تعریف مسأله حمل و نقل (Transportation Problem)

m انبار و موجودی انبار i ام $= a_i$ واحد از کالای خاص

n مشتری و تقاضای مشتری j ام $= b_j$ " " "

فرض بر این است که به ازای هر i و j، $a_i > 0$ و $b_j > 0$

c_{ij} هزینه حمل یک واحد کالا از انبار i به مشتری j

بیان مسأله - چگونه فرستادن کالا از انبارهای موجود به مشتریهای مورد نظر به طوری که هزینه حمل کالا min شود.

فرموله کردن مسأله - فرض کنیم x_{ij} = مقدار کالای مورد نظر که از انبار i به مشتری j فرستاده می‌شود.

همچنین فرض بر این است که از هر انبار امکان ارسال کالا به هر مشتری وجود دارد. در غیر این صورت c_{ij} متناظر بی‌نهایت در نظر گرفته خواهد شد.

بنابراین صورت ریاضی مسأله حمل و نقل چنین است:

$$\min \ z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}$$

s.t

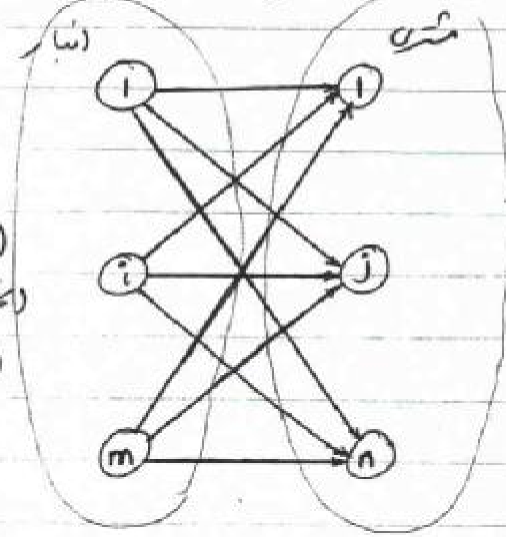
$$\sum_j x_{ij} \le a_i$$ (قیدهای موجودی انبار)

(کل کالاهای ارسال شده از هر انبار را از موجودی انبار تجاوز نمی‌کند)

$$\sum_i x_{ij} \ge b_j$$ (قیدهای تقاضای مشتریان)

(هر مشتری حداقل نیاز خود را دریافت می‌کند)

$$x_{ij} \ge 0$$



در این مسأله: تعداد متغیرهای تصمیم $= mn$

تعداد قیود $= m+n$

توجه ـ زمانی تقاضای مشتریان برآورده می‌شود که داشته باشیم

کل تقاضای مشتریان $\geq$ کل موجودی انبارها

یعنی: $\sum_{i=1}^{m} a_i \geq \sum_{j=1}^{n} b_j$

زمانی که داشته باشیم: کل تقاضای مشتریان $=$ کل موجودی انبار

در این صورت مسأله حمل و نقل به صورت زیر در می‌آید که آن را صورت استاندارد مسأله حمل و نقل می‌نامیم:

$$\min\ z = \sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} \xrightarrow{\text{Dual}} \max\ w = \sum_i a_i u_i + \sum_j b_j v_j$$

S.t

$$\begin{cases} \sum_j x_{ij} = a_i\ , & i = 1 \text{ To } m \\ \sum_i x_{ij} = b_j\ , & j = 1 \text{ To } n \\ x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

S.t

$$\begin{cases} u_i + v_j \leq c_{ij} \\ u_i \text{ و } v_j \text{ آزاد} \end{cases}$$

دو حالت اتفاق می‌افتد که صورت مسأله حمل و نقل استاندارد نیست:

الف- $\sum_i a_i > \sum_j b_j$.

در این حالت یک مشتری تصنعی (artificial customer)

(مشتری $(n+1)$ام) با تقاضای $b_{n+1} = \sum_i a_i - \sum_j b_j$

و با هزینه حمل $C_{i,n+1} = 0$ $(i = 1 