۸۲۲	۵٫۲۴۵	۱۵۱٫۹۶	۶۳	Eu	اروپیم Europium
—	—	—	—	(۲۵۷)	۱۰۰	Fm	فرمیم Fermium
۰٫۷۵۳	-۱۸۸٫۲	-۲۱۹٫۶	$۱٫۶۹۶ \times ۱۰^{-۲}(°C)$	۱۸٫۹۹۸۴	۹	F	فلورین Fluorine
—	(۶۷۷)	(۲۷)	—	(۲۲۳)	۸۷	Fr	فرانسیسم Francium
۰٫۲۳۴	۳۲۷۳	۱۳۱۳	۷٫۹۰	۱۵۷٫۲۵	۶۴	Gd	گادولینیم Gadolinium
۰٫۳۷۷	۲۴۰۳	۲۹٫۷۸	۵٫۹۰۷	۶۹٫۷۲	۳۱	Ga	گالیم Gallium
۰٫۳۲۲	۲۸۳۰	۹۳۷٫۴	۵٫۳۲۳	۷۲٫۶۱	۳۲	Ge	ژرمانیم Germanium
۰٫۱۳۱	۲۸۰۸	۱۰۶۴٫۴۳	۱۹٫۳۲	۱۹۶٫۹۶۷	۷۹	Au	طلا Gold
۰٫۱۴۴	۴۶۰۲	۲۲۲۷	۱۳٫۳۱	۱۷۸٫۴۹	۷۲	Hf	هافنیم Hafnium
۵٫۲۳	-۲۶۸٫۹	-۲۷۲٫۲	$۰٫۱۶۶۴ \times ۱۰^{-۲}$	۴٫۰۰۲۶	۲	He	هلیوم Helium
۰٫۱۶۵	۲۷۰۰	۱۴۷۴	۸٫۷۹	۱۶۴٫۹۳۰	۶۷	Ho	هولمیم Holmium
۱۴٫۴	-۲۵۲٫۸۷	-۲۵۹٫۳۴	$۰٫۰۸۳۷۵ \times ۱۰^{-۲}$	۱٫۰۰۷۹۷	۱	H	هیدروژن Hydrogen
۰٫۲۳۳	۲۰۸۰	۱۵۶٫۶	۷٫۳۱	۱۱۴٫۸۲	۴۹	In	ایندیم Indium
۰٫۲۱۸	۱۸۴٫۳۵	۱۱۳٫۵	۴٫۹۴	۱۲۶٫۹۰۴۴	۵۳	I	ید Iodine
۰٫۱۳۰	۴۱۳۰	۲۴۱۰	۲۲٫۵	۱۹۲٫۲	۷۷	Ir	ایریدیم Iridium
۰٫۴۴۷	۲۷۵۰	۱۵۳۵	۷٫۸۷	۵۵٫۸۴۷	۲۶	Fe	آهن Iron
۰٫۲۴۷	-۱۵۲٫۳	-۱۵۶٫۶	$۳٫۴۸۸ \times ۱۰^{-۲}$	۸۳٫۸۰	۳۶	Kr	کریپتون Krypton
۰٫۱۹۵	۳۴۶۴	۹۱۸	۶٫۱۴۵	۱۳۸٫۹۱	۵۷	La	لاتان Lanthanum
—	—	—	—	(۲۶۰)	۱۰۳	Lr	لورنسیوم Lawrencium
۰٫۱۲۹	۱۷۴۰	۳۲۷٫۵۰	۱۱٫۳۶	۲۰۷٫۱۹	۸۲	Pb	سرب Lead
۳٫۵۸	۱۳۴۲	۱۸۰٫۵۴	۰٫۵۳۴	۶٫۹۳۹	۳	Li	لیتیم Lithium
۰٫۱۵۵	۳۴۰۲	۱۶۶۳	۹٫۸۴	۱۷۴٫۹۷	۷۱	Lu	لوتتیم Lutetium
۱٫۰۳	۱۰۹۰	۶۴۹	۱٫۷۴	۲۴٫۳۰۵	۱۲	Mg	منیزیم Magnesium
۰٫۴۸۱	۱۹۶۲	۱۲۴۴	۷٫۴۳	۵۴٫۹۳۸۰	۲۵	Mn	منگنز Manganese
—	—	—	—	(۲۵۸)	۱۰۱	Md	مندلویوم Mendelevium
۰٫۱۳۸	۳۵۷	-۳۸٫۸۷	۱۳٫۵۵	۲۰۰٫۵۹	۸۰	Hg	جیوه Mercury
۰٫۲۵۱	۴۶۱۲	۲۶۱۷	۱۰٫۲۲	۹۵٫۹۴	۴۲	Mo	مولیبدن Molybdenum
۰٫۱۸۸	۳۰۷۴	۱۰۲۱	۷٫۰۰	۱۴۴٫۲۴	۶۰	Nd	نئودیمیم Neodymium
۱٫۰۳	-۲۴۶٫۰	-۲۴۸٫۶۷	$۰٫۸۳۸۷ \times ۱۰^{-۲}$	۲۰٫۱۸۰	۱۰	Ne	نئون Neon
۱٫۲۶	۳۹۰۲	۶۴۰	۲۰٫۲۵	(۲۳۷)	۹۳	Np	نپتونیم Neptunium
۰٫۴۴۴	۲۷۳۲	۱۴۵۳	۸٫۹۰۲	۵۸٫۶۹	۲۸	Ni	نیکل Nickel
۰٫۲۶۴	۴۷۴۲	۲۴۶۸	۸٫۵۷	۹۲٫۹۰۶	۴۱	Nb	نیوبیم Niobium
۱٫۰۳	-۱۹۵٫۸	-۲۱۰	$۱٫۱۶۴۹ \times ۱۰^{-۲}$	۱۴٫۰۰۶۷	۷	N	نیتروژن Nitrogen
—	—	—	—	(۲۵۹)	۱۰۲	No	نوبلیوم Nobelium

درمای ویژه (J/g°C) در ۲۵°C	نقطه جوش (°C)	نقطه ذوب (°C)	چگالی (g/cm ^۳) در ۲۰°C	جرم مولی (g/mol)	عدد اتمی (Z)	نماد	عنصر
۰٫۱۳۰	۵۰۲۷	۳۰۴۵	۲۲٫۵۷	۱۹۰٫۲	۷۶	Os	Osmium اسمیم
۰٫۹۱۳	-۱۸۳٫۰	-۲۱۸٫۴	$۱٫۳۳۱۸ \times ۱۰^{-۳}$	۱۵٫۹۹۹۴	۸	O	Oxygen اکسیژن
۰٫۲۴۳	۳۱۴۰	۱۵۵۴	۱۲٫۰۲	۱۰۶٫۴	۴۶	Pb	Palladium پادلادیم
۰٫۷۴۱	۲۸۰	۴۴٫۲۵	۱٫۸۳	۳۰٫۹۷۳۸	۱۵	P	Phosphorus فسفر
۰٫۱۳۴	۳۸۲۷	۱۷۷۲	۲۱٫۴۵	۱۹۵٫۰۹	۷۸	Pt	Platinum پلاتین
۰٫۱۳۰	۳۲۳۲	۶۴۱	۱۹٫۸۴	(۲۴۴)	۹۴	Pu	Plutonium پلوتونیم
—	۹۶۲	۲۵۴	۹٫۲۴	(۲۰۹)	۸۴	Po	Polonium پولونیم
۰٫۷۵۸	۷۶۰	۶۳٫۲۵	۰٫۸۶	۳۹٫۰۹۸	۱۹	K	Potassium پتاسیم
۰٫۱۹۷	۳۵۲۰	۹۳۱	۶٫۷۷۳	۱۴۰٫۹۰۷	۵۹	Pr	Praseodymium پرازئودیمیم
—	(۳۰۰۰)	۱۰۴۲	۷٫۲۶۴	(۱۴۵)	۶۱	Pm	Promethium پرومتیم
—	—	۱۶۰۰	—	(۲۳۱)	۹۱	Pa	Protactinium پروتاکتینیم
—	۱۱۴۰	۷۰۰	۵٫۰	(۲۲۶)	۸۸	Ra	Radium رادیوم
۰٫۰۹۲	-۶۱٫۸	-۷۱	$۹٫۹۶ \times ۱۰^{-۳} (۰°C)$	(۲۲۲)	۸۶	Rn	Radon رادون
۰٫۱۳۴	۵۶۲۷	۳۱۸۰	۲۱٫۰۴	۱۸۶٫۲	۷۵	Re	Rhenium رنیم
۰٫۲۴۳	۳۷۲۷	۱۹۶۵	۱۲٫۴۴	۱۰۲٫۹۰۵	۴۵	Rh	Rhodium رودیم
۰٫۳۶۴	۶۸۶	۳۸٫۸۹	۱٫۵۳	۸۵٫۴۷	۳۷	Rb	Rubidium روبییدیم
۰٫۲۳۹	۳۹۰۰	۲۳۱۰	۱٫۲۲	۱۰۱٫۱۰۷	۴۴	Ru	Ruthenium روتنیم
۰٫۱۹۷	۱۷۹۴	۱۰۷۴	۷٫۴۹	۱۵۰٫۳۵	۶۲	Sm	Samarium ساماریم
۰٫۵۶۹	۲۸۳۶	۱۵۴۱	۲٫۹۹	۴۴٫۹۵۶	۲۱	Sc	Scandium اسکاندیم
۰٫۳۱۸	۶۸۵	۲۱۷	۴٫۷۹	۷۸٫۹۶	۳۴	Se	Selenium سلنیم
۰٫۷۱۲	۲۳۵۵	۱۴۱۰	۲٫۳۳	۲۸٫۰۸۶	۱۴	Si	Silicon سیلیسیوم
۰٫۲۳۴	۲۲۱۲	۹۶۱٫۹	۱۰٫۴۹	۱۰۷٫۶۸	۴۷	Ag	Silver نقره
۱٫۲۳	۸۸۲٫۹	۹۷٫۸۱	۰٫۹۷۱۲	۲۲٫۹۸۹۸	۱۱	Na	Sodium سدیم
۰٫۷۳۷	۱۳۸۴	۷۶۹	۲٫۵۴	۸۷٫۶۲	۳۸	Sr	Strontium استرونسیم
۰٫۷۰۷	۴۴۴٫۶	۱۱۲٫۸	۲٫۰۷	۳۲٫۰۶۶	۱۶	S	Sulfur گوگرد
۰٫۱۳۸	۵۴۲۵	۲۹۹۶	۱۶٫۶	۱۸۰٫۹۴۸	۷۳	Ta	Tantalum تانтал
۰٫۲۰۹	۴۸۷۷	۲۱۷۲	۱۱٫۴۶	(۹۸)	۴۳	Tc	Technetium تکنسیم
۰٫۲۰۱	۹۹۰	۴۴۹٫۵	۶٫۲۴	۱۲۷٫۶۰	۵۲	Te	Tellurium تلور
۰٫۱۸۰	۳۲۳۰	۱۳۵۷	۸٫۲۵	۱۵۸٫۹۲۴	۶۵	Tb	Terbium تربیم
۰٫۱۳۰	۱۴۵۷	۳۰۴	۱۱٫۸۵	۲۰۴٫۳۸	۸۱	Tl	Thallium تالیم
۰٫۱۱۷	(۳۸۵۰)	۱۷۵۰	۱۱٫۷۲	(۲۳۲)	۹۰	Th	Thorium توریم
۰٫۱۵۹	۱۹۵۰	۱۵۴۵	۹٫۳۱	۱۶۸٫۹۳۴	۶۹	Tm	Thulium تولیم
۰٫۲۲۶	۲۲۷۰	۲۳۱٫۹۷	۷٫۳۱	۱۱۸٫۷۱	۵۰	Sn	Tin قلع
۰٫۵۲۳	۳۲۸۷	۱۶۶۰	۴٫۵۴	۴۷٫۸۸	۲۲	Ti	Titanium تیتان
۰٫۱۳۴	۵۶۶۰	۳۴۱۰	۱۹٫۳	۱۸۳٫۸۵	۷۴	W	Tungsten تنگستن
۰٫۱۱۷	۳۸۱۸	۱۱۳۲	۱۹٫۰۷	(۲۳۸)	۹۲	U	Uranium اورانیم
۰٫۴۹۰	۳۳۸۰	۱۸۹۰	۶٫۱	۵۰٫۹۴۲	۲۳	V	Vanadium وانادیم
۰٫۱۵۹	-۱۰۸	-۱۱۱٫۷۹	$۵٫۴۹۵ \times ۱۰^{-۳}$	۱۳۱٫۳۰	۵۴	Xe	Xenon زنون

عنصر	نماد	عدد اتمی (Z)	جرم مولی (g/mol)	چگالی (g/cm ³) در ۲۰°C	نقطه ذوب (°C)	نقطه جوش (°C)	تاریخ کشف
ایتربیوم	Yb	۷۰	۱۷۳٫۰۴	۶٫۹۶۶	۸۱۹	۱۱۹۶	۱۸۷۸
ایتريوم	Y	۳۹	۸۸٫۹۰۵	۴٫۴۶۹	۱۵۵۲	۵۳۳۸	۱۸۲۷
روی	Zn	۳۰	۶۵٫۳۷	۷٫۱۳۳	۴۱۹٫۵۸	۹۰۷	۱۸۲۹
زیرکونیم	Zr	۴۰	۹۱٫۲۲	۶٫۵۰۶	۱۸۵۲	۴۳۷۷	۱۸۲۶

اعداد داخل پرانتز در ستون جرم مولی عبارت‌اند از اعداد جرمی طولانی عمرترین ایزوتوپهای عناصر رادیواکتیو.

همه خواص فیزیکی مربوط به فشار یک اتمسفرند، مگر طور دیگری مشخص شده باشد. اطلاعات مربوط به گازها فقط برای گازهایی معتبرند که در حالت مولکولی عادی خودشان — مثل H₂، He، O₂، Ne و غیره — باشند. مقادیر گرمای ویژه گازها در فشار ثابت محاسبه شده‌اند.

منبع:

Handbook of Chemistry and Physics, 71st edition (CRC Press, 1990).

پیوست ۵

جدول تناوبی عناصر

فلزات قلیایی
(شامل هیدروژن)

گازهای بی اثر

1																	2
H																	He
3	4											5	6	7	8	9	10
Li	Be											B	C	N	O	F	Ne
11	12											13	14	15	16	17	18
Na	Mg											Al	Si	P	S	Cl	Ar
19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36
K	Ca	Sc	Ti	V	Cr	Mn	Fe	Co	Ni	Cu	Zn	Ga	Ge	As	Se	Br	Kr
37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54
Rb	Sr	Y	Zr	Nb	Mo	Tc	Ru	Rh	Pd	Ag	Cd	In	Sn	Sb	Te	I	Xe
55	56	57-71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84	85	86
Cs	Ba	●	Hf	Ta	W	Re	Os	Ir	Pt	Au	Hg	Tl	Pb	Bi	Po	At	Rn
87	88	89-103	104	105	106	107	108	109	...								
Fr	Ra	●	Rf*	Ha*	**	**	**	**									

سری لانتانید

سری اکتینید

57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
La	Ce	Pr	Nd	Pm	Sm	Eu	Gd	Tb	Dy	Ho	Er	Tm	Yb	Lu
89	90	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100	101	102	103
Ac	Th	Pa	U	Np	Pu	Am	Cm	Bk	Cf	Es	Fm	Md	No	Lr

* نام این عناصر (رادرفوردیم و هانیم)، به علت ادعاهای متناقضی که در مورد کشف آنها در میان است، هنوز پذیرش عام نیافته است. گروهی در روسیه نامهای کورچاتوویم و نیلسبوریم را پیشنهاد کرده‌اند.

** کشف این عناصر گزارش شده ولی فعلاً هیچ اسمی برای آنها اختیار نشده است.

پیوست و

ذرات بنیادی

۱. ذرات بسیط

لیتون‌ها							
محصولات نوعی و پاشی	عمر متوسط (s)	جرم سکون (MeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	پادذره	نماد	ذره
	∞	0.511	$1/2$	-1	e^+	e^-	الکترون
$e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$	∞	< 0.000002	$1/2$	0	$\bar{\nu}_e$	ν_e	نوترینوی الکترون
	2.2×10^{-6}	105.7	$1/2$	-1	μ^+	μ^-	موئون
	∞	< 0.3	$1/2$	0	$\bar{\nu}_\mu$	ν_μ	نوترینوی موئون
$\mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau$	3.0×10^{-12}	1784	$1/2$	-1	τ^+	τ^-	تاو
	∞	< 40	$1/2$	0	$\bar{\nu}_\tau$	ν_τ	نوترینوی تاو

کوارک‌ها							
خواص دیگر	جرم سکون ^۱ (MeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	پادذره	نماد	طعم	
$C = S = T = B = 0$	300	$1/2$	$+2/3$	\bar{u}	u	بالا	
$C = S = T = B = 0$	300	$1/2$	$-1/3$	\bar{d}	d	پایین	
افسون (C) = +	1500	$1/2$	$+2/3$	\bar{c}	c	افسون	
شگفتی (S) = -1	500	$1/2$	$-1/3$	\bar{s}	s	شگفتی	
سر بوزن (T) = +1	$> 40,000$	$1/2$	$+2/3$	\bar{t}	t	سر ^۲	
ته بوزن (B) = -1	4700	$1/2$	$-1/3$	\bar{b}	b	ته	

ذرات میدان							
جرم سکون (GeV)	اسپین ($h/2\pi$)	بار (e)	برهم‌کنش	نماد	ذره		
0	2	0	گرانش		گراویتون ^۲		
80.6	1	± 1	ضعیف	W^+, W^-	بوزون ضعیف		
91.2	1	0	ضعیف	Z^0	بوزون ضعیف		
0	1	0	الکترومغناطیسی	γ	فوتون		
0	1	0	قوی (رنگ)	g	گلوئون		

باریون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین ($\hbar/2\pi$)	جرم سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	واپاشی نوعی
پروتون	p	uud	\bar{p}	+1	1/2	938	$> 10^{30}$	$\pi^0 + e^+(?)$
نوترون	n	udd	\bar{n}	0	1/2	940	889	$p + e^- + \bar{\nu}_e$
لامبادا	Λ^0	uds	$\bar{\Lambda}^0$	0	1/2	1116	2.6×10^{-10}	$p + \pi^-$
اومگا	Ω^-	sss	$\bar{\Omega}^-$	-1	3/2	1673	8.2×10^{-11}	$\Lambda^0 + K^-$
دلتا	Δ^{++}	uuu	$\bar{\Delta}^{++}$	+2	3/2	1232	5.7×10^{-24}	$p + \pi^+$
لامبادا	Λ_c^+	udc	$\bar{\Lambda}_c^+$	+1	1/2	2285	1.9×10^{-13}	$\Lambda^0 + \pi^+$

مزون‌ها

ذره	نماد	محتوای کوارکی	پادذره	بار (e)	اسپین ($\hbar/2\pi$)	جرم سکون (MeV)	عمر متوسط (s)	واپاشی نوعی
پیون	π^+	u \bar{d}	π^-	+1	0	140	2.6×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
پیون	π^0	u \bar{u} + d \bar{d}	π^0	0	0	135	8.4×10^{-17}	$\gamma + \gamma$
کائون	K^+	u \bar{s}	K^-	+1	0	494	1.2×10^{-8}	$\mu^+ + \nu_\mu$
کائون	K^0	d \bar{s}	\bar{K}^0	0	0	498	0.9×10^{-10}	$\pi^+ + \pi^-$
رو	ρ^+	u \bar{d}	$\bar{\rho}^-$	+1	1	768	4.5×10^{-24}	$\pi^+ + \pi^-$
مزون D	D^+	c \bar{d}	D^-	+1	0	1869	1.1×10^{-12}	$K^- + \pi^+ + \pi^+$
پی‌سای	ψ	c \bar{c}	ψ	0	-1	3097	1.0×10^{-20}	$e^+ + e^-$
مزون B	B^+	u \bar{b}	B^-	+1	0	5278	1.2×10^{-12}	$D^- + \pi^+ + \pi^+$
اوپسیلون	Υ	b \bar{b}	Υ	0	1	9460	1.3×10^{-20}	$e^+ + e^-$

۱) چون تا به حال کوارک آزاد مشاهده نشده، اندازه‌گیری جرم سکون کوارکها در حالت آزاد هم ممکن نبوده است. جرمهای سکونی که در این جدول آمده‌اند، جرمهای مؤثرند و مربوط به کوارکهایی هستند که ذرات مرکب را می‌سازند و به آنها مقیدند.

۲) انتظار می‌رود چنین ذراتی وجود داشته باشند ولی هنوز مشاهده نشده‌اند.

منبع:

"Review of Particle Properties" *Physics Letters B*, vol. 239 (April 1990).

پیوست ز

ضرایب تبدیل

زیرگرفته شده است.

G. Shortley and D. Williams, *Elements of Physics*,
Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1971.

ضرایب تبدیل را می‌توان مستقیماً از جدولها خواند. به‌عنوان مثال،
 $۱۶۷^\circ = ۱۶۷ \times ۲,۷۷۸ \times ۱۰^{-۲}$ پس دور $۱۶۷^\circ = ۱۶۷ \times ۲,۷۷۸ \times ۱۰^{-۲}$.
کمتهای SI با حروف سیاه نشان داده شده‌اند و بخشی از آنها از کتاب

زاویه مسطحه

rev	rad	"	'	°	
$۲,۷۷۸ \times ۱۰^{-۲}$	$۱,۷۴۵ \times ۱۰^{-۲}$	۳۶۰۰	۶۰	۱	یک درجه =
$۴,۶۳۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲,۹۰۹ \times ۱۰^{-۴}$	۶۰	۱	$۱,۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	یک دقیقه =
$۷,۷۱۶ \times ۱۰^{-۷}$	$۴,۸۴۸ \times ۱۰^{-۶}$	۱	$۱,۶۶۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۲,۷۷۸ \times ۱۰^{-۲}$	یک ثانیه =
۰,۱۵۹۲	۱	$۲,۰۶۳ \times ۱۰^۵$	۳۴۳۸	۵۷,۳۰	یک رادیان =
۱	۶,۲۸۳	$۱,۲۹۶ \times ۱۰^۶$	$۲,۱۶ \times ۱۰^۴$	۳۶۰	یک دور =

زاویه فضایی

۱ کره = ۴π استرادیان = رادیان ۱۲,۵۷

طول

mil	ft	in	km	m	cm	
$۶,۲۱۴ \times ۱۰^{-۶}$	$۳,۲۸۱ \times ۱۰^{-۲}$	۰,۳۹۳۷	$۱۰^{-۵}$	$۱۰^{-۲}$	۱	یک سانتی‌متر =
$۶,۲۱۴ \times ۱۰^{-۴}$	۳,۲۸۱	۳۹,۳۷	$۱۰^{-۳}$	۱	۱۰۰	یک متر =
۰,۶۲۱۴	۳,۲۸۱	$۳,۹۳۷ \times ۱۰^۴$	۱	۱۰۰۰	$۱۰^۵$	یک کیلومتر =
$۱,۵۷۸ \times ۱۰^{-۵}$	$۸,۳۳۳ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۲,۵۴۰ \times ۱۰^{-۵}$	$۲,۵۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	۲,۵۴۰	یک اینچ =
$۱,۸۹۴ \times ۱۰^{-۴}$	۱	۱۲	$۳,۰۴۸ \times ۱۰^{-۴}$	۰,۳۰۴۸	۳,۰۴۸	یک فوت =
۱	۵۲۸۰	$۶,۳۳۶ \times ۱۰^۴$	۱,۶۰۹	۱,۶۰۹	$۱,۶۰۹ \times ۱۰^۵$	یک مایل =

یک یارد = ۳ فوت
یک راد = ۱۶۷ فوت
یک میل = $۱۰^{-۲}$ اینچ
۱ نانومتر = $۱۰^{-۹}$ متر

یک سال نوری = $۹,۴۶۰ \times ۱۰^{۱۲}$ کیلومتر
یک پارسک = $۳,۰۸۴ \times ۱۰^{۱۳}$ کیلومتر
یک فایتم = ۶ فوت
یک شعاع بور = $۵,۲۹۲ \times ۱۰^{-۱۱}$ متر

یک آنگستروم = $۱۰^{-۱۰}$ متر
یک مایل دریایی = ۱۸۵۲ متر = ۱,۱۵۱ مایل = ۶۰۷۸ فوت
یک فرمی = $۱۰^{-۱۵}$ متر

مساحت

in ²	ft ²	cm ²	m ²	
۱۵۵۰	۱۰٫۷۶	۱۰ ^۴	۱	یک متر مربع =
۰٫۱۵۵۰	۱۰٫۷۶ × ۱۰ ^{-۲}	۱	۱۰ ^{-۴}	یک سانتی متر مربع =
۱۴۴	۱	۹۲۹۰	۹٫۲۹۰ × ۱۰ ^{-۲}	یک فوت مربع =
۱	۶٫۹۴۴ × ۱۰ ^{-۲}	۶٫۴۵۲	۶٫۴۵۲ × ۱۰ ^{-۴}	یک اینچ مربع =

یک مایل مربع = $۲٫۷۸۸ \times ۱۰^۷$ فوت مربع = ۶۴۰ ایگر
 یک بارن = $۱۰^{-۲۸}$ مترمربع
 ۱ ایگر = ۴۳۵۶۰ فوت مربع
 ۱ هکتار = $۱۰^۴$ مترمربع = ۲٫۴۷۱ ایگر

حجم

in ³	ft ³	li	cm ³	m ³	
$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^۴$	۲۵٫۳۱	۱۰۰۰	۱۰ ^۶	۱	یک مترمکعب =
$۶٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۵}$	۱۰۰۰۰×۱۰^{-۲}	۱	۱۰ ^{-۶}	یک سانتی مترمکعب =
۶۱٫۰۲	$۲٫۵۳۱ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۰۰۰	۱۰۰۰۰×۱۰^{-۲}	یک لیتر =
۱۷۲۷	۱	۲۸٫۳۲	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^۴$	$۲٫۸۳۲ \times ۱۰^{-۲}$	یک فوت مکعب =
۱	$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۴}$	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶٫۳۹	$۱٫۶۳۹ \times ۱۰^{-۵}$	یک اینچ مکعب =

یک گالن مایع امریکایی = ۴ کوارت مایع امریکایی = ۸ پینت امریکایی = ۱۲۸ اونس مایع امریکایی = ۲۳۱ اینچ مکعب
 یک گالن امیريال انگلیسی = ۴٫۷۷۴ اینچ مکعب = ۱٫۲۰۱ گالن مایع امریکایی

جرم

ton	lb	oz	u	slug	kg	g	
$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۲۰۵ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۵۲۷ \times ۱۰^{-۲}$	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۳}$	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۵}$	۰٫۰۰۱	۱	یک گرم =
$۱٫۱۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	۲٫۲۰۵	۳۵٫۲۷	$۶٫۰۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$	$۶٫۸۵۲ \times ۱۰^{-۲}$	۱	۱۰۰۰	یک کیلوگرم =
$۱٫۶۰۹ \times ۱۰^{-۲}$	۳۲٫۱۷	۵۱۳٫۸	$۸٫۷۸۶ \times ۱۰^{۲۷}$	۱	۱۴٫۵۹	$۱٫۴۵۹ \times ۱۰^۴$	یک اسلاگ =
$۱٫۸۳۰ \times ۱۰^{-۲}$	$۳٫۶۶۲ \times ۱۰^{-۲}$	$۵٫۸۵۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۱٫۱۳۸ \times ۱۰^{-۲۸}$	$۱٫۶۶۰ \times ۱۰^{-۲۷}$	$۱٫۶۶۱ \times ۱۰^{-۲۴}$	یک u =
$۳٫۱۲۵ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۲۵۰ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۱٫۷۱۸ \times ۱۰^{۲۵}$	$۱٫۹۴۳ \times ۱۰^{-۲}$	$۲٫۸۳۵ \times ۱۰^{-۲}$	۲۸٫۳۵	یک اونس =
۰٫۰۰۰۵	۱	۱۶	$۲٫۷۲۲ \times ۱۰^{۲۶}$	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۴۵۳۶	۴۵۳٫۶	یک پوند =
۱	۲۰۰۰	$۳٫۲ \times ۱۰^۴$	$۵٫۴۶۳ \times ۱۰^{۲۱}$	۶۲٫۱۶	۹۰۷٫۲	۹۰۷۲×۱۰^۵	یک تن =

کمیت‌هایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یکای جرم نیستند، ولی غالباً به این عنوان به کار می‌روند. مثلاً وقتی می‌نویسیم $۱ \text{ kg} = ۲٫۲۰۵ \text{ lb}$ ، به این معناست که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = ۹٫۸۰۶۶۵ \text{ m/s}^2$)، یک کیلوگرم جرمی است که ۲٫۲۰۵ پوند وزن دارد.

چگالی

lb/in ³	lb/ft ³	g/cm ³	kg/m ³	slug/ft ³	
$۱٫۸۶۲ \times ۱۰^{-۲}$	۳۲٫۱۷	۰٫۵۱۵۴	۵۱۵٫۴	۱	یک اسلاگ بر فوت مکعب =
$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۵}$	$۶٫۲۲۳ \times ۱۰^{-۲}$	۰٫۰۰۱	۱	$۱٫۹۴۰ \times ۱۰^{-۲}$	یک کیلوگرم بر مترمکعب =
$۳٫۶۱۳ \times ۱۰^{-۲}$	۶۲٫۲۳	۱	۱۰۰۰	۱٫۹۴۰	یک گرم بر سانتی مترمکعب =
$۵٫۷۸۷ \times ۱۰^{-۲}$	۱	$۱٫۶۰۲ \times ۱۰^{-۲}$	۱۶٫۰۲	$۳٫۱۰۸ \times ۱۰^{-۲}$	یک پوند بر فوت مکعب =
۱	۱۷۲۸	۲۷٫۶۸	$۲٫۷۶۸ \times ۱۰^۳$	۵۳٫۷۱	یک پوند بر اینچ مکعب =

کمیت‌هایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند چگالی وزنی هستند و به این جهت، از نظر ابعادی با چگالیهای جرمی متفاوت‌اند. به جدول جرم رجوع کنید.

زمان

s	min	h	d	y	
$3,156 \times 10^7$	$5,259 \times 10^5$	$8,766 \times 10^3$	365,2	1	یک سال =
$8,640 \times 10^4$	1440	24	1	$2,738 \times 10^{-3}$	یک روز =
3600	60	1	$4,167 \times 10^{-2}$	$1,141 \times 10^{-4}$	یک ساعت =
60	1	$1,667 \times 10^{-2}$	$6,944 \times 10^{-4}$	$1,901 \times 10^{-6}$	یک دقیقه =
1	$1,667 \times 10^{-2}$	$2,778 \times 10^{-4}$	$1,157 \times 10^{-5}$	$3,169 \times 10^{-8}$	یک ثانیه =

سرعت

cm/s	mi/h	m/s	km/h	ft/s	
30,48	0,6818	0,3048	1,097	1	یک فوت بر ثانیه =
27,78	0,6214	0,2778	1	0,9113	یک کیلومتر بر ثانیه =
100	2,237	1	3,6	3,281	یک متر بر ثانیه =
44,70	1	0,4470	1,609	1,467	یک مایل بر ساعت =
1	$2,237 \times 10^{-2}$	0,1	$3,6 \times 10^{-2}$	$3,281 \times 10^{-2}$	یک سانتی متر بر ثانیه =

یک فوت بر ثانیه = یک مایل دریایی بر ساعت = 1,688 فوت بر ثانیه
یک مایل بر دقیقه = 88,00 فوت بر ثانیه = 60,00 مایل بر ساعت

نیرو

kgf	gf	pdl	lb	N	dyn	
$1,020 \times 10^{-2}$	$1,020 \times 10^{-2}$	$7,233 \times 10^{-5}$	$2,248 \times 10^{-6}$	10^{-5}	1	یک دین =
0,1020	1020	7,233	0,2248	1	10^5	یک نیوتون =
2,4536	245,36	22,17	1	2,248	$4,448 \times 10^5$	یک پوند =
$1,310 \times 10^{-2}$	13,10	1	$3,108 \times 10^{-2}$	0,1313	$1,313 \times 10^4$	یک پوندال =
0,001	1	$7,093 \times 10^{-2}$	$2,205 \times 10^{-3}$	$9,807 \times 10^{-2}$	980,7	یک گرم نیرو =
1	1000	70,93	2,205	9,807	$9,807 \times 10^5$	یک کیلوگرم نیرو =

کمیتهایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند، یکای نیرو نیستند ولی غالباً به این عنوان به کار می‌روند. برای نمونه، اگر بنویسیم یک گرم نیرو " = 980,7 دین، منظورمان این است که در شرایط متعارف شتاب گرانی ($g = 9,80665 \text{ m/s}^2$)، یک گرم جرم تحت تأثیر یک نیروی 980,7 دین قرار دارد.

فشار

lb/ft ²	lb/in ²	Pa	cm - Hg	inch of Water	dyn/cm ²	atm	
2116	14,70	$1,013 \times 10^5$	76	40,68	$1,013 \times 10^6$	1	یک اتمسفر =
$2,089 \times 10^{-2}$	$1,405 \times 10^{-5}$	0,1	$7,501 \times 10^{-5}$	$4,015 \times 10^{-4}$	1	$9,869 \times 10^{-7}$	یک دین بر سانتی متر مربع =
0,202	$3,613 \times 10^{-2}$	249,1	0,1868	1	2491	$2,458 \times 10^{-2}$	یک اینچ آب ¹ در 4 درجه سلسیوس =
27,85	0,1934	1333	1	0,353	$1,333 \times 10^4$	$1,316 \times 10^{-2}$	یک سانتی متر جیوه ¹ در صفر درجه سلسیوس =
$2,089 \times 10^{-2}$	$1,450 \times 10^{-4}$	1	$7,501 \times 10^{-2}$	$4,015 \times 10^{-2}$	10	$9,869 \times 10^{-6}$	یک پاسکال =
144	1	$6,895 \times 10^3$	5,171	27,68	$6,895 \times 10^4$	$6,805 \times 10^{-2}$	یک پوند بر اینچ مربع =
1	$6,944 \times 10^{-2}$	47,88	$3,591 \times 10^{-2}$	0,1922	478,8	$4,725 \times 10^{-4}$	یک پوند بر فوت مربع =

۱. هر جا که شتاب گرانی دارای مقدار متعارف 9,80665 متر بر مجذور ثانیه است.

یک بار = 10^6 دین بر سانتی متر مربع = 0,1 میلی پاسکال
یک میلی بار = 10^3 دین بر سانتی متر مربع = 10^2 پاسکال

انرژی، کار، گرما

	kg	MeV	eV	kW · h	cal	J	hp · h	ft · lb	erg	Btu	
7.9×10^{12}	1.172×10^{-12}	6.585×10^{15}	6.585×10^{21}	2.93×10^{-4}	252	1055	3.929×10^{-4}	777.9	1.055×10^{10}	1	یکای انگلیسی = گرما
6.7×10^7	1.113×10^{-22}	6.242×10^5	6.242×10^{11}	2.778×10^{-12}	2.389×10^{-8}	10^{-7}	3.725×10^{-12}	7.376×10^{-8}	1	9.481×10^{-11}	یک ارگ =
9.37×10^4	1.509×10^{-17}	8.464×10^{12}	8.464×10^{18}	3.766×10^{-7}	3.238×10^{-3}	1.356	5.051×10^{-7}	1	1.356×10^7	1.285×10^{-3}	یک فوت پوند =
1.799×10^{15}	2.988×10^{-11}	1.676×10^{19}	1.676×10^{25}	7.457×10^5	6.413×10^5	2.685×10^6	1	1.980	2.685×10^{13}	2545	یک اسب بخار = ساعت
6.7×10^7	1.113×10^{-17}	6.242×10^{12}	6.242×10^{18}	2.778×10^{-7}	2.389×10^{-3}	1	3.725×10^{-7}	7.376×10^7	10^7	9.481×10^{-4}	یک ژول =
2.806×10^{10}	2.660×10^{-17}	2.613×10^{12}	2.613×10^{18}	1.163×10^{-6}	1	4.186×10^6	1.560×10^{-6}	3.088×10^7	4.186×10^7	3.969×10^{-3}	یک کالری =
2.213×10^{16}	3.007×10^{-11}	2.247×10^{19}	2.247×10^{25}	1	8.600	3.6	1.341	2.655×10^6	3.6	3413	یک کیلووات ساعت =
1.7×10^{-9}	1.782×10^{-26}	10^{-6}	1	4.45×10^{-26}	3.827×10^{-20}	1.502×10^{-11}	5.967×10^{-26}	1.182×10^{-19}	1.602×10^{-12}	1.519×10^{-22}	یک الکترون ولت =
1.7×10^{-2}	1.782×10^{-20}	1	10^6	4.45×10^{-20}	3.827×10^{-12}	1.502×10^{-13}	5.967×10^{-20}	1.182×10^{-12}	1.602×10^{-6}	1.519×10^{-16}	یک مگا الکترون ولت =
6.02×10^{26}	1	5.610×10^{24}	5.610×10^{30}	2.497×10^{10}	2.126×10^{16}	8.987×10^{16}	3.348×10^{10}	6.629×10^{17}	8.987×10^{17}	8.541×10^{12}	یک کیلوگرم =
1	1.661×10^{-27}	9.38×10^{-19}	9.38×10^{-31}	2.146×10^{-17}	2.054×10^{-11}	1.492×10^{-30}	5.559×10^{-17}	1.101×10^{-14}	1.492×10^{-2}	1.415×10^{-13}	یکای جرم اتمی =

کمیت‌هایی که در نواحی سایه‌دار آمده‌اند یک‌های خاص انرژی نیستند ولی به مناسبت در اینجا ذکر شده‌اند. این کمیتها از فرمول هم‌ارزی نسبیتی جرم-انرژی $E = mc^2$ به دست می‌آیند و انرژی آزاد شده را هنگام تبدیل کامل یک کیلوگرم یا یک یکای جرم اتمی (u) به انرژی، به دست می‌دهند.

توان

W	kW	cal/s	hp	ft · lb/s	Btu/h	
3.93×10^3	2.93×10^{-4}	6.998×10^{-2}	3.929×10^{-4}	7.2161	1	یک یکای انگلیسی گرما بر ساعت =
1.356	1.356×10^{-3}	3.239	1.818×10^{-3}	1	4.628	یک فوت-پوند بر ثانیه =
745.7	7.457	178.1	1	550	2545	یک اسب بخار =
4.186	4.186×10^{-3}	1	5.615×10^{-3}	3.088	14.29	یک کالری بر ثانیه =
1000	1	238.9	1.341	737.6	3413	یک کیلووات ساعت =
1	7.001	3.2389	1.341×10^{-3}	7.376	3.413	یک وات =

میدان مغناطیسی

milligauss	TESLA	gauss	
1000	10^{-4}	1	1 گاوس =
10^7	1	10^4	1 تسلا =
1	10^{-7}	10^3	1 میلی گاوس =

شار مغناطیسی

WEBER	maxwell	
10^{-8}	1	1 ماکسول =
1	10^8	1 وبر =

پیوست ح

فرمولهای ریاضی

هندسه

دایره‌ای به شعاع r : محیط $= 2\pi r$; مساحت $= \pi r^2$
 کره‌ای به شعاع r : مساحت $= 4\pi r^2$; حجم $= \frac{4}{3}\pi r^3$
 استوانه قائمی به شعاع r و ارتفاع h :
 مساحت $= 2\pi r^2 + 2\pi r h$; حجم $= \pi r^2 h$
 مثلثی با قاعده a و ارتفاع h : مساحت $= \frac{1}{2}ah$

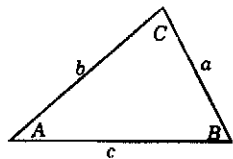
در مثلث

زاویه‌های A, B, C مقابل اضلاعی a, b, c هستند.

$$A + B + C = 180^\circ$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$



معادله درجه دو

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

نشانه‌ها و نمادهای ریاضی

= مساوی است با

\approx تقریباً مساوی است با

\sim از مرتبه بزرگی است

\neq مساوی نیست با (متفاوت است با)

\equiv یکسان است با، طبق تعریف عبارت است از

$>$ بزرگتر است از (\gg خیلی بزرگتر است از)

$<$ کوچکتر است از (\ll خیلی کوچکتر است از)

\geq بزرگتر است یا مساوی است با (یا کوچکتر نیست از)

\leq کوچکتر است یا مساوی است با (یا بزرگتر نیست از)

\pm به اضافه یا منهای ($\sqrt{4} = \pm 2$)

\propto متناسب است با

\sum علامت جمع

\bar{x} مقدار متوسط x

ضرب بردارها

اگر i و j و k بردارهای یکه در راستای x و y و z باشند:

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1, i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0$$

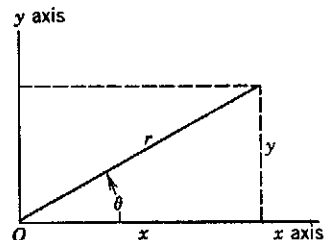
$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$$

توابع مثلثاتی زاویه θ

$$\sin \theta = \frac{y}{r} \quad \cos \theta = \frac{x}{r}$$

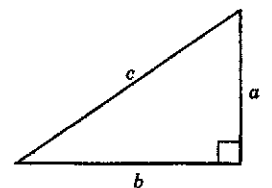
$$\tan \theta = \frac{y}{x} \quad \cot \theta = \frac{x}{y}$$

$$\sec \theta = \frac{r}{x} \quad \csc \theta = \frac{r}{y}$$



قضیه فیثاغورس

$$a^2 + b^2 = c^2$$



بسط نمایی

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

بسط لگاریتمی

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \dots (|x| < 1)$$

بسط مثلثاتی (θ برحسب رادیان)

$$\sin \theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \dots$$

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \dots$$

$$\tan \theta = \theta + \frac{\theta^3}{3} + \frac{2\theta^5}{15} + \dots$$

هر بردار \mathbf{a} برحسب مؤلفه‌هایش به صورت زیر نوشته می‌شود

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}$$

اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} و \mathbf{c} بردارهایی به ترتیب به طول a و b و c باشند و s یک کمیت اسکالر باشد:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c})$$

$$(s\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (s\mathbf{b}) = s(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

اگر θ زاویه کوچکتر (از دو زاویه) میان \mathbf{a} و \mathbf{b} باشد

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = ab \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \\ &= (a_y b_z - b_y a_z)\mathbf{i} + (a_z b_x - b_z a_x)\mathbf{j} \\ &\quad + (a_x b_y - b_x a_y)\mathbf{k} \end{aligned}$$

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = ab \sin \theta$$

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

اتحادهای مثلثاتی

$$\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta$$

$$\sin \theta / \cos \theta = \tan \theta$$

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad \sec^2 \theta - \tan^2 \theta = 1$$

$$\csc^2 \theta - \cot^2 \theta = 1$$

$$\sin 2\theta = 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 2 \cos^2 \theta - 1 = 1 - 2 \sin^2 \theta$$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$$

$$\sin \alpha \pm \sin \beta = 2 \sin \frac{1}{2}(\alpha \pm \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha \mp \beta)$$

قضیه دو جمله‌ای

$$(1 \pm x)^n = 1 \pm \frac{nx}{1!} + \frac{n(n-1)x^2}{2!} + \dots (x^r < 1)$$

$$(1 \pm x)^{-n} = 1 \mp \frac{nx}{1!} + \frac{n(n+1)x^2}{2!} + \dots (x^r < 1)$$

مشتقها و انتگرالها

در آنچه می‌آید، u و v توابعی از x و a و m مقادیر ثابت‌اند. به هر یک از انتگرالهای نامعین باید یک ثابت (اختیاری) انتگرال‌گیری اضافه کرد.

$$۱. \frac{dx}{dx} = ۱$$

$$۲. \frac{d}{dx}(au) = a \frac{du}{dx}$$

$$۳. \frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

$$۴. \frac{d}{dx}x^m = mx^{m-1}$$

$$۵. \frac{d}{dx}\ln x = \frac{1}{x}$$

$$۶. \frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$۷. \frac{d}{dx}e^x = e^x$$

$$۸. \frac{d}{dx}\sin x = \cos x$$

$$۹. \frac{d}{dx}\cos x = -\sin x$$

$$۱۰. \frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$$

$$۱۱. \frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$$

$$۱۲. \frac{d}{dx}\sec x = \tan x \sec x$$

$$۱۳. \frac{d}{dx}\csc x = -\cot x \csc x$$

$$۱۴. \frac{d}{dx}e^u = e^u \frac{du}{dx}$$

$$۱۵. \frac{d}{dx}\sin u = \cos u \frac{du}{dx}$$

$$۱۶. \frac{d}{dx}\cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$$

$$۱. \int dx = x$$

$$۲. \int au \, dx = a \int u \, dx$$

$$۳. \int (u+v) \, dx = \int u \, dx + \int v \, dx$$

$$۴. \int x^m \, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} (m \neq -1)$$

$$۵. \int \frac{dx}{x} = \ln|x|$$

$$۶. \int u \frac{dv}{dx} \, dx = uv - \int v \frac{du}{dx} \, dx$$

$$۷. \int e^x \, dx = e^x$$

$$۸. \int \sin x \, dx = -\cos x$$

$$۹. \int \cos x \, dx = \sin x$$

$$۱۰. \int \tan x \, dx = \ln|\sec x|$$

$$۱۱. \int \sin^2 x \, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x$$

$$۱۲. \int e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$۱۳. \int xe^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^2}(ax+1)e^{-ax}$$

$$۱۴. \int x^2 e^{-ax} \, dx = -\frac{1}{a^3}(a^2x^2 + 2ax + 2)e^{-ax}$$

$$۱۵. \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{n!}{a^{n+1}}$$

$$۱۶. \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} \, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} a^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

پیوست ط

برنامه‌های کامپیوتری

۱. نیروهای وابسته به زمان
از این برنامه در بخش ۶-۶ برای پیدا کردن مکان و سرعت اتومبیلی که شتابش وابسته به زمان است استفاده شد. این برنامه را می‌شود برای هر شتاب وابسته به زمانی به کار برد؛ کافی است سطر ۱۸۰ را طوری تغییر بدهیم که $a(t)$ مورد نظر را نشان بدهد. در این مورد از مثال بخش ۶-۶، یعنی $a(t) = -2.67t$ ، استفاده می‌کنیم.

در این پیوست سه مثال از برنامه‌های کامپیوتری‌ای که در متن کتاب از آنها برای محاسبات سینماتیکی شامل نیروهای متغیر وارد بر ذره استفاده شده است ارائه می‌شود. این برنامه‌ها به زبان BASIC نوشته شده‌اند و به راحتی می‌شود آنها را با اغلب کامپیوترهای شخصی سازگار کرد. در هر مورد، سرعت اولیه و مکان اولیه ذره را باید به ترتیب در سطرهای ۴۰ و ۵۰ وارد برنامه کرد.

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- TIME DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(T), V0, X0; COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES
40 V0 = 29.2
50 X0 = 0
60 'SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '     FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 'SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '     EXAMPLE; 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '     EXAMPLE; 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU = .5
130 'SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '     INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 100
160 DT = TU/NT
170 'INSERT A(T) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
180 DEF FNA(T)=-2.67*T
190 V=V0
200 X=X0
210 PRINT "TIME           VELOCITY           POSITION"
220 LPRINT "TIME           VELOCITY           POSITION"
230 'BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT
260 T = (TIME-1)*TU + N*DT
270 AI=FNA(T)
280 AI1=FNA(T-DT)
290 AV=.5*(AI+AI1)

```

```

300 DV=AV*DT
310 V = V + DV
320 DX = .5*(V + V - DV)*DT
330 X = X+DX
340 NEXT N
350 PRINT TIME*TU,V,X
360 LPRINT TIME*TU,V,X
370 NEXT TIME
400 END

```

TIME	VELOCITY	POSITION
.5	28.86625	14.54437
1	27.86499	28.75499
1.5	26.19618	42.2981
2	23.85994	54.83993
2.5	20.85615	66.04676
3	17.18486	75.5848
3.5	12.84612	83.1203
4	7.839843	88.31959
4.5	2.166084	90.84886
5	-4.175166	90.37431

که در آن $g = 9.8$ و $b = 0.33$ است. در سطر ۲۰۰ هر نیروی وابسته به سرعت دیگری هم می‌شود قرار داد. خروجی نشان می‌دهد که ذره، در مدت ۱٫۵s و پس از طی ۶m، به سرعت حدی ۵٫۴m/s می‌رسد.

۲. نیروهای وابسته به سرعت
این برنامه را می‌شود، طبق آنچه در بخش ۶-۷ گفته شد، برای بررسی حرکت پرتابه‌ای که تحت تأثیر نیروی مقاومت هواست به‌کار برد. در این مورد نیرو را در سطر ۲۰۰ به صورت $F(x) = g - bv^2$ می‌نویسیم.

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- VELOCITY DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN A(V), V0, X0; COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES
40 V0 = 0
50 X0 = 0
60 ' SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
70 '     FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
80 TMAX = 10
90 ' SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
100 '     EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
110 '     EXAMPLE: 2.0 FOR 2.0 HOUR
120 TU=.25
130 ' SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 '     INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT=100
160 DT=TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 ' INSERT A(V) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNA(V)=9.8 - .33*V*V
210 PRINT "TIME          VELOCITY          POSITION"
220 LPRINT "TIME          VELOCITY          POSITION"
230 ' BEGIN ITERATION
240 FOR TIME = 1 TO TMAX
250 FOR N = 1 TO NT

```

(ادامه)

نمونه خروجی

```

260 AV=FNA(V)
270 DV=AV*DT
280 V = V + DV
290 DX = .5*(V + V - DV)*DT
300 X = X+DX
310 NEXT N
320 PRINT TIME*TU,V,X
330 LPRINT TIME*TU,V,X
340 NEXT TIME
400 END

```

TIME	VELOCITY	POSITION
.25	2.299237	.2966358
.5	3.985542	1.08959
.75	4.765719	2.18636
1	5.161553	3.434
1.25	5.330923	4.748592
1.5	5.401125	6.091382
1.75	5.42984	7.445783
2	5.441519	8.804918
2.25	5.446261	10.16598
2.5	5.448183	11.52782

می‌کنیم. خروجی نشان می‌دهد که این ذره با دوره ۳٫۲s نوسان می‌کند، درست همان‌طور که برای ذره‌ای با چنین جرمی (سطر ۶۰) انتظار می‌رود.

۳. نیروهای وابسته به مکان
این برنامه در بخش ۴-۸ برای بررسی حرکت ذره‌ای که تحت تأثیر نیروی $F = -kx$ نوسان می‌کند به کار برده شد. نیرو را به صورت $F(x) = -۹٫۶x$ ، یعنی وقتی $k = ۹٫۶$ است، در سطر ۲۰۰ وارد

فهرست برنامه

```

10 ' BASIC KINEMATICS PROGRAM -- POSITION DEPENDENT FORCES
20 ' GIVEN F(X), V0, X0, M; COMPUTES V(T), X(T)
30 ' SPECIFY INITIAL VALUES AND MASS OF PARTICLE
40 V0 = 0 ' METERS PER SECOND
50 X0 = .05 ' METERS
60 M = 2.5 ' KILOGRAMS
70 ' SPECIFY THE MAXIMUM NUMBER OF TIME UNITS
80 ' FOR WHICH THE PROGRAM SHOULD RUN
90 TMAX = 40
100 ' SPECIFY THE VALUE OF ONE TIME UNIT
110 ' EXAMPLE: 0.5 FOR 0.5 SECOND
120 TU=.1
130 ' SPECIFY THE NUMBER OF INTERVALS DT
140 ' INTO WHICH EACH TIME UNIT IS DIVIDED
150 NT = 10
160 DT = TU/NT
170 V=V0
180 X=X0
190 ' INSERT F(X) IMMEDIATELY AFTER DEF FN IN NEXT STATEMENT
200 DEF FNF(X)=-9.600001*X
210 PRINT " TIME VELOCITY POSITION"
220 PRINT " (S) (M/S) (M) "
230 LPRINT " TIME VELOCITY POSITION"
240 LPRINT " (S) (M/S) (M) "
250 LPRINT USING "###.##";TIME;;PRINT USING "#####.###";V0,X0
260 PRINT USING "###.##";TIME;;PRINT USING "#####.###";V0,X0

```

(ادامه)

```

270 'BEGIN ITERATION
280 FOR TIME = 1 TO TMAX
290 FOR N = 1 TO NT
300 A=FNF(X)/M 'ACCELERATION IN INTERVAL
310 X = X + V*DT + .5*A*DT*DT 'POSITION AT END OF INTERVAL
320 V = V + A*DT 'VELOCITY AT END OF INTERVAL
330 NEXT N
340 PRINT USING "###.##";TIME*TU;;PRINT USING "+#####.###";V,X
350 LPRINT USING "###.##";TIME*TU;;LPRINT USING "+#####.###";V,;
360 NEXT TIME
400 END

```

نمونه خروجی

TIME (S)	VELOCITY (M/S)	POSITION (M)
0.00	+0.000	+0.050
0.10	-0.019	+0.049
0.20	-0.037	+0.046
0.30	-0.054	+0.042
0.40	-0.069	+0.035
0.50	-0.082	+0.028
0.60	-0.091	+0.019
0.70	-0.097	+0.010
0.80	-0.099	-0.000
0.90	-0.097	-0.010
1.00	-0.092	-0.019
1.10	-0.083	-0.028
1.20	-0.070	-0.036
1.30	-0.056	-0.042
1.40	-0.039	-0.047
1.50	-0.020	-0.050
1.60	-0.001	-0.051
1.70	+0.019	-0.050
1.80	+0.037	-0.047
1.90	+0.055	-0.042
2.00	+0.070	-0.036
2.10	+0.083	-0.028
2.20	+0.092	-0.020
2.30	+0.098	-0.010
2.40	+0.100	-0.000
2.50	+0.099	+0.010
2.60	+0.093	+0.019
2.70	+0.084	+0.028
2.80	+0.072	+0.036
2.90	+0.057	+0.043
3.00	+0.040	+0.047
3.10	+0.021	+0.050
3.20	+0.001	+0.052
3.30	-0.018	+0.051
3.40	-0.037	+0.048
3.50	-0.055	+0.043
3.60	-0.071	+0.037
3.70	-0.084	+0.029
3.80	-0.093	+0.020
3.90	-0.099	+0.011
4.00	-0.102	+0.001

پیوست ی

برندگان جایزه نوبل

به‌خاطر کشف پرتوهای x	(۱۹۲۳ - ۱۸۴۵)	ویلهم کنراد رونتگن	۱۹۰۱
	Wilhelm Konrad Röntgen		
به‌خاطر پژوهشهایشان درباره اثر میدان مغناطیسی بر پدیده‌های تابشی.	(۱۹۲۸ - ۱۸۵۳)	هندریک آنتون لورنتز	۱۹۰۲
	Hendrik Antoon Lorentz		
	(۱۹۴۳ - ۱۸۶۵)	پیتر زیمان	
	Pieter Zeeman		
به‌خاطر کشف پرتوهای طبیعی.	(۱۹۰۸ - ۱۸۵۲)	آنتوان هانری بکرل	۱۹۰۳
	Antoine Henri Becquerel		
به‌خاطر پژوهشهای مشترکشان درباره پدیده‌های تابشی‌ای که توسط بکرل کشف شده بود.	(۱۹۰۶ - ۱۸۵۹)	پیر کوری	
	Pierre Curie		
	(۱۹۳۴ - ۱۸۶۷)	ماری اسکودوسکا-کوری	
	Marie Sklodowska-Curie		
به‌خاطر پژوهشهایش در مورد چگالی گازهای مهم و همچنین به‌خاطر کشف آرگون.	(۱۹۱۹ - ۱۸۴۲)	لرد ریلی (جان ویلیام استرات)	۱۹۰۴
	Lord Rayleigh (John William Strutt)		
به‌خاطر کارهایش در مورد پرتوهای کاتودی.	(۱۹۴۷ - ۱۸۶۲)	فیلیپ ادوارد آنتون فون لِنارد	۱۹۰۵
	Philipp Eduard Anton von Lenard		
به‌خاطر پژوهشهای نظری و تجربی‌اش در مورد رسانایی الکتریکی گازها.	(۱۹۴۰ - ۱۸۵۶)	جوزف جان تامسون	۱۹۰۶
	Joseph John Thomson		
به‌خاطر طراحی اسبابهای اندازه‌گیری دقیق اپتیکی و پژوهشهایی که به کمک آنها انجام داد.	(۱۹۳۱ - ۱۸۵۲)	آلبرت آبراهام مایکلسون	۱۹۰۷
	Albert Abraham Michelson		
به‌خاطر ابداع روش باز تولید رنگها با نورنگاری بر پایه پدیده‌های تداخلی.	(۱۹۲۱ - ۱۸۴۵)	گابریل لیپمان	۱۹۰۸
	Gabriel Lippmann		
به‌خاطر سهمی که در تکمیل تلگراف بی‌سیم داشتند.	(۱۹۳۷ - ۱۸۷۴)	گولیلمو مارکونی	۱۹۰۹
	Guglielmo Marconi		
	(۱۹۱۸ - ۱۸۵۰)	کارل فردیناند براون	
	Carl Ferdinand Braun		
به‌خاطر کارش در مورد معادله حالت گازها و مایعات.	(۱۹۳۲ - ۱۸۳۷)	یوهانس دیدریک وان در واولس	۱۹۱۰
	Johannes Diderik van der Waals		
به‌خاطر تحقیقاتش درباره قوانین حاکم بر تابش گرمایی.	(۱۹۲۸ - ۱۸۶۴)	ویلهم وین	۱۹۱۱
	Wilhelm Wien		
به‌خاطر اختراع تنظیم‌کننده‌های خودکار، که در فاتوسهای دریایی و راهنماهای	(۱۹۳۷ - ۱۸۶۹)	نیلس گوستاو دالن	۱۹۱۲
شناختن مکان...	Nils Gustaf Dalen		

به‌خاطر پژوهش‌هایش در مورد خواص ماده در دماهای پایین، که منجر به تولید هلیوم مایع هم شد. به‌خاطر کشف پراش پرتوهای x از بلورها.	(۱۸۵۳ - ۱۹۲۶) Heike Kamerlingh Onnes	هایک کامرلینگ اونس	۱۹۱۳
به‌خاطر خدماتشان در تحلیل ساختارهای بلوری به‌وسیله پرتوهای x.	(۱۸۶۲ - ۱۹۴۲) William Henry Bragg	ویلیام هنری براگ	۱۹۱۵
به‌خاطر کشف پرتوهای x مشخصه عناصر.	(۱۸۹۰ - ۱۹۷۱) William Lawrence Bragg	ویلیام لارنس براگ	۱۹۱۶
به‌خاطر کشف کوانتومهای انرژی.	(۱۸۷۷ - ۱۹۴۴) Charles Glover Barkla	چارلز گلوور بارکلا	۱۹۱۷
به‌خاطر کشف اثر دوپلر در پرتوهای مثبت و شکافتگی خطوط طیفی در میدانهای الکتریکی. به‌خاطر کشف ناهنجاریها در آلیاژهای فولادی نیکل، که امکان اندازه‌گیریهای دقیقی را در فیزیک فراهم کرد. به‌خاطر خدماتش به فیزیک نظری، و به‌ویژه به‌خاطر کشف اثر فوتوالکتریک.	(۱۸۵۸ - ۱۹۴۷) Max Planck	ماکس پلانک	۱۹۱۸
به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار اتمها و تابشهای ناشی از آنها.	(۱۸۷۴ - ۱۹۵۷) Johannes Stark	یوهانس اشتارک	۱۹۱۹
به‌خاطر تحقیقاتش در مورد بار الکتریکی بنیادی و اثر فوتوالکتریک.	(۱۸۶۱ - ۱۹۳۸) Charles Edouard Guillaume	شارل ادوارد گیوم	۱۹۲۰
به‌خاطر کشفها و پژوهش‌هایش در زمینه طیف‌نمایی پرتو ایکسی.	(۱۸۷۹ - ۱۹۵۵) Albert Einstein	آلبرت اینشتین	۱۹۲۱
به‌خاطر کشف قوانین حاکم بر برخورد الکترون با اتم.	(۱۸۸۵ - ۱۹۶۲) Niels Bohr	نیلس بور	۱۹۲۲
به‌خاطر تحقیقاتش در مورد ساختار ناپیوسته ماده و به‌خصوص کشف تعادل تهنشینی. به‌خاطر کشف اثری که به نام خودش معروف شد.	(۱۸۶۸ - ۱۹۵۳) Robert Andrews Millikan	رابرت اندروز میلیکان	۱۹۲۳
به‌خاطر ابداع روش مرئی کردن مسیر ذرات باردار با چگالیدن بخار.	(۱۸۸۶ - ۱۹۵۴) Karl Manne George Siegbahn	کارل مان‌گئورگ زیگبان	۱۹۲۴
به‌خاطر تحقیق درباره پدیده گرمایونی و به‌خصوص به‌خاطر کشف قانونی که به نام خودش معروف شد. به‌خاطر کشف خصلت موجی الکترون.	(۱۸۸۲ - ۱۹۶۴) James Franck	جیمز فرانک	۱۹۲۵
به‌خاطر کارهایش در مورد پراکنش نور و کشف اثری که به نام خود او معروف شد.	(۱۸۸۷ - ۱۹۷۵) Gustav Hertz	گوستاو هرتر	۱۹۲۶
به‌خاطر سهم مهمی که در ابداع مکانیک کوانتومی داشته است.	(۱۸۷۰ - ۱۹۴۲) Jean Baptiste perrin	ژان باتیست پرن	۱۹۲۶
	(۱۸۹۲ - ۱۹۶۲) Arthur Holly Compton	آرتور هالی کامپتون	۱۹۲۷
	(۱۸۶۹ - ۱۹۵۹) Charles Thomson Rees Wilson	چارلز تامسون ریز ویلسون	۱۹۲۸
	(۱۸۷۹ - ۱۹۵۹) Owen Willans Richardson	اوئن ویلانز ریچاردسون	۱۹۲۸
	(۱۸۹۲ - ۱۹۸۷) (Prince) Louis-Victor de Broglie	لویی-ویکتور دو بروی	۱۹۲۹
	(۱۸۸۸ - ۱۹۷۰) (Sir) Chandrasekhara Venkata Raman	چاندراسکارا ونکاتا رامان	۱۹۳۰
	(۱۹۰۱ - ۱۹۷۶) Werner Heisenberg	ورنر هایزنبرگ	۱۹۳۲

به‌خاطر کشف و ابداع شکل‌های جدید و پربار نظریه اتمی.	(۱۸۸۷ - ۱۹۶۱)	اروین شرودینگر	۱۹۳۳
	Erwin Schrodinger		
	(۱۹۰۲ - ۱۹۸۴)	پاؤل آدرین موریس دیراک	
	Paul Adrien Maurice Dirac		
به‌خاطر کشف نوترون.	(۱۸۹۱ - ۱۹۷۴)	جیمز چادویک	۱۹۳۵
	James Chadwick		
به‌خاطر کشف تابش کیهانی.	(۱۸۸۳ - ۱۹۶۴)	ویکتور فرانتس هس	۱۹۳۶
	Victor Franz Hess		
به‌خاطر کشف پوزیترون.	(۱۹۰۵ - ۱۹۹۱)	کارل دیوید آندرسون	
	Carl David Anderson		
به‌خاطر کشف تجربی پراش الکترونها توسط بلورها.	(۱۸۸۱ - ۱۹۵۸)	کلینتون جوزف دیویسون	۱۹۳۷
	Clinton Joseph Davisson		
	(۱۸۹۲ - ۱۹۷۵)	جورج پاکت تامسون	
	George Paget Thomson		
به‌خاطر نشان دادن پرتوایی مصنوعی بعضی عناصر در اثر دریافت تابش نوترون، و کشف بعضی واکنشهای هسته‌ای که با تاباندن نوترونها گشتاور ایجاد می‌شود.	(۱۹۰۱ - ۱۹۵۴)	انریکو فرمی	۱۹۳۸
	Enrico Fermi		
به‌خاطر اختراع و تکمیل سیکلوترون و نتایج حاصل از آن، به‌خصوص در باره عناصر پرتوایی مصنوعی.	(۱۹۰۱ - ۱۹۵۸)	ارنست اورلاندو لارنس	۱۹۳۹
	Ernest Orlando Lawrence		
به‌خاطر سهمش در ابداع روش پرتو مولکولی و به‌خاطر کشف گشتاور مغناطیسی پروتون.	(۱۸۸۸ - ۱۹۶۹)	اوتو اشترن	۱۹۴۳
	Otto Stern		
به‌خاطر ابداع روش تشدید برای ثبت خواص مغناطیسی هسته‌های اتمی.	(۱۸۹۸ - ۱۹۸۸)	ایزیدور ایزاک رابی	۱۹۴۴
	Isidor Isaac Rabi		
به‌خاطر کشف اصل طرد، که به اصل پائولی هم معروف است.	(۱۹۰۰ - ۱۹۵۸)	ولفگانگ پائولی	۱۹۴۵
	Wolfgang Pauli		
به‌خاطر اختراع وسیله‌ای برای تولید فشارهای فوق‌العاده زیاد و کشفهایی که از این طریق در زمینه فیزیک فشارهای بالا داشته است.	(۱۸۸۲ - ۱۹۶۱)	پرسی ویلیامز بریجمن	۱۹۴۶
	Percy Williams Bridgman		
به‌خاطر پژوهشهایش در مورد فیزیک جو بالایی، به‌خصوص به‌خاطر کشف لایه معروف به اپلتون.	(۱۸۹۲ - ۱۹۶۵)	سر ادوارد ویکتور اپلتون	۱۹۴۶
	Sir Edward Victor Appleton		
به‌خاطر تکمیل روش اتاقک ابری ویلسون، و واقعیتهایی که به وسیله این روش در زمینه‌های فیزیک هسته‌ای و تابش کیهانی کشف کرد.	(۱۸۹۷ - ۱۹۷۴)	پاتریک مینارد استوارت بلاکت	۱۹۴۸
	Patrick Maynard Stuart Blackett		
به‌خاطر پیشگویی وجود مزونها بر پایه تحقیقات نظری‌اش در باره نیروهای هسته‌ای.	(۱۹۰۷ - ۱۹۸۱)	هیدکی یوکاوا	۱۹۴۹
	Hideki Yukawa		
به‌خاطر تکمیل روش نورنگاشتی مطالعه فرایندهای هسته‌ای و کشفهایش در مورد مزونها با استفاده از این روش.	(۱۹۰۳ - ۱۹۶۹)	سیسل فرانک پاول	۱۹۵۰
	Cecil Frank Powell		
به‌خاطر کار پیشگامانه‌شان در مورد استحاله هسته‌های اتمی به‌وسیله ذرات اتمی شتابدار.	(۱۸۹۷ - ۱۹۶۷)	جان داگلاس کاکرافت	۱۹۵۱
	(Sir) John Douglas Cockcroft		
	(۱۹۰۳ -)	ارنست توماس سینتون والتون	
	Ernest Thomas Sinton Walton		
به‌خاطر طرح روشهای نو برای آزمایشهای دقیق مغناطیسی هسته‌ای و کشفهای مربوط به آن.	(۱۹۰۵ - ۱۹۸۳)	فلیکس بلوخ	۱۹۵۲
	Felix Bloch		

	ادوارد میلز پورسل	(۱۹۱۲ -)	
	Edward Mills Purcell		
به‌خاطر ارائه روش تباین فاز، به‌خصوص به‌خاطر اختراع میکروسکوپ تباین فاز.	فریتس زرنیکه	(۱۸۸۸ - ۱۹۶۶)	۱۹۵۳
	Frits Zernike		
به‌خاطر پژوهشهای بنیادی‌اش در مکانیک کوانتومی، به‌خصوص به‌خاطر تعبیر آماری تابع موج.	ماکس بورن	(۱۸۸۲ - ۱۹۷۰)	۱۹۵۴
به‌خاطر ابداع روش تطابق و کشفهایش با استفاده از این روش.	Max Born		
	والتر بوث	(۱۸۹۱ - ۱۹۵۷)	
	Walther Bothe		
به‌خاطر کشفهایش در مورد ساختار ریز طیف هیدروژن.	ویلیز اوژن لمب	(۱۹۱۳ -)	۱۹۵۵
	Willis Eugne Lamb		
به‌خاطر تعیین دقیق گشتاور مغناطیسی الکترون.	پولی کارپ کوش	(۱۹۱۱ -)	
	Polykarp Kusch		
به‌خاطر پژوهشهایشان در بارهٔ نیمرساناها و کشف اثر ترانزیستور.	ویلیام شاکلی	(۱۹۱۰ - ۱۹۸۹)	۱۹۵۶
	William Shockley		
	جان باردین	(۱۹۰۸ - ۱۹۹۱)	
	John Bardeen		
	والتر هاووزر براتین	(۱۹۰۲ - ۱۹۸۷)	
	Walter Houser Brattain		
به‌خاطر پژوهش بنیادی‌شان در مورد قوانین پاریته که منجر به کشفهای مهمی در مورد ذرات بنیادی شد.	چن نینگ یانگ	(۱۹۲۲ -)	۱۹۵۷
	Chen Ning Yang		
	تسونگ دائولی	(۱۹۲۶ -)	
	Tsung Dao Lee		
به‌خاطر کشف و تعبیر اثر چرنکوف.	پاول آلکسیویچ چرنکوف	(۱۹۰۴ -)	۱۹۵۸
	Pavel Aleksejevic Cerenkov		
	ایلیا میخائیلویچ فرانک	(۱۹۰۸ - ۱۹۹۰)	
	Il'ja Michajlovic Frank		
	ایگور ایوانویچ تام	(۱۸۹۵ - ۱۹۷۱)	
	Igor Evgen'evic Tamm		
به‌خاطر کشف پادپروتون.	امیلیو جینو سگری	(۱۹۰۵ - ۱۹۸۹)	۱۹۵۹
	Emilio Gino Segre		
	اوئن چمبرلین	(۱۹۲۰ -)	
	Owen chamberlian		
به‌خاطر اختراع اتاقک حباب.	دونالد آرتور گلایزر	(۱۹۲۶ -)	۱۹۶۰
	Donald Arthur Glaser		
به‌خاطر مطالعات بدیع‌اش در مورد پراکنش الکترون در هسته‌های اتمی و کشفهایش در بارهٔ ساختار نوکلئونها.	روبرت هوفشتاتر	(۱۹۱۵ - ۱۹۹۰)	۱۹۶۱
	Robert Hofstadter		
به‌خاطر تحقیقاتش در مورد جذب تشدید پرتوهای گاما و کشف اثری در همین زمینه که به نام خود او معروف شده است.	رودولف لودویگ موبسباور	(۱۹۲۹ -)	
به‌خاطر نظریه‌های بدیع‌اش در بارهٔ مادهٔ چگال، به‌خصوص در مورد هلیوم مایع.	Rudolf Ludwig Mössbauer		
	لف داویدویچ لاندائو	(۱۹۰۸ - ۱۹۶۸)	۱۹۶۲
	Lev Davidovic Landau		
به‌خاطر سهمش در تدوین نظریهٔ هستهٔ اتم و ذرات بنیادی، به‌خصوص از طریق کشف و کاربرد اصول بنیادی تقارن.	یوجین پال ویگنر	(۱۹۰۲ -)	۱۹۶۳
	Eugene Paul Wigner		

- به‌خاطر کشف‌هایشان در مورد ساختار پوسته‌ای هسته. (۱۹۷۲ - ۱۹۰۶)
 ماریا جو پرت مایر
 Maria Goeppert Mayer
- جی. هانس. دی. یسن (۱۹۷۳ - ۱۹۰۷)
 J. Hans D. Jensen
- چارلز تاونز ۱۹۶۴ () - ۱۹۱۵)
 Charles H. Townes
- نیکولای باسوف () - ۱۹۲۲)
 Nikolai G. Basov
- الکساندر پرو خوروف () - ۱۹۱۶)
 Alexander M. Prochorov
- سن-ایتیر و توماناگا ۱۹۶۵ (۱۹۷۹ - ۱۹۰۶)
 Sin- Itiro Tomonaga
- جولیان شوینگر () - ۱۹۱۸)
 Julian Schwinger
- ریچارد فاینمن (۱۹۸۸ - ۱۹۱۸)
 Richard P. Feynman
- آلفرد کاستلر ۱۹۶۶ (۱۹۸۴ - ۱۹۰۲)
 Alfred Kastler
- هانس آلبرشت بته ۲۹۶۷ () - ۱۹۰۶)
 Hans Albrecht Bethe
- لوئیس آلوارز ۱۹۶۸ (۱۹۸۸ - ۱۹۱۱)
 Luise W. Alvarez
- مورای گل-مان ۱۹۶۹ () - ۱۹۲۹)
 Murray Gell-Mann
- هانس آلون ۱۹۷۰ () - ۱۹۰۸)
 Hannes Alven
- لوبی نل () - ۱۹۰۴)
 Louis Neel
- دنيس گابور ۱۹۷۱ (۱۹۷۹ - ۱۹۰۰)
 Dennis Gabor
- جان باردین ۱۹۷۲ (۱۹۹۱ - ۱۹۰۸)
 John Bardeen
- لئون کوپر () - ۱۹۳۰)
 Leon N. Cooper
- رابرت شریف () - ۱۹۳۱)
 J. Robert Schrieffer
- لئو ایزاکی ۱۹۷۳ () - ۱۹۲۵)
 Leo Esaki
- ایوار جیاور () - ۱۹۲۹)
 Ivar Giaever
- بریان جوزفسون () - ۱۹۴۰)
 Brian D. Josephson
- به‌خاطر کشف‌های اساسی‌اش در زمینه الکترونیک کوانتومی، که منجر به ساخت نوسانگرها و تقویت‌کننده‌ها بر پایه اصل میزریلیزر شد.
- به‌خاطر تحقیقات بنیادی‌شان در زمینه الکتروپنایمیک کوانتومی که پیامدهای مهمی در فیزیک ذرات بنیادی داشت.
- به‌خاطر کشف و توسعه روش‌های اپتیکی برای مطالعه شدید هرتزی در آنها.
- به‌خاطر مشارکت‌هایش در نظریه واکنش‌های هسته‌ای، به‌خصوص کشف‌هایش در مورد تولید انرژی در ستاره‌ها.
- به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌اش در توسعه فیزیک ذرات بنیادی، به‌خصوص با کشف تعداد زیادی از حالت‌های تشدید.
- به‌خاطر مشارکتش در طبقه‌بندی ذرات بنیادی و برهم‌کنش‌های آنها، و کشف‌هایش در این مورد.
- به‌خاطر کار اساسی و کشف‌هایش در زمینه مغناطویدرودینامیک، با کاربردهای مفید در فیزیک پلاسما.
- به‌خاطر پژوهش بنیادی و کشف‌هایش در باره پادفرم‌مغناطیس و فری‌مغناطیس، با کاربردهای مهمی در فیزیک حالت جامد.
- به‌خاطر کشف اصول تمام‌نگاری (هولوگرافی).
- به‌خاطر پرداختن نظریه‌ای برای ابررسانایی
- به‌خاطر کشف پدیده تونل‌زنی در نیم‌رساناها.
- به‌خاطر کشف پدیده تونل‌زنی در ابررساناها.
- به‌خاطر پیشگویی نظری خصوصیات عبور ابر جریان از سد تونلی.

به‌خاطر کشف تب‌اخترها.	(۱۹۲۴ -)	آنتونی هیویش	۱۹۷۴
	Antony Hewish		
به‌خاطر کار پیشگامانه‌اش در زمینه نجوم رادیویی.	(۱۹۸۴ - ۱۹۱۸)	مارتین رایل	
	(Sir) Martin Ryle		
به‌خاطر کشف ارتباط میان حرکت جمعی و حرکت ذره، و تدوین نظریه‌ای در مورد ساختار هسته اتم بر این اساس.	(۱۹۲۲ -)	آگه بور	۱۹۷۵
	Aage Bohr		
	(۱۹۲۶ -)	بن ماتلسون	
	Ben Mottelson		
	(۱۹۸۶ - ۱۹۱۷)	جیمز رینواتر	
	James Rainwater		
به‌خاطر کشف یک ذره بنیادی مهم (به‌طور مستقل).	(۱۹۳۱ -)	برتون ریشر	۱۹۷۶
	Burton Richter		
	(۱۹۳۶ -)	ساموئل چان‌چونگ تینگ	
	Samuel Chao Chung Ting		
به‌خاطر تحقیقات نظری بنیادی‌شان درباره سیستم‌های مغناطیسی و سیستم‌های نامنظم.	(۱۹۲۳ -)	فیلیپ وارن اندرسون	۱۹۷۷
	Philip Warren Anderson		
	(۱۹۰۵ -)	نویل فرانسیس موت	
	Nevil Francis Mott		
	(۱۹۸۰ - ۱۸۹۹)	جان هاسبروگ وان ولک	
به‌خاطر ابداعات و کشف‌های اساسی در فیزیک دماهای پایین.	(۱۹۸۴ - ۱۸۹۴)	پیتر کاپیتزا	۱۹۷۸
	Peter L. Kapitza		
به‌خاطر کشف تابش میکروموجی زمینه کیهانی.	(۱۹۲۶ -)	آرنو پنزیاس	
	Arno N. Penzias		
	(۱۹۳۶ -)	رابرت وودرو ویلسون	
	Robert Woodrow Wilson		
به‌خاطر تدوین مدل وحدت‌یافته نیروهای ضعیف و الکترومغناطیسی، و به‌خاطر پیشگویی وجود جریان‌های خنثی.	(۱۹۳۲ -)	شلدون لی گلاشو	۱۹۷۹
	Sheldon lee Glashow		
	(۱۹۲۶ -)	عبدالسلام	
	Abdus Salam		
	(۱۹۳۳ -)	استیون واینبرگ	
	Steven Weinberg		
به‌خاطر کشف موارد نقض اصول تقارن بنیادی در واپاشی مزون‌های K ی خنثی.	(۱۹۳۱ -)	جیمز کرونین	۱۹۸۰
	James W. Cronin		
	(۱۹۲۳ -)	وال فیچ	
	Val L. Fitch		
به‌خاطر سهم‌شان در تکمیل طیف‌نمایی لیزری.	(۱۹۲۰ -)	نیکولاس بلومبرگن	۱۹۸۱
	Nicolaas Bloembergen		
	(۱۹۲۱ -)	آرتور لئونارد شاولو	
	Arthur Leonard Schawlow		
به‌خاطر کارهایش در پیشبرد طیف‌نمایی الکترونی با تفکیک زیاد.	(۱۹۱۸ -)	کای زیگبان	
	Kai M. Siegbahn		
به‌خاطر ابداع روشی برای تحلیل پدیده‌های بحرانی.	(۱۹۳۶ -)	کنت ویلسون	۱۹۸۲
	Kenneth Geddes Wilson		

به‌خاطر مطالعات نظری‌اش دربارهٔ ساختار و تحول ستاره‌ها.	سویرامانیان چاندراسکار (۱۹۱۰-)	۱۹۸۳
	Subrahmanyan Chandrasekhar	
به‌خاطر مطالعاتش در مورد تشکیل عناصر شیمیایی در عالم.	ویلیام فاؤلر (۱۹۱۱-)	
	William A. Fowler	
به‌خاطر سهم تعیین‌کننده‌شان در "پروژهٔ بزرگ" که به کشف ذرات میدانی W و Z منجر شد.	کارلو روبیا (۱۹۳۴-)	۱۹۸۴
	Carlo Rubbia	
	سایمون وان در میر (۱۹۲۵-)	
	Simon Van Der Meer	
به‌خاطر کشف اثر کوانتومی هال.	کلاؤس فون کلیتسینگ (۱۹۴۳-)	۱۹۸۵
	Klaus von Klizing	
به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی.	ارنست روسکا (۱۹۰۶-)	۱۹۸۶
	Ernst Ruska	
به‌خاطر اختراع میکروسکوپ الکترونی تونلی روبشی.	گرد بینینگ (۱۹۴۷-)	
	Gerd Binnig	
	هاینریش روهرر (۱۹۳۳-)	
	Heinrich Rohrer	
به‌خاطر کشف ابررسانایی گرم.	کارل آلكس مولر (۱۹۲۷-)	۱۹۸۷
	Karl Alex Müller	
	گئورگ بدنورز (۱۹۵۰-)	
	J. Georg Bednorz	
به‌خاطر آزمایشهایشان با باریکه‌های نوترینو و کشف نوترینوی موئون.	لیون لدرمن (۱۹۲۲-)	۱۹۸۸
	Leon M. Lederman	
	ملوین شوارتز (۱۹۳۲-)	
	Melvin Schwartz	
	جک استینبرگر (۱۹۲۱-)	
	Jack Steinberger	
به‌خاطر ابداع فنی برای دام‌اندازی اتمهای منفرد	هانس دهملت (۱۹۲۲-)	۱۹۸۹
	Hans G. Dehmelt	
	ولفگانگ پاؤل (۱۹۱۳-)	
	Wolfgang Paul	
به‌خاطر کشفهایش در زمینهٔ طیف‌نمایی تشدید اتمی، که به‌ساخت میرزهییدروژن و ساعت اتمی منجر شد.	نورمن رمزی (۱۹۱۵-)	
	Norman F. Ramsey	
به‌خاطر آزمایشهایشان دربارهٔ پراکنش الکترونها از هسته‌ها، که حاکی از حضور کوارک در نوکلئونهاست.	ریچارد تپلور (۱۹۲۹-)	۱۹۹۰
	Richard E. Taplor	
	جرومی فریدمن (۱۹۳۰-)	
	Jerome I. Friedman	
	هنری کندال (۱۹۲۶-)	
	Henry W. Kendall	
به‌خاطر کشفهایی در مورد آرایش مولکولها در موادی مثل بلورهای مایع، ابررساناها، و پولیمرها.	پی‌یر ژیل دژن (۱۹۳۲-)	۱۹۹۱
	Pierre-Gilles de Gennes	
به‌خاطر موفقیت‌هایش در طراحی آشکارسازهای الکترونیکی سریع برای ذرات پرنرزی	ژرژ شارپاک (۱۹۳۳-)	۱۹۹۲
	Georges Charpak	

پاسخ مسائل شماره فرد

- فصل ۱
۳. $526 \text{ min}; 2.5 \text{ درصد}$
۵. $-.44 \text{ درصد}$
۷. (الف) بله. (ب) 8.6 s
۹. 720 روز
۱۱. 55 s ; تقریباً یک دقیقه.
۱۳. 2 روز و 5 ساعت .
۱۵. (الف) $100 \text{ m}; 8.56 \text{ m}; 28.1 \text{ ft}$
- (ب) $1 \text{ mi}; 1.09 \text{ m}; 358 \text{ ft}$
۱۷. $1.7 \times 10^{22} \text{ cm}^2$
۱۹. (الف) 10^4 km
- (ب) 10^8 km^2
- (ج) 10^{12} km^2
۲۱. 2.86×10^{-2} سال نوری بر قرن
۲۳. (الف) $4.85 \times 10^{-6} \text{ pc}; 1.58 \times 10^{-5} \text{ ly}$
- (ب) $9.48 \times 10^{12} \text{ km}; 3.08 \times 10^{12} \text{ km}$
۲۵. (الف) 390
- (ب) 59×10^2
- (ج) 3500 km
۲۷. 5.97×10^{26}
۲۹. نیویورک
۳۱. 840 km
۳۳. 132 kg/s
۳۷. $6.578 \times 10^{21} \text{ nm}$
۳۹. (الف) 43.2 cm^2
- (ب) 43 cm^2
۴۱. $\sqrt{Gh/c^3} = 4.5 \times 10^{-25} \text{ m}$
- فصل ۲
۱. $81 \text{ ft} (24 \text{ m})$
۳. 2 cm/y
۵. 48 mi/h (این شخص علاوه بر سفر هفتگی راههای دیگری هم رفته است.)
۷. (الف) $72.4 \text{ km/h} (45.0 \text{ mi/h})$
- (ب) $68.8 \text{ km/h} (42.8 \text{ mi/h})$
۹. (الف) $12 \text{ m}, -2, 0, 0$
- (ب) $12 \text{ m}, -2$
- (ج) $0 \text{ m/s}, 7$
۱۱. (الف) 5.7 ft/s
- (ب) 7.0 ft/s
۱۳. (الف) 28.5 cm/s
- (ب) 18.0 cm/s
- (ج) 4.5 cm/s
- (د) 28.1 cm/s
- (ه) 3.04 cm/s
۱۵. -2 m/s^2
۱۹. (الف) $AB: 0, 0; OA: +, -$
- $CD: +, 0; BC: +, +$
- (ب) خیر
۲۱. (ه) وضعیتهای الف، ب، و د
۲۳. (الف) 8.0 m/s
- (ب) 11.0 m/s
- (ج) 2.0 m/s^2
۲۵. (ب) $0.30, -0.20, -0.10, 0.0 \text{ m/s}$
- (ج) $0.40, -0.20, 0.0, 0.40, 0.60 \text{ m/s}$
- (ه) $0.20 \text{ m/s}^2, 0.20 \text{ m/s}^2, 0.20 \text{ m/s}^2$
۲۷. (ب) 1.9 m/s
- (ج) 3.1 m
۲۹. $2.8 \text{ m/s}^2 (9.4 \text{ ft/s}^2)$
۳۱. 56.0 ms
۳۳. $1.4 \times 10^{15} \text{ m/s}^2$
۳۵. 2.6 s
۳۷. (الف) $4.5 \times 10^4 \text{ ft/s}^2$
- (ب) 5.8 ms
۳۹. (الف) 5.71 m/s^2
- (ب) 3.68 s
- (ج) 5.78 s
- (د) 9.54 m
۴۱. (الف) 6.6 s
- (ب) 3.64 m/s
۴۳. (الف) 7.5 s
- (ب) 5.0 m

۴۵. (الف) ۸۲m
 (ب) ۱۹m/s
 ۴۷. (الف) $۱۲ft/s^2 (۳.۶m/s^2)$
 (ب) $۳.۷ft/s (۱.۴m/s)$
 ۴۹. (الف) $۰.۷۴s$
 (ب) $-۲.۰ft/s^2$
 ۵۱. (الف) $۴۸.۵m/s$
 (ب) $۴.۹۵s$
 (ج) $۳۴.۳m/s$
 (د) $۳.۵۰s$
 ۵۳. (الف) $۳۲.۴m/s$
 (ب) $۶.۶۲s$
 ۵۵. عطارد
 ۵۷. $۳.۰۶cm, ۱.۹۶cm, ۱.۱۰cm, ۴.۹۰cm, ۱.۲۳cm$
 ۵۹. $۳.۰m (۹.۸ft)$
 ۶۱. (الف) $۳۵۰ms$
 (ب) $۸۲ms$
 ۶۳. $۲۲.۲cm$ و $۸۸.۹cm$ زیر دهانه.
 ۶۵. $۱.۳۰m/s^2$ بالا
 ۶۷. (الف) $۳.۴۱s$
 (ب) $۵۷.۰m$
 ۶۹. تقریباً $۰.۳s$
 ۷۱. (الف) $۱۷.۱s$
 (ب) $۲۹۳m$
 ۷۵. $۶.۸cm$

فصل ۴

۱. (الف) $۹۲۰mi$, ۶۳۰ جنوب شرق.
 (ب) $۴۱۰mi/h$, ۶۳۰ جنوب شرق.
 (ج) $۵۵۰mi/h$
 ۳. (الف) $۳.۹km/h$ (ب) ۱۳۰
 ۵. (الف) $۲۴ns$ (ب) $۲.۷mm$
 (ج) $۹.۶ \times ۱۰^8 cm/s$; $۲.۳ \times ۱۰^8 cm/s$
 ۷. (الف) $۸tj + k$ (ب) $۸j$ (ج) سهمی
 ۹. ۶۰۰
 ۱۱. (الف) $۵۱۴ms$ (ب) $۹.۹۴ft/s$
 ۱۳. (الف) $۱۸cm$ (ب) $۱.۹m$
 ۱۵. (الف) $۳.۰۳s$ (ب) $۷۵۸m$ (ج) $۲۹.۷m/s$
 ۱۷. خیر
 ۱۹. (الف) $۱.۱۶s$ (ب) $۱۳.۰m$
 (ج) $۱۸.۸m/s$; $۵.۵۶m/s$ (د) خیر
 ۲۱. ۷۶.۰۰
 ۲۳. (الف) $۹۹ft$ (ب) $۹۰ft/s$ (ج) $۱۸۰ft$
 ۲۵. (الف) $۲۸۵km/h$ (ب) ۳۳۰
 ۲۷. (الف) $۳۱۰ms$ (ب) $۱.۹m$ و $۲.۹m$ بالاتر از دستها.
 ۲۹. سومی
 ۳۱. بله
 (الف) $۲۶۰m/s$ (ب) $۴۵s$
 ۳۵. $۲۳ft/s$
 ۳۷. (الف) $۹.۸s$ (ب) $۲۷۰۰ft$
 ۳۹. تقریباً $۴۰m (۱۳۰ft)$

فصل ۳

۱. جابه جاییها باید (الف) موازی، (ب) پادموازی، و (ج) عمود بر هم باشند.
 ۳. (الف) $۳.۷۰m$, ۵.۷۰ شرق شمال.
 (ب) اندازه جابه جایی = ۳.۷۰ متر؛ مساحت طی شده = ۷.۲۰ متر.
 ۷. (الف) ۴.۵ واحد، ۵.۲۰ شمال شرق.
 (ب) ۸.۴ واحد، ۲.۵۰ جنوب شرق
 ۹. والبول (زندان ایالتی)
 ۱۱. (الف) $۴.۹m$, (ب) $۱۲m$
 ۱۳. $۴.۷۶km$
 ۱۵. (الف) $۲.۸m$ ، و (ب) $۱۳m$
 ۱۷. (الف) $۱۴k + ۱۲j + ۱۰i$
 (ب) $۲۱ft$
 (ج) می تواند مساوی یا بزرگتر باشد، ولی نه کوچکتر
 (د) $۲۶ft$
 ۱۹. (الف) $۵k - ۲j - ۳i$

۴۱. (الف) ۲۰ cm (ب) خیر؛ توپ ۴۴ cm بالاتر از زمین به تور می‌خورد.
۴۳. بین زوایای ۳۱° و ۶۳° بالای افق.
۴۵. ۱۱۵ ft/s
۴۷. (الف) $D = v\sqrt{(2L/g)} \sin \theta - L \cos \theta$ (ب) پرتابه در صورتی که D مثبت باشد از بالای سر ناظر می‌گذرد و اگر D منفی باشد، به ناظر نمی‌رسد.
۴۹. ۵۶۶ s
۵۱. $۸,۹۸ \times ۱۰^{۲۲} \text{m/s}^۲$
۵۳. (الف) ۷,۴۹ km/s (ب) ۸,۰۰ m/s^۲
۵۵. (الف) ۹۴ cm (ب) ۱۹ m/s (ج) ۲۴۰۰ m/s^۲
۵۷. (الف) ۱۳۰ km/s (ب) ۸۵۰ km/s^۲
۶۱. (الف) ۹۲ (ب) ۹۶ (ج) $۹۲ = (۹۶)^۲$
۶۳. ۲,۶ cm/s^۲
۶۵. (الف) ۳۳,۶ m/s^۲ (ب) ۸۹,۷ m/s^۲
۶۷. ۳۶ s ثانیه؛ خیر
۶۹. باد از سمت غرب با سرعت ۵۵ mi/h می‌وزد.
۷۱. ۳۱ m/s
۷۵. (الف) ۵,۸ m/s (ب) ۱۷ m (ج) ۶۷° (د) ۴۹°
۷۷. ۱۷۰ km/h؛ ۷,۳° جنوب غرب
۷۹. (الف) ۳۰° برخلاف جریان (ب) ۶۹ min (ج) ۸۰ min (د) ۸۰ min (ه) عمود بر جریان؛ ۶۰ min
۸۱. (الف) سرقایق باید ۲۵° به طرف بالای رودخانه گرفته شود. (ب) ۲۱ h
۸۳. ۰,۸۳ c
۸۵. (ب) $y = ۲۲,۸ \text{m}, x = ۹۷,۷ \text{m}, t = ۲,۱۶ \text{s}$
- (ج) $v_x = ۴۵,۳ \text{m/s}, x = ۱۹۵ \text{m}, t = ۴,۳۱ \text{s}$
- $v_y = -۲۱,۱ \text{m/s}$
- ### فصل ۵
۱. ۶۳ y
۳. (الف) $۱۰^{-۱۵} \text{N}$ (ب) $۱۰^{-۲۰} \text{N}$ (ج) $۱۰^{-۲۰} \text{N}$
۵. $۸۰ \text{cm/s}^۲$
۷. ۶۵۰۰ N
۹. (الف) ۳,۱ cm/s^۲ (ب) $۱۰^۵ \text{km}$ (ج) ۲,۷ km/s
۱۱. (الف) $۴۲\hat{i} + ۳۴\hat{j}$, ms (ب) $۶۳۰\hat{i} + ۲۵۰\hat{j}$, m
۱۳. (الف) $۱,۳۹ \times ۱۰^۹ \text{N}$ ؛ $۶,۹۴ \times ۱۰^۶ \text{N}$ (ب) ۴,۱۱ y؛ ۴,۱۹ y
۱۵. (الف) ۰,۶۲ m/s^۲ (ب) ۰,۱۳ m/s^۲ (ج) ۲,۶ m
۱۷. (الف) ۴,۴۴ slug؛ ۱۴۲۰ lb (ب) ۴۰۴۰ N؛ ۴۱۲ kg
۱۹. (الف) ۱۲,۲ N؛ ۲,۶۵ kg (ب) صفر؛ ۲,۶۵ kg
۲۱. ۱۶۰۰ lb
۲۳. $۱,۱۹ \times ۱۰^۶ \text{N}$ (تن ۱۳۳)
۲۵. (الف) ۱,۸ mN (ب) ۳,۳ mN
۲۷. ۰,۱۵ N
۲۹. (الف) ۲۱۰ m/s^۲؛ $(۷۱۰ \text{ft/s}^۲)$ (ب) ۱۷ kN (ب) ۴۰۰۰ lb
۳۱. (الف) ۷,۳ kg؛ $(۰,۵ \text{ slug})$ (ب) ۸,۹ N (ب) ۲۰ lb
۳۳. (الف) ۲,۱ m/s^۲ (ب) ۱۲۰ N (ج) ۲۱ m/s^۲
۳۵. (الف) ۱,۸ m/s^۲ (ب) ۳,۸ m/s
- (ج) ۴,۰ m (د) ۱۱°
۳۷. ۱۸,۴ kN
۳۹. (ب) ۱۲ ft/s^۲ (ج) ۸,۹°
۴۱. ۳۳ m/s
۴۳. (الف) ۷۳۰ N (ب) ۱۳۰۰ N
۴۵. (الف) ۳۲۶۰ N (ب) ۲۷۲۰ kg (ج) ۱,۲۰ m/s^۲
۴۷. (الف) $۱۰^۵ \text{N}$ ؛ ۵,۰ (ب) $۱۰^۶ \text{N}$ ؛ ۱,۴
۴۹. $۲M \left(\frac{a}{a+g} \right)$
۵۱. (الف) $g \sin \theta$ ، به طرف پایین شیب (ب) $g \sin \theta$ ، به طرف پایین شیب (ج) $(g-a) \sin \theta$ ، به طرف پایین شیب (د) $(g+a) \sin \theta$ ، به طرف پایین شیب (ه) صفر (و) $m(g-a) \cos \theta$
۵۳. (الف) ۶,۸ m/s (ب) بله، می‌تواند در حین سقوط، از طناب بالا برود.
۵۵. (الف) ۰,۹۷ m/s^۲
- (ب) $T_۲ = ۳,۵ \text{N}$ ؛ $T_۱ = ۱,۲ \text{N}$
۵۷. (الف) ۱۳۵ N (ب) ۴۵,۳ N (ج) ۷۵,۴ N
۵۹. (الف) ۰,۲۱۷ m/s^۲ (ب) ۱,۷۸ N
۶۱. (الف) ۱۲,۱ kN (ب) ۱۰,۵ kN (ج) ۱,۶۰ kN به طرف وزن تعادل
۶۳. (الف) ۳۷ N (ب) ۵۵ N (ج) ۳,۶ m/s^۲، به طرف بالا
۶۵. (ب) $P/(m+M)$ (ج) $PM/(m+M)$ (د) $P(m+2M)/2(m+M)$
۶۷. ۱۳۰ lb
- ### فصل ۶
۱. ۲,۳°
۳. ۹,۳ m/s^۲
۵. ۹۰۰ N

$$a_x = -3.73 \text{ m/s}^2, v_y = 0, v_x = 3.73 \text{ m/s}$$

$$a_y = -9.80 \text{ m/s}^2$$

$$y = 1.78 \text{ m}, x = 6.83 \text{ m}, t = 1.79 \text{ s} \text{ (ب)}$$

$$a_x = -6.33 \text{ m/s}^2, v_y = 0, v_x = 3.17 \text{ m/s}$$

$$a_y = -9.80 \text{ m/s}^2$$

$$1.21 \text{ m}, 1.51 \text{ m} \text{ (ج)}$$

$$v_x = 3.03 \text{ m/s}; b = 0.10 \text{ s}^{-1} \text{ (د)}$$

$$v_y = -1.85 \text{ m/s}$$

$$v_y = -1.64 \text{ m/s}, v_x = 2.11 \text{ m/s}; b = 0.20 \text{ s}^{-1} \text{ برای}$$

۷. (الف) ۹.۱ kN (ب) ۹.۰ kN

۹. (الف) خیر (ب) نیروی ۱۲ پوندی به طرف چپ و نیروی ۵ پوندی به طرف بالا

۱۱. (الف) ۱۱.۱ N (ب) ۴۷.۳ N (ج) ۴۰.۱ N

۱۵. (الف) $v_0^2 / 4g \sin \theta$ (ب) خیر

۱۷. (الف) ۱۰ kg (ب) ۲.۷ m/s²

۱۹. (الف) ۶۱ N (ب) ۶۶ N (ج) ۵.۹ kN

۲۱. (الف) ۷۰ lb (ب) ۴.۶ ft/s²

۲۳. (ب) ۳۰ MN

۲۵. (الف) ۱.۲۴ m/s² (ب) ۱۳.۴ N

۲۷. $g(\sin \theta - \sqrt{2} \mu_k \cos \theta)$

۲۹. (الف) ۳.۴۶ m/s² (ب) ۰.۹۱۰ N در کشش

(ج) ۳.۴۶ m/s²; ۰.۹۱۰ N در تراکم

۳۱. (الف) ۷.۶ m/s² (ب) ۰.۸۶ m/s²

۳۳. (الف) ۷۳۰ lb (۳۲۰ N) (ب) ۰.۳۰

۳۵. (الف) ۰.۴۶ (ب) ۰.۹۲

۳۷. ۸۷۰ N; ۱۷۰

۳۹. ۰.۳۲

۴۱. (الف) ۰.۴۳ (ب) ۴۲ m

۴۳. (الف) ۱۷۵ lb (ب) ۵۰.۵ lb

۴۵. (الف) ۳۰ cm/s

(ب) ۱۷۰ cm/s² در امتداد شعاع به طرف مرکز

(ج) ۲.۹ mN

(د) ۰.۴۰

۴۷. ۲.۳۲ km

۴۹. (الف) در پایین دایره (ب) ۳۱ ft/s

۵۱. (الف) ۰.۳۳۷ N (ب) ۹.۷۷ N

فصل ۷

۱. (الف) ۵۸۰ J (ب) صفر (ج) صفر

۳. (الف) ۴۳۰ J (ب) -۴۰۰ J (ج) صفر

۵. (الف) $-\frac{3}{4}Mgd$ (ب) Mgd

۷. (الف) ۲۱۶۰ J (ب) -۱۴۳۰ J

۹. (الف) ۲۱۵ lb (ب) $1.01 \times 10^2 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

(ج) ۴۸۰ ft (د) $1.03 \times 10^2 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

۱۱. ۸۰۰ J

۱۳. $\frac{3}{2}F_0 x_0$

۱۵. (الف) ۲۳ mm (ب) ۴۵ N

۱۷. (الف) ۱۳۵ N (ب) ۶۰۰ J

۱۹. ۱۲۰ km/s

۲۱. $DE : + ; CD : - ; Bc : 0 ; Ab : +$

۲۳. ۱۰۰ ft، خیر

۲۵. $(24.4 \text{ J}) 2.02 \text{ ft}\cdot\text{lb}$

۲۷. ۲.۴۱ (پدر)، ۴.۸۲ m/s (پسر)

۲۹. (الف) 9.0×10^4 مگاتن TNT (ب) ۴۵ km

۳۱. ۶.۵۵ m/s

۳۳. (الف) ۳۰۴ mJ (ب) -۱.۷۵ J (ج) ۳.۳۲ m/s (د) ۲۲.۵ cm

۳۵. ۷۲۰ W (۰.۹۷ hp)

۳۷. ۲۴ W

۳۹. (الف) $2.45 \times 10^5 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ (ب) ۰.۶۱۹ hp

۴۱. ۹۰۳ kN

۴۳. ۲۵ hp

۴۵. (الف) ۰.۷۷ mi (ب) ۷۱ kW

۴۷. ۱۶.۶ kW

۴۹. mtv_f^2/t_f^2 (ب) ۲.۶۶ hp

۵۱. ۲.۹۵

۵۳. (ب) ۱.۹۵

۵۵. (الف) ۱۰۰ kW (ب) ۲.۹۷ kJ

۵۷. ۰.۶۹ hp

۲۷. $g(\sin \theta - \sqrt{2} \mu_k \cos \theta)$

۲۹. (الف) ۳.۴۶ m/s² (ب) ۰.۹۱۰ N در کشش

(ج) ۳.۴۶ m/s²; ۰.۹۱۰ N در تراکم

۳۱. (الف) ۷.۶ m/s² (ب) ۰.۸۶ m/s²

۳۳. (الف) ۷۳۰ lb (۳۲۰ N) (ب) ۰.۳۰

۳۵. (الف) ۰.۴۶ (ب) ۰.۹۲

۳۷. ۸۷۰ N; ۱۷۰

۳۹. ۰.۳۲

۴۱. (الف) ۰.۴۳ (ب) ۴۲ m

۴۳. (الف) ۱۷۵ lb (ب) ۵۰.۵ lb

۴۵. (الف) ۳۰ cm/s

(ب) ۱۷۰ cm/s² در امتداد شعاع به طرف مرکز

(ج) ۲.۹ mN

(د) ۰.۴۰

۴۷. ۲.۳۲ km

۴۹. (الف) در پایین دایره (ب) ۳۱ ft/s

۵۱. (الف) ۰.۳۳۷ N (ب) ۹.۷۷ N

۵۳. (الف) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(\tan \theta + \mu_s)}{r(1 - \mu_s \tan \theta)}}$

(ب) $\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g(\tan \theta - \mu_s)}{r(1 + \mu_s \tan \theta)}}$

۵۵. (الف) ۲۳۵ m/s (ب) ۱۰.۷ m/s² (ج) ۲۳۲ N

۵۷. (الف) $F_0 T/m$ (ب) $0.632 F_0 T/m$

۵۹. $\sqrt{mg/b}$

۶۱. $2.0 \times 10^{-5} \text{ N}\cdot\text{s/m}$

۶۳. ۱.۳۰ m/s

۶۵. (الف) $\ln(v_i/v_f)$ (ب) $(\frac{m}{b})$

(ب) ۱۹ s

۶۷. ۳۷۰ m

۶۹. (الف) ۱۱.۷ s (ب) ۵.۹۸ m/s (ج) ۰.۶۱۰

۷۱. ۸.۱۹ m، ۸.۳۸ m، ۸.۳۳ m، ۸.۰۵ m، ۰.۷۶۲ m، ۰.۳۰

۷۳. (الف) ۱.۹۵ s، $x = ۸.۰۴ \text{ m}$ ، $y = ۲.۰۰ \text{ m}$

- ۱۰۰ J (ه) ۱۷۰ kJ (د) -۹۸۰ kJ (ج)
 $y = -۲٫۹۵\text{m}$, $x = ۲٫۹۵\text{m}$ (و)
 ۰٫۵۴۱ J، ۰٫۵۴۱ J، ۰٫۵۴۱ J (الف)
 ۰٫۳۸۳ J، ۱٫۰۸ J، ۰٫۵۴۱ J (ب)

فصل ۹
 ۱. (ج)

- $x_1 = x_{cm} - (m_2/M)(L + a_i \cos \omega t)$
 $x_2 = x_{cm} + (m_1/M)(L + d_i \cos \omega t)$
 $v_1 = (m_2/M)d_i \omega \sin \omega t$
 $v_2 = -(m_1/M)d_i \omega \sin \omega t$
۳. ۴۶۴۰ km (زیر سطح زمین) ۱۷۳۰ km
 ۵. ۷۵٫۲ km/h
 ۷. (الف) پایین؛ $mv/(m + M)$
 (ب) بالون دوباره ساکن می شود
 ۹. (الف) L (ب) صفر
 ۱۱. (الف) در وسط فاصله دو جسم
 (ب) ۱٫۲ mm به طرف جسم سنگین تر حرکت می کند.
 (ج) ۰٫۰۰۱۶۰ g پایین
 ۱۳. $g(1 - 2x/L)$
 ۱۵. ۵۵٫۲ kg
 ۱۷. $L/5$ از میله سنگینی، در راستای محور تقارن
 ۱۹. $z_{cm} = ۱۶\text{cm}$; $x_{cm} = y_{cm} = ۲۰\text{cm}$
 ۲۱. در فاصله $4R/3\pi$ از قاعده تخت، روی محور تقارن
 ۲۳. (الف) $۶۹۴ \times ۱۰^۲\text{J}$
 (ب) $۳۸٫۷^\circ$ ؛ جنوب شرق
 ۲۵. (الف) ۶۹۶J ؛ (ب) $۰٫۸۵۴\text{kgm/s}$ ؛ $P_i = ۲۷٫۴^\circ$ بالای افق؛
 $۰٫۷۸۶\text{kgm/s}$ ؛
 (ج) $۱٫۵۳\text{s}$
 ۲۹. به طرف عقب، $۰٫۱۰۳\text{ft/s}$
 ۳۱. $w_{rel}/(W + w)$
 ۳۳. ۲۷
 ۳۵. (الف) محفظه موشک: ۷۲۹۰m/s ؛ مواد منفجره: ۸۲۰۰m/s
 (ب) قبل: $۱۲٫۷۱\text{GJ}$ ؛ بعد: $۱۲٫۷۵\text{GJ}$
 ۳۷. (الف) $۱۰^{-۲۱}\text{kg.m/s}$ ؛ ۱۴° ؛ ۱۵۰° از مسیر الکترون و ۱۲۰°
 از مسیر نوترون (ب) $۱٫۰\text{eV}$
 ۳۹. (الف) ۷۴۶m/s ؛ (ب) ۹۶۳m/s
 ۴۱. بله
 ۴۳. $\left(\frac{u \cos \alpha}{\sqrt{1 - u \cos^2 \alpha}}\right) \sqrt{2gh}$
 $u = \frac{m}{m + M}$

۶۱. (الف) $۱۳c$ ؛ (ب) $۴٫۶\text{keV}$ ؛ (ج) کمتر از ۱۳ درصد
 ۶۳. (الف) ۷۹۱keV ؛ (ب) ۳۱۱MeV ؛ (ج) $۱۰٫۹\text{MeV}$

فصل ۸

۱. ۱۱۰MN/m
 ۳. (الف) $۷٫۸\text{MJ}$ ؛ (ب) $۶٫۲$
 ۵. $۲٫۱۵\text{m/s}$
 ۷. (الف) $۲۷٫۰\text{kJ}$ ؛ (ب) $۲٫۹۴\text{kJ}$
 (ج) a و b : ۱۵۸m/s
 ۹. (الف) $۲٫۵۶\text{J}$ ؛ (ب) $۱٫۱\text{m/s}$
 ۱۱. ۸۳۰ft
 ۱۳. $۲٫۷۵\text{m/s}$
 ۱۵. (الف) ۱۳۰۰MW ؛ (ب) $۱۳۷\text{M}\$$
 ۱۹. $۴٫۲۴\text{m}$
 ۲۱. (الف) $۳۴٫۲\text{ft/s}$ ؛ (ب) $۴٫۳۲\text{m}$
 ۲۳. $mgL/۳۲$
 ۲۵. $۱٫۱\text{cm}$
 ۲۷. (الف) $۰٫۰۶\text{mg}$ ؛ $۸۲٫۹^\circ$ به طرف چپ خط قائم
 (ب) $5R/2$
 ۲۹. (الف) $U(x) = -Gm_1m_2/x$
 (ب) $Gm_1m_2d/x_1(x_1 + d)$
 ۳۱. (الف) $۶۹٫۲\text{J}$ ؛ (ب) $۷٫۹۹\text{m/s}$ ؛ (ج) پایستار
 ۳۵. (الف) $۴۴٫۶\text{cm}$ ؛ (ب) $۳٫۴۷\text{cm}$
 ۳۷. (الف) $\sqrt{5gR}$ ؛ (ب) $\theta = \sin^{-1}(1/3)$
 ۴۱. (ج) $۱۰^{-۱۱}\text{J}$ ؛ $-۱٫۲$ ؛ (د) $۲٫۲ \times ۱۰^{-۱۱}\text{J}$
 (ه) $۱ \times ۱۰^{-۱}\text{N}$ ، به طرف M
 ۴۵. (الف) $-U_0(r_0 r^{-2} + r^{-1})e^{-r/r_0}$
 (ب) $۰٫۱۴$ ، $۰٫۰۰۷۸$ ، $۰٫۰۰۶$ ؛ $۶٫۸$
 ۴۷. (الف) $۳٫۰۲\text{kJ}$ ؛ (ب) ۳۹۱J ؛ (ج) $-۲٫۶۳\text{kJ}$
 ۴۹. ۳۹kW
 ۵۱. ۴۷۲kJ
 ۵۳. $۴٫۱۹\text{m}$
 ۵۵. $۶۵٫۱\text{cm/s}$
 ۵۷. (الف) $۴۸٫۷\text{m/s}$ ؛ (ب) $۶۴٫۵\text{kJ}$
 ۵۹. (الف) $۲۴٫۰\text{ft/s}$ ؛ (ب) $۳٫۰۰\text{ft/s}$
 (ج) ۹۰۰ft ؛ (د) $۴۸٫۸\text{ft}$
 ۶۱. (الف) $۱۰٫۸\text{PJ}$ ؛ (ب) ۲۶۳۰۰۰y
 ۶۳. $۱٫۰\text{kg}$ را کم می شود
 ۶۵. ۲۶۶ برابر محیط استوای زمین
 ۶۷. ۱۹۱
 ۶۹. $۲٫۲۱\text{eV}$
 ۷۱. (الف) $-۱۲٫۵\text{kJ}$ ؛ (ب) $۲٫۷۰\text{kJ}$

۵۵. (الف) 3.43 m/s ، 17.3° به طرف راست

(ب) 954 kJ

۵۷. (الف) 28.0° (ب) 7.44 m/s

۶۱. 2.44 m/s به طرف چپ

۶۳. (الف) 117 MeV (ب) $K_n = 102 \text{ MeV}$

$K_n = 15.0 \text{ MeV}$

۶۵. (الف) 10^{-11} kg.m/s ($0.655 \text{ j} + 1.04 \text{ i}$)

(ب) 7.66 MeV

۴۵. 2.66 m/s

۴۷. (الف) 1790 N ، (ب) 609 J

۵۱. (الف) 2.72 (ب) 7.39

۵۳. 1.33 km/s

۵۵. 60 N

۵۷. (الف) 49.1 kg (ب) 141 kg

۵۹. (الف) 23.4 kN (5260 lb) (ب) 4.31 MW (5780 hp)

فصل ۱۰

۱. 64 kN

۳. $2 \mu\text{u}$

۵. (الف) 2.40 N.s (ب) 2.40 N.s

(ج) 2.00 kN (د) 62.7 J

۷. 3.29 kN (744 lb)

۹. (الف) 2.20 N.s ، به طرف چپ

(ب) 212 N ، به طرف راست

۱۱. (الف) 10^0 kg.m/s ، 1.95 ، برای هر جهت پیشروی

(ب) به طرف عقب: $+66.1 \text{ MJ}$

به طرف جلو: -50.9 MJ

در جهت عرضی: $+7.61 \text{ MJ}$

۱۳. 41.7 cm/s

۱۷. (الف) 10^3 kg.m/s (ب) 250 J

(ج) 10.3 N (د) 824 N

۱۹. 124 kW

۲۱. (الف) 1.9 m/s ، به طرف راست (ب) بله

۲۳. 4.2 m/s

۲۵. (الف) 2.74 m/s (ب) 1.46 km/s

۲۷. $\approx 2 \text{ mm/g}$

۲۹. 1.2 kg

۳۱. (الف) 74.4 m/s (ب) 81.5 m/s ، 84.1 m/s

۳۳. (الف) $A: 4.57 \text{ m/s}$ ؛ $B: 3.94 \text{ m/s}$ (ب) 7.53 m/s

۳۵. 12.9 تن

۳۷. (الف) 4.21 ft/s ؛ 2210 ft.lb

(ب) 3.21 ft/s ؛ 581 ft/s

۳۹. 410 N

۴۱. 35.9 cm

۴۳. $\sqrt{2E \left(\frac{M+m}{Mm} \right)}$

۴۷. (الف) 5.0 j ، 4.0 i ، m/s

(ب) 700 J به دست می‌آید

۵۱. (الف) 26° از جهت پروتون فرودی

(ب) 227 m/s ؛ 466 m/s

۵۳. $v = V/4$

فصل ۱۱

۳. (الف) 10^{15} s (ب) 5.0 (ب) 26

۵. (الف) 10^5 rad/s (ب) 10^{-2} rad/s (ب) 1.75

(ج) 10^{-2} rad/s (ب) 1.45

۷. 11 rad/s

۹. (الف) 4.8 m/s (ب) خیر

۱۱. $23 \text{ h } 56 \text{ min}$

۱۳. (الف) 8140 rev/min^2 (ب) 425 rev

۱۵. (الف) -1.28 rad/s^2 (ب) 248 rad

(ج) 39.5 rev

۱۷. (الف) 2.0 rev/s (ب) 3.8 s

۱۹. (الف) 369 s (ب) 10^{-2} rad/s^2 (ب) -3.90

(ج) 10.8 s

۲۱. (ب) 10^{-1} rad/s^2 (ب) -2.30

(ج) $4610 \approx$ (د) 24 ms

۲۳. (الف) 3.49 rad/s (ب) 20.6 in/s

(ج) 10.1 in/s (د) 71.9 in/s^2 ؛ 25.3 in/s^2

۲۵. 5.6 rad/s^2

۲۷. (الف) 3.65 rad/s (ب) 38.0 m/s

(ج) 6.78 m/s^2 (د) 13.9 m/s^2

۲۹. 4.56 s

۳۱. (الف) 1.18 rev/min^2 (ب) 10300

(ج) 1.08 mm/s^2 (د) 30.2 m/s^2

۳۳. (الف) 10^2 ft/min ؛ $6.3 \times 10^2 \text{ ft/min}$ (ب) 1.9

(ب) 10^2 ft/min ؛ $6.8 \times 10^2 \text{ ft/min}$ (ب) 2.1

۳۵. 16.4 s

۳۷. (الف) $r\alpha^2 t^2$ (ب) $r\alpha$ (ج) 44.1°

۳۹. (الف) 71 rad/s (ب) -13 rad/s^2

(ج) 72 m

۴۱. (الف) $x^2 + y^2 = R^2$ ؛ دایره‌ای به شعاع R ؛ ω سرعت زاویه‌ای

جسم است.

(ب) $v_y = \omega x$ ؛ $v_x = -\omega y$ ؛ v مماس بر دایره است؛ $v = \omega R$

(ج) $a = \omega^2 R$ ؛ a در راستای شعاع به طرف مرکز دایره است.

$$-2.62 \text{ N.m (ج)}$$

$$1.15 \text{ (الف) } 1.49 \text{ N.m (ب) } 2.08 \text{ rad}$$

$$2.03 \text{ W (د) } -31.0 \text{ J (ج)}$$

۱۷. مرکز جرم در جهت نیروی ضربه‌ای با سرعت 2.9 m/s حرکت می‌کند؛ چوب با سرعت زاویه‌ای 1.07 rad/s حول مرکز جرم دوران می‌کند.

$$21. \text{ (ب) } ML^2/(L^2 + 12d^2)$$

$$25. \text{ (الف) } 1.18 \text{ s (ب) } 8.6 \text{ m}$$

$$27. \text{ (ج) } 5.18 \text{ rev (د) } 6.07 \text{ m/s}$$

$$27. \text{ (ج) } 3.0 \text{ min}$$

$$29. mv/(m + M)R$$

$$31. \text{ (الف) } 171 \text{ دور بر دقیقه (ب) } 0.792$$

$$33. \text{ (الف) } 5.12 \text{ mrad/s (ب) } 9.0 \text{ cm/s}$$

$$35. \text{ (الف) } MR^2\omega_0/4; MR^2\omega_0/2$$

$$\text{(ب) } R^2\omega_0^2/2g \text{ (ج) } \omega_0$$

$$37. \sqrt{2gr \sec \theta}$$

۳۹. (الف) هر یک در دایره‌ای به شعاع 1.46 m با سرعت زاویه‌ای 945 rad/s دوران می‌کند.

$$\text{(ب) } 9.12 \text{ rad/s (ج) } K_a = 97.5 \text{ J}; K_b = 94.1 \text{ J}$$

$$41. -0.127$$

$$43. 1.90 \text{ دقیقه}$$

فصل ۱۴

$$1. \text{ (الف) دو (ب) هفت}$$

$$5. \text{ (الف) } 2.5 \text{ m (ب) } 7.3^\circ$$

$$7. \text{ (الف) می‌نغزد؛ } 31^\circ \text{ (ب) واژگون می‌شود؛ } 34^\circ$$

$$9. 1200 \text{ lb}$$

$$11. \text{ (الف) } 2.78 \text{ kN (ب) } 3.89 \text{ kN}$$

$$13. \text{ پایه چپ: } 1.17 \text{ kN (کشش)}$$

$$\text{پایه راست: } 1.89 \text{ kN (تراکم)}$$

۱۵. سه چهارم طول تیر از کارگری که انتهای آن را گرفته است.

$$17. 1.91 \text{ kN} = \text{نیروی عضله، به طرف بالا، } 3 \text{ W}$$

$$2.55 \text{ kN} = \text{نیروی استخوان، به طرف پایین، } 4 \text{ W}$$

$$19. W\sqrt{h(2r-h)}/(r-h)$$

$$21. \text{ (الف) } F_1 = w \sin \theta_2 / \sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\text{(ب) } F_2 = w \sin \theta_1 / \sin(\theta_2 - \theta_1), \text{ عمود بر صفحه‌ها}$$

$$23. \text{ (الف) } 416 \text{ N (ب) } 172 \text{ N}; 238 \text{ N}$$

$$25. \text{ (الف) } 47.0 \text{ lb (ب) } 21.3 \text{ lb}; 10.9 \text{ lb}$$

$$27. \text{ (الف) } 1460 \text{ lb (ب) } 1220 \text{ lb}; 1420 \text{ lb}$$

$$29. \text{ (الف) } Wx/L \sin \theta \text{ (ب) } Wx/L \tan \theta$$

$$\text{(ج) } W(1 - x/L)$$

$$31. \text{ (الف) لولای پایین: } F_h = 180 \text{ lb}, F_v = 210 \text{ lb}$$

$$\text{لولای بالا: } F_h = 180 \text{ lb}, F_v = 60 \text{ lb}$$

فصل ۱۲

$$1. \text{ (الف) } 13.0 \text{ g.cm}^2 \text{ (ب) } 545 \text{ g.cm}^2 \text{ (ج) } 185^\circ \text{cm}^2$$

$$3. 6.75 \times 10^{12} \text{ rad/s}$$

$$5. \text{ (الف) } 6490 \text{ kg.m}^2$$

$$\text{(ب) } 4.36 \text{ MJ}$$

$$7. 9.97 \text{ kg.m}^2$$

$$9. \text{ (ب) } MR^2/4$$

$$13. \text{ (الف) } dm/M = 2rdr/R^2$$

$$\text{(ب) } dI = 2Mr^2dr/R^2$$

$$\text{(ج) } I = \frac{1}{4}MR^2$$

$$15. 3.66 \text{ N.m}, \text{ عمود بر صفحه به طرف داخل}$$

$$17. 1.2 \text{ N.m}, \text{ عمود بر صفحه به طرف خارج}$$

$$19. 7.63 \text{ rad/s}^2, \text{ به طرف خارج صفحه}$$

$$21. \text{ (الف) } 28.2 \text{ rad/s}^2 \text{ (ب) } 338 \text{ N.m}$$

$$23. 1.36 \text{ kW}$$

$$25. \text{ (الف) } 2.57 \times 10^{21} \text{ J (ب) } 4.9 \text{ Gy}$$

$$27. 690 \text{ rad/s}$$

$$29. \text{ (الف) } 2\theta/t^2 \text{ (ب) } 2R\theta/T^2$$

$$\text{(ج) } T_1 = M(g - 2R\theta/t^2)$$

$$T_2 = Mg - (2\theta/t^2)(MR + 1/R)$$

$$31. 1.73 \times 10^5 \text{ g.cm}^2$$

$$33. 6.11 \text{ m/s}$$

$$35. \text{ (الف) } -7.67 \text{ rad/s}^2 \text{ (ب) } -11.7 \text{ N.m}$$

$$\text{(ج) } 45.8 \text{ kJ (د) } 624 \text{ rev}$$

(ه) انرژی اتلاف شده در اثر اصطکاک برابر با 45.8 kJ است.

$$37. \text{ (الف) } 4.82 \times 10^5 \text{ N (ب) } 1.12 \times 10^4 \text{ N.m}$$

$$39. \text{ (الف) } 1.88 \times 10^{12} \text{ J/s}$$

$$\text{(ب) } -2.67 \times 10^{-22} \text{ rad/s}^2$$

$$\text{(ج) } 4.06 \times 10^9 \text{ N}$$

$$41. \text{ (الف) } 47.9 \text{ km/h (ب) } 3.65 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{(ج) } 8.68 \text{ kW}$$

$$45. \text{ (الف) } 56.5 \text{ rad/s (ب) } -8.88 \text{ rad/s}^2$$

$$\text{(ج) } 6.92 \text{ m}$$

$$47. \text{ (الف) } 12.5 \text{ cm/s}^2 \text{ (ب) } 4.63 \text{ s}$$

$$\text{(ج) } 28.8 \text{ rev/s (د) } 70.8 \text{ rev/s}$$

$$49. 48 \text{ m}$$

$$51. \text{ (الف) } W/6 \text{ (ب) } 2g/3$$

$$55. \alpha = 2F/MR; a = F/M$$

$$57. \text{ (الف) } 57.9 \text{ rad/s (ب) } 4.21 \text{ m}$$

فصل ۱۳

$$5. mvd$$

$$11. \text{ (الف) } -4.17 \text{ m/s}^2 \text{ (ب) } -16.9 \text{ rad/s}^2$$

(ب) $F_v = 60 \text{ lb}$, $F_h = 180 \text{ lb}$ وارد بر هر تیر، در جهت‌های

مخالف

۳۳. (الف) 47 lb (ب) $F_A = 120 \text{ lb}$; $F_E = 72 \text{ lb}$

۳۵. (الف) 446 N (ب) 500°

(ج) بله، 45° به طرف بالا، 315 N

۳۷. (الف) $L/2, L/4, L/6$ (ج) $N = n$

۴۱. 75 GN/m^2

۴۳. 3.65 mm

۴۵. 201 kN

۴۷. 802 دور بر دقیقه

۴۹. (الف) 180 MN (ب) 14.4 MN (ج) 16

نمایه

- آزمایشگاه شتابدهنده ملی فرمی ۲۴۷
 آونگ
 بالیستیک ۲۴۰
 مخروطی ۱۲۴-۱۲۶
- اثر تیرکمان ۲۳۲
 اجسام چرخان
 پایداری ~ ۳۱۴-۳۱۵
 تکانه زاویه‌ای ~ ۳۱۷-۳۱۸
 اجسام صلب
 انرژی جنبشی دورانی ~ ۲۷۵
 تعادل ~ در میدان گرانشی ۳۳۸-۳۳۹
 حرکت انتقالی ~ ۲۶۲
 دوران محض ~ ۲۵۹-۲۶۰
 دینامیک دورانی ~ ۲۸۳-۲۸۸
 کشسانی ~ ۳۳۹-۳۴۳
 گرانیگاه ~ ۳۳۰-۳۳۲
 لختی دورانی ~ ۲۷۸-۲۸۰
 استقامت
 ~ تسلیم ۳۴۱-۳۴۲
 ~ حدی ۳۴۱-۳۴۲
 اسکالرها ۴۲
 اصطکاک(ی)
 اساس میکروسکوپی ~ ۱۱۹-۱۲۰
 ~ ایستایی ۱۱۷-۱۱۸
 ~ جنبشی ۱۱۸
 ~ شاره‌ها ۱۲۹-۱۳۱
 ~ غلظتی ۱۱۹
- مقاومت ~ ۱۱۹
 اطلاعات نجومی ۳۵۸
 ~ زمین ۳۵۸
 ~ ماه ۳۵۸
 انتقال(ی)
 ترکیب حرکت‌های دورانی و ~ ۲۸۸-۲۹۴
 ~ جسم صلب ۲۶۰
 ~ دستگاه مختصات ۴۵
 قانون دوم نیوتون برای حرکت ~ ۲۹۲
 انتگرال ۳۷۳
 ~ خط ۱۵۵
 اندازه‌گیری ۱۲
 استانداردها در ~ ۳-۴
 تحلیل ابعادی در ~ ۱۱-۱۲
 ~ جرم ۹-۱۰
 دقت و رقمهای با معنی در ~ ۱۰-۱۱
 ~ زمان ۵-۶
 سیستم بین‌المللی یکاها در ~ ۴-۵
 ~ طول ۶-۸
 انرژی
- ~ بستگی ۲۰۰
 پایستگی ~ در سیستم‌های پایستار یک‌بعدی
 ۱۷۴-۱۸۱
 ~ تکبیک ۱۷۹-۱۸۰
 جرم و ~ ۱۸۶-۱۸۸
 ~ داخلی ۱۸۳
 اساس میکروسکوپی ~ ۱۸۵
 ~ در سیستمی از ذرات ۲۱۵-۲۱۸
- ~ سکون ۱۸۷
 ضرایب تبدیل ~ ۳۷۰
 کوانتس ~ ۱۸۸-۱۸۹
 ~ مکانیکی دستگاه ذرات ۱۸۴
 انرژی پتانسیل ۱۷۳-۱۷۴
 تعریف ~ ۱۷۳
 تغییر ~ ۱۷۳
 ~ در سیستم پایستار یک‌بعدی ۱۷۴-۱۷۵
 ~ در نیروی فتر ۱۷۵-۱۷۶
 ~ گرانش ۱۷۶-۱۷۷
 ~ یوکاوا ۱۹۷
 انرژی جنبشی ۱۵۶-۱۵۸
 ~ برخورد ۲۳۷
 تعریف ~ ۱۵۶
 ~ در سرعتهای زیاد ۱۶۱
 ~ دورانی ۲۷۵-۲۷۸
 ~ غلظش بدون لغزش ۲۹۰
 فرمول کلی ~ ۱۶۱
 ~ نوترونها ۱۵۷
- باریون‌ها ۳۶۶
 برخورد(های) ۲۳۲-۲۳۳
 پارامتر ~ ۲۴۱
 پایستگی تکانه در ~ ۲۳۴-۲۳۵
 تعریف ~ ۲۳۲-۲۳۳
 چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴-۲۴۷
 ~ خطی ۲۳۷
 ~ در یک بعد ۲۳۷-۲۴۰

تصویرگیری تشدید مغناطیسی ۳۱۹
تبادل

~ استاتیکی ۳۲۹

~ پایدار ۱۷۸

~ خشی ۱۷۸

~ مکانیکی ۳۲۹

تعریف ~ ۳۲۹

~ ناپایدار ۱۷۸

تبادل اجسام صلب ۳۲۹

برخوردها در ~ ۳۲۹-۳۳۰

~ در میدان گرانشی ۳۳۸-۳۳۹

کشسانی در ~ ۳۳۹-۳۴۳

گرانیگاه در ~ ۳۳۱-۳۳۲

مثالهایی از ~ ۳۳۲-۳۳۸

تعریف کار مکانیکی ۵۱

تغییر شکل ۳۴۰

تقارن محوری ۳۰۸

تقریب زاویه کوچک ۶۶

تکانه

پایستگی ~ ۲۳۵-۲۳۷

~ در برخورد ۲۳۳

~ در سرعت زیاد ۲۱۱-۲۱۲

~ ذرات ۲۱۱-۲۱۲

~ سیستمی از ذرات ۲۱۱

قانون دوم نیوتون در ~ ۲۱۹

تکانه خطی

پایستگی ~ ۲۱۱-۲۱۵

~ ذرات ۲۱۱-۲۱۲

~ سیستمی از ذرات ۲۱۱

تکانه زاویه‌ای ۳۱۹-۳۰۳

~ اجسام متقارن ۳۱۱-۳۱۲

~ در برابر اجسام نامتقارن ۳۱۱

~ اجسام نامتقارن ۳۱۱-۳۱۲

پایستگی ~ ۳۱۱-۳۱۲

~ اسکیت‌باز چرخنده ۳۱۲-۳۱۳

~ چرخ چرخان دوچرخه ۳۱۳-۳۱۴

~ در پایداری اجسام چرخان ۳۱۴-۳۱۵

~ در شیرجه از روی تخته فنی ۳۱۳

~ ستاره‌های رمبده ۳۱۵

تعریف ~ ۳۰۳

~ ذاتی ۳۱۸

~ ذره ۳۰۴-۳۰۶

~ فضانوردان ۹۷

پارامتر برخورد ۲۴۱

پایداری اجسام چرخان ۳۱۴-۳۱۵

پایداری سیستمی ۳۱۴

پایستگی انرژی ۱۷۰-۱۹۰

جواب تحلیلی ~ در سیستم پایستار یک‌بعدی

۱۷۹

حل ~ در سیستم پایستار یک‌بعدی ۱۸۱-۱۸۰

~ در حد کوانتومی ۱۸۸

~ در دستگاه ذرات ۱۸۵-۱۸۲

~ سیستمهای پایستار دو و سه‌بعدی ۱۸۱-۱۸۲

~ در گرانش ۱۷۱-۱۷۰

~ در مقیاس میکروسکوپی ۱۸۸-۱۸۹

~ در نیروی اصطکاک ۱۷۱

~ در قانون تعمیمی ۱۸۴

قانون ~ ۱۸۴

~ مکانیکی ۱۷۵-۱۷۳

~ نیروی فنر ۱۷۱-۱۷۰، ۱۸۴-۱۸۳

پایستگی پاریته ۵۲

پایستگی تکانه ۲۳۵-۲۳۷

~ خطی ۲۱۱-۲۱۵

~ زاویه‌ای ۳۱۱-۳۱۲

~ اسکیت‌باز چرخنده ۳۱۲-۳۱۳

~ در ستاره‌های رمبده ۳۱۵

~ در شیرجه از روی تخته فنی ۳۱۳

پایستگی جرم ۱۸۷

پروژایی ۱۸۸-۱۸۶

پلاستیک ۳۴۰

پیچ با شیب عرضی ۱۲۴

تاش گاما ۱۸۷-۱۸۶

تابع انرژی پتانسیل برای نیروهای پایستار ۳۳۸

تانسور ۴۹

تپ‌اختر ۲۷۱

تحلیل ابعادی ۱۲-۱۱

ترازوی دوکفه‌ای ۹۸

ترازوی فنر ۹۸

تراکم ۳۴۰

تبدیل سرعت‌های اینشتین ۷۳

تشدید مغناطیسی هسته‌ای ۳۱۸-۳۱۹

تصویر ۴۳

~ دویعدی ۲۴۴-۲۴۰

ضربه و تکانه در ~ ۲۳۳

~ کاملاً ناکشسان ۲۳۷

برخوردهای کشسان ۲۳۷-۲۳۹

~ پرتابه پرجم ۲۳۹

پایستگی تکانه در ~ ۲۳۷

~ جرمهای مساوی ۲۳۸

~ دویعدی ۲۴۱-۲۴۰

چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۶

~ هدف پرجم ۲۳۸

~ یک‌بعدی ۲۳۷

چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴

برخوردهای ناکشسان ۲۳۹

~ دویعدی ۲۳۹

ذرات به هم چسبیده در ~ ۲۳۹

~ یک‌بعدی ۲۳۹

چارچوب مرجع مرکز جرم در ~ ۲۴۴-۲۴۵

بردارها ۵۲-۴۱

تصویر ~ ۴۳

تعریف ~ ۴۲، ۵۰

تقارن انعکاسی ~ ۵۱

حاصل ضرب اسکالر ~ ۱۴۹

حاصل ضربهای تعمیم‌یافته ~ ۴۹

~ در دوبعد و سه‌بعد ۶۲-۵۹

دستگاه مختصات ~ ۴۵

ضرب ~ ۴۹-۴۷، ۲۷۱

~ قطبی ۵۱

کمیت‌های دورانی به صورت کمیت‌های ~ ۲۶۳-۲۶۵

~ محوری ۵۲

معادلات تبدیل ~ ۵۰

مؤلفه‌های ~ ۴۵-۴۳

~ در دوبعد و سه‌بعد ۶۲

~ ناورد ۵۰

نیرو به صورت ~ ۸۹

برد افقی پرتابه ۶۳

برش (ی) ۳۴۱

نیروهای ~ ۳۴۱

برنامه‌های کامپیوتری ۳۷۴-۳۷۷

برندگان جایزه نوبل ۳۸۴-۳۷۸

بسط نگاریتمی ۳۷۲

بسط مایمی ۳۷۲

بی‌وزنی ۹۷

- رابطه ~ با گشتاور نیرو ۳۰۵
 ~ سیستم ذرات ۳۰۵-۳۰۷
 ~ فرفره چرخان ۳۱۷-۳۱۸
 قاعده دست راست در ~ ۳۰۵
 کوانتشن ~ ۳۱۸-۳۱۹
 ~ گشتاور نیرو ۳۰۵-۳۰۶
 ~ مداری ۳۱۸
 ~ و سرعت زاویه‌ای ۳۰۸-۳۱۱
 تنش ۳۴۰
 تعریف ~ ۳۴۱
 تنظیم‌کننده سرعت ۱۶۸
 توان ۱۵۸-۱۵۹
 تعریف ~ ۱۵۸
 ضرایب تبدیل ~ ۳۷۰
 تولید زوج ۱۸۶
 ثابت(های)
 ~ آوگادرو ۱۰
 ~ بنیادی ۳۵۶
 ~ پلانک ۱۸۹، ۱۲
 ~ گرانش ۱۲
 ~ نیرو ۱۵۳
 جابه‌جایی ۴۱
 ~ حرکت دوبعدی و سه‌بعدی ۵۸-۵۹
 جدول تناوبی عناصر ۳۶۴
 جرم ۸۹-۹۰
 پایستگی ~ ۱۸۷
 ~ در استاندارد SI ۹-۱۰
 ~ در سیستم SI ۹-۱۰
 رابطه ~ و وزن ۹۶-۹۷
 ضرایب تبدیل ~ ۳۶۸
 ~ کل ۲۰۲
 ~ و انرژی ۱۸۶-۱۸۸
 چارچوبهای مرجع ۱۵۹-۱۶۱
 تبدیل سرعت بین ~ ۲۴۴
 ~ لخت ۱۳۲-۱۳۴، ۸۸، ۷۱-۷۲
 ~ مرکز جرم ۲۴۴-۲۴۷
 ~ نالخت ۱۳۲-۱۳۴
 چرخزاد ۲۸۸
 چسبندگی سطحی ۱۱۹
- حد کشسانی ۳۴۰
 حرکت ۱۷-۳۱
 ~ با سرعت ثابت ۱۸
 ~ با سرعت متوسط ۱۹-۲۰
 ~ با شتاب ثابت ۲۵-۲۷
 ~ در دو بعد و سه‌بعد ۶۰-۶۲
 ~ پرتابی ۱۲۹-۱۳۱، ۶۲-۶۶
 ~ با مقاومت هوا ۱۳۰-۱۳۱
 توصیف ~ ۱۷-۱۹
 جابه‌جایی ~ ۵۸-۵۹
 ~ جسمی که به مانع برخورد و باز می‌گردد ۱۹، ۲۲
 ~ دوبعدی و سه‌بعدی ۵۸-۷۴
 ~ ذرات ۱۷
 ~ زدن هدف در حال سقوط ۶۴-۶۶
 سرعت ~ ۵۸-۵۹
 سرعت لحظه‌ای ~ ۲۰-۲۳
 ~ سقوط آزاد اجسام ۲۷-۳۱
 شتاب ~ ۱۸، ۲۰، ۲۳-۲۴، ۵۸-۵۹
 ~ شتابدار و ترمز ماشین ۱۹-۱۸، ۲۲-۲۳
 قانون دوم ~ ۲۱۱-۲۱۲
 ~ گلوله خمیر چسبیده ۲۲-۲۳، ۱۹
 ~ مرکز جرم ۲۱۷
 ~ نسبی ۷۰-۷۴
 ~ در سرعت زیاد ۷۳-۷۴
 نقاط بازگشت ~ ۱۷۸
 حرکت دایره‌ای
 سرعت ~ و بردارهای شتاب ۶۸-۷۰
 شتاب مماسی در ~ ۶۹-۷۰
 ~ بکتواخت ۶۶-۶۸
 ~ آونگ مخروطی ۱۲۳-۱۲۴
 ~ پیچ با شیب عرضی ۱۲۴
 دینامیک ~ ۱۲۲-۱۲۵
 ~ گردونه ۱۲۴-۱۲۵
 حرکت دورانی ۲۵۹-۲۶۸
 ~ با شتاب زاویه‌ای ثابت ۲۶۲-۲۶۳
 جابه‌جایی زاویه‌ای در ~ ۲۶۱
 روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای به صورت
 اسکالر در ~ ۲۶۵-۲۶۷
 روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای به صورت
 اسکالر و بردار در ~ ۲۶۷-۲۶۸
 سرعت زاویه‌ای در ~ ۲۶۱
- شتاب زاویه‌ای در ~ ۲۶۱، ۲۶۶
 قاعده دست راست در ~ ۲۶۴
 کمیت‌های ~ به صورت کمیت‌های برداری ۲۶۳
 متغیرهای ~ ۲۶۰-۲۶۲
 ~ محض در اجسام صلب ۲۵۹-۲۶۰
 مؤلفه‌های مماسی و شعاعی شتاب زاویه‌ای در ~
 ۲۶۶
 خصوصیات سیاره‌ها ۳۵۹
 خطای اندازه‌گیری ۱۱-۱۰
 خورشید
 اطلاعات نجومی ~ ۳۵۸
 تغییر جرم ~ ۱۸۷
 دستگاه مختصات ۴۵
 دوران ~ ۴۵
 دینامیک آشوبناک ۱۳۶
 دینامیک چرخ غلتان ۲۸۸-۲۸۹
 دینامیک دورانی ۲۷۴-۲۹۴
 ~ اجسام صلب ۲۸۳-۲۸۸
 انرژی جنبشی در ~ ۲۷۵-۲۷۷
 ترکیب حرکت‌های دورانی و انتقالی در ~ ۲۸۸-۲۹۴
 خلاصه معادلات مربوط به ~ ۳۲۰
 ~ غلتش بدون لغزش ۲۸۹
 قضیه کار-انرژی در ~ ۲۷۵
 قضیه محورهای موازی در ~ ۲۷۷-۲۷۸
 ~ گشتاور نیروی وارد بر ذره ۲۸۱-۲۸۳
 ~ لختی ۲۷۵
 مقایسه ~ با معادله دینامیک خطی ۲۸۴-۲۸۵
 ذرات بنیادی ۳۶۵
 برخورد میان ~ ۲۳۳
 پایستگی انرژی ~ ۱۸۳-۱۸۶
 تکانه خطی ~ ۲۱۰-۲۱۱
 سینماتیک ~ ۱۷
 گشتاور نیروی وارد بر ~ ۲۸۱-۲۸۳
 گشتاور وارد بر ~ که در مسیر دایره‌ای حرکت می‌کند
 ۳۱۰-۳۱۱
 ~ مرکب ۳۶۶
 میدان ~ ۳۶۵
 رقم‌های با معنی ۱۰

روش

- ~ آونگ در اندازه‌گیری شتاب سقوط آزاد ۳۱-۳۰
- ~ زمان پرواز ۱۵۷
- ~ مؤلفه‌های در جمع بردارها ۴۷-۴۵
- ~ نموداری در جمع بردارها ۴۳-۴۲
- روغنکاری ۱۱۹
- رویدادهای چسبیدن و لغزیدن ۱۱۹
- زاویه سمتی ۴۴
- زاویه قطبی ۴۴
- ساعت(های)
- ~ اتمی ۵۶
- ~ سزیم ۵۶
- ~ کوارتز ۵
- سال نوری ۸، ۱۵
- ستاره نوتونی ۳۱۵
- سرعت
- ~ بردارها در حرکت دایره‌ای ۷۰-۶۸
- ستگی نیرو به ~ ۱۲۶-۱۲۵
- ~ بیشینه جسم در حال سقوط ۱۳۱-۱۲۹
- تبدیل ~ بین چارچوبهای مرجع ۲۴۴
- ~ حرکت دوبعدی و سه‌بعدی ۵۹-۵۸
- ضرایب تبدیل ~ ۳۶۹
- فرایند حدگیری ~ ۲۱
- قانون تبدیل ~ ۷۱
- ~ لحظه‌ای ۲۳-۲۰
- ~ متوسط ۲۰-۱۹
- ~ نور ۷
- سرعت زاویه‌ای
- ~ بردار ۵۲
- تکانه زاویه‌ای در ~ ۳۱۱-۳۰۷
- ~ در حرکت دورانی ۲۶۱
- سقوط آزاد اجسام ۳۱-۲۷
- سیستم بریتانیایی
- کار در ~ ۱۵۰
- یگاهای نیرو در ~ ۹۵
- سیستم بین‌المللی SI ۴-۵، ۴۵۴، ۲۵۶
- کار در ~ ۱۵۰
- متر در ~ ۸-۶
- یگاها در ~ ۳۵۴
- یگاهای نیرو در ~ ۹۵
- سیستم ذرات
- انرژی در ~ ۲۱۸-۲۱۵
- ~ با جرم متغیر ۲۲۳-۲۱۹
- ~ پس‌ذره‌ای ۲۰۷-۲۰۳
- تکانه خطی ~ ۲۱۱
- تکانه زاویه‌ای ~ ۳۰۷-۳۰۵
- ~ دوزره‌ای ۲۰۳-۲۰۱
- ~ چرخان ۳۱۱
- کار در ~ ۲۱۸-۲۱۵
- گشتاور نیروی خارجی ~ ۳۰۵
- سیستم CGS
- کار در ~ ۱۵۰
- یگاهای نیرو در ~ ۹۵-۹۴
- سیستمهای پس‌ذره‌ای ۲۰۸-۲۰۳
- سیستمهای دوزره‌ای ۲۰۳-۲۰۱
- سینماتیک ذرات ۱۷
- شبکه ۳۲۹
- شبه‌بردار ۵۲
- شبه‌کار ۲۱۷
- شبه‌نیرو ۱۳۴-۱۳۲
- شتاب ۱۸، ۲۱، ۲۴-۲۳
- بردارهای ~ در حرکت دایره‌ای ۶۹-۶۷
- ~ ثابت ۲۷-۲۵
- ~ در دو بعد و سه بعد ۶۲-۶۰
- تعریف ~ ۲۳
- ~ حرکت دوبعدی و سه‌بعدی ۵۹-۵۸
- روابط میان متغیرهای خطی و زاویه‌ای ~ ۲۶۷
- ~ سقوط آزاد ۳۱-۲۷
- اندازه‌گیری ~ ۳۱-۳۰
- ~ گالیله ۳۹-۳۰
- ~ شعاعی ۶۸-۶۷
- ~ کاهنده ۲۳
- ~ لحظه‌ای ۲۳، ۵۱
- ~ مرکز جرم ۲۰۴
- ~ مرکزگرا ۶۹-۶۷، ۷۰
- مؤلفه‌های مماسی و شعاعی ~ ۲۶۶
- ~ مماسی ۷۰-۶۹
- ~ در حرکت دایره‌ای ۷۰-۶۹
- ~ و جرم ۹۰-۸۹
- شتاب‌دهنده ذرات ۲۴۷-۲۴۶
- شتاب زاویه‌ای
- ~ به‌صورت بردار ۲۶۵
- ~ در حرکت دورانی ۲۶۱
- ~ دوران ۲۶۳-۲۶۲
- مؤلفه‌های مماسی و شعاعی ~ ۲۶۶
- شکل گالیله‌ای قانون تبدیل سرعتها ۷۱
- ضرایب تبدیل ۳۷۰-۳۶۷
- ~ چگالی ۳۶۸
- ~ حجم ۳۶۸
- ~ زاویه‌ها ۳۶۷
- ~ زمان ۳۶۹
- ~ شار مغناطیسی ۳۷۰
- ~ فشار ۳۶۵
- ~ طول ۳۶۷
- ~ گرما ۳۸۰
- ~ مسافت ۳۶۸
- ~ میدان مغناطیسی ۳۷۰
- ضرب نقطه‌ای ۴۸
- ضریب زاویه‌ای ۳۲۲
- ضریب اصطکاک
- ~ ایستایی ۱۱۸
- ~ جنبشی ۱۱۸
- ~ متفاوت ۱۲۰
- عدد کوانتومی اسپین ۳۱۸
- عناصر
- جدول تناوبی ~ ۳۶۴
- خواص ~ ۳۶۱-۳۶۰
- غلشش بدون لغزش ۲۹۴-۲۸۹
- فرایندهای فروپاشی خودبه‌خودی ۲۴۸-۲۴۷
- ~ در برخوردها ۲۴۸-۲۴۷
- فرایندهای واپاشی رادیواکتیو ۲۴۹-۲۴۷
- فرمول(های)
- ~ ریاضی ۳۷۲-۳۷۱
- ~ مثلثاتی ۳۷۱
- ~ هندسه ۳۷۱
- فشار تابشی ۳۱۵
- فتر
- انرژی پتانسیل ~ ۱۷۴-۱۷۳
- قانون نیروی ~ ۱۵۳

رابطهٔ تکانه زاویه‌ای با ~ 305	\sim برداری $50-51$	قاعدهٔ دست راست
\sim خارجی 305	\sim پایستگی 156	\sim برای حاصل ضرب برداری 48
\sim ناشی از گرانی 331	\sim نیرو $116-117, 87$	\sim در تکانهٔ زاویه‌ای 305
\sim وارد بر یک ذره $281-283$	\sim در فنر 152	\sim در حرکت دورانی 264
\sim که در مسیری دایره‌ای حرکت می‌کند $310-311$		قانون
یکاهای ~ 282	کار	\sim پایستگی انرژی 184
	تعریف $\sim 148-150$	\sim تبدیل سرعت 71
لیتون‌ها 265	\sim در سیستمی از ذرات $215-218$	\sim جابه‌جایی در جمع بردارها 42
لختی 88	ضرایب تبدیل ~ 370	\sim داریسی 16
\sim دورانی $274-277$	\sim نیروی ثابت $148-151$	\sim دوم حرکت $211-212$
\sim اجسام صلب $278-279$	یکای ~ 150	\sim شرکت‌پذیری در جمع بردارها 42
گشتاور ~ 274	\sim سی که نیروی متغیر دوبعدی انجام می‌دهد	\sim لختی 18
	$154-155$	\sim هوک 153
مادهٔ تاریک 135	\sim سی که نیروی متغیر یک‌بعدی انجام می‌دهد	قانون اول نیوتون $87-88$
ماشین آتوود 103	$151-154$	قانون دوم نیوتون $91-93, 51$
ماهواره‌ای در مدار زمین 93	کاربردهای قوانین نیوتون $98-99$	ارزشیابی ~ 135
مثلثاتی	کرنش 340	\sim در آونگ مخروطی $123-124$
اتحادهای ~ 372	\sim سنج 340	\sim در اصطکاک $119-130$
بسط ~ 372	کشسانی	\sim شماره‌ها 129
توابع ~ 371	\sim اجسام صلب $338-343$	\sim در پیچ با شیب عرضی 124
محدودیت‌های قوانین نیوتون $134-136$	برش ~ 341	\sim در حرکت انتقالی 292
مدل بور برای اتم هیدروژن 142	تراکم ~ 340	\sim در حرکت دایره‌ای یکنواخت 132
مدول	خواص \sim مواد 342	\sim در گردونه 124
\sim برشی 341	کشش ~ 340	مشابه دورانی ~ 274
\sim کشسانی 340	کشش $341, 99$	یکاهای در $\sim 95-96$
\sim پانگ 340	کوارکها 365	قانون سوم نیوتون $92-94$
مرز سیستم $182-183$	کوانتوم 189	صورت قوی ~ 305
مرکز جرم $204-212$	گرانش	قرارداد علامت 183
\sim اجسام صلب $208-211$	انرژی پتانسیل $\sim 176-177$	قطره‌های باران 129
چارچوب مرجع $\sim 244-247$	پایستگی انرژی در $\sim 170-171$	قضیه
سرعت ~ 244	ثابت بنیادی ~ 12	\sim دو جمله‌ای 372
شتاب ~ 204	\sim در گرانشگاه اجسام صلب $331-332$	\sim ضربه-تکانه 244
\sim سینم زمین-ماه 205	شتاب مربوط به $\sim 27-28$	\sim فیثاغورس 371
کار ~ 217	گشتاور ناشی از ~ 331	\sim محورهای موازی $277-278$
\sim گرانشگاه 331	گرانشگاه اجسام صلب $331-333$	قضیهٔ کار-انرژی $156-158$
معادلهٔ ~ 217	گردونه $124-125$	اثبات کلی $\sim 156-158$
مرکز شتاب‌دهندهٔ خطی استنفورد 247	گسیل یوزتریون 186	\sim در دینامیک دورانی 275
مزون‌ها 366	گشتاور لختی 274	\sim جسم صلب 284
مشقها 373	گشتاور نیرو(ی)	محدودیت‌های ~ 158
معادله(های)	تعریف ~ 274	قوانین
\sim بردار با شتاب ثابت در دو بعد و سه بعد $60-61$	تکانهٔ زاویه‌ای $\sim 305-306$	\sim اصطکاک چارلز آگوستین کولن 118
\sim تبدیل 50		\sim اصطکاک لئوناردو داوینچی 118

- کاری که سی یک بعدی انجام می‌دهد ۱۵۴-۱۵۱
 ~ کوریولیس ۱۳۳-۱۳۴
 ~ گرانی ۱۱۶
 گشتاور ~ ۲۸۱
 ~ لختی ۱۳۲-۱۳۴
 ~ متغیر در معادلات حرکت ۱۲۶-۱۲۷
 ~ مرکزگرا ۱۲۳، ۱۱-۱۲
 ~ مرکزگریز ۱۳۳
 ~ مماسی ۳۰۶
 ~ وابسته به زمان ۱۲۶-۱۲۹
 برنامه‌های کامپیوتر برای ~ ۳۷۴
 روشهای تحلیلی در ~ ۱۲۷-۱۲۸
 روشهای عددی ~ ۱۲۸-۱۲۹
 ~ وابسته به سرعت ۳۷۵-۳۷۶
 ~ وابسته به مکان ۱۲۷
 ~ هسته‌ای ضعیف ۱۱۶
 بکاهای ~ ۹۵-۹۶
 نوترینو ۱۸۴
 واپاشی بتا ۵۲
 وزن ۹۶
 رابطه ~ با جرم ۹۵-۹۶
 وسایل برخورددهندهٔ باریکه ۲۴۶-۲۴۷
 یکای نجومی ۱۵
- نمودار جسم آزاد ۹۲
 نیرو(های) ۸۸-۸۹
 ~ اصطکاک ۱۱۸-۱۲۲
 ~ ایستایی ۱۱۸-۱۱۹
 پایستگی انرژی در ~ ۱۷۱
 ~ جنبشی ۱۱۸
 ~ الکتروضعیف ۱۱۶
 ~ الکترومغناطیسی ۱۱۶
 اندازه‌گیری ~ به روش استاتیکی ۹۷-۹۸
 اندازه‌گیری ~ به روش دینامیکی ۸۸-۸۹
 ~ بار ۱۱۸، ۱۰۰
 ~ برگرداننده ۱۵۲
 ~ بنیادی ۱۱۶
 ~ پایستار نسبت به نیروی ناپایستار ۱۷۱
 تعریف ~ ۸۸، ۸۷
 ~ تماسی ۱۰۰
 ثابت ~ در معادلات حرکت ۱۲۴-۱۲۵
 ~ خارجی در سیستم پوسته‌گویی ۲۰۹
 ~ داخلی ۱۸۳
 ~ در قانون دوم نیوتون ۵۱
 ضرایب تبدیل ~ ۳۶۹
 ~ ضربه‌ای ۲۳۲
 ~ در برخورد ۲۳۴
 ~ عمود ۱۱۸، ۱۰۰
 ~ قوی ۱۱۶
 کار ~ ثابت ۱۵۱، ۱۴۸
 کاری که سی دو بعدی انجام می‌دهد ۱۵۴
- ~ حرکت ۱۲۴-۱۲۶
 ~ درجهٔ دو ۳۷۱
 ~ موشک ۲۲۱-۲۲۲
 مقاومت اصطکاک کی ۱۱۹
 مقاومت هوا در حرکت پرنایی ۱۳۰-۱۳۱
 مکانیک
 جرم در ~ ۸۹-۹۰
 چارچوبهای نالخت در ~ کلاسیک ۱۳۲-۱۳۴
 قانون اول نیوتون در ~ ۸۷-۸۹
 قانون دوم نیوتون در ~ ۹۱-۹۳
 قانون سوم نیوتون در ~ ۹۲-۹۴
 کاربرد قوانین نیرو در ~ ۹۸-۹۹
 ~ کلاسیک ۸۶-۸۷
 نیرو در ~ ۸۸-۸۹
 متحنی تنش-کشش ۳۴۱
 منزوی کردن سیستم ۳۳۲
 نابودی الکترون-پوزیترون ۱۸۶-۱۸۷
 نسبیت ۱۳۵
 ~ خاص ۱۳۵
 نشانه‌ها و علامتهای ریاضی ۳۷۱
 نظریه(های)
 ~ آشوب ۱۳۶
 ~ نسبیت خاص اینشتین ۱۳۵
 ~ وحدت بزرگ ۱۱۶
 نقاط بازگشت حرکت ۱۷۸
 نقطهٔ زین ۳۳۸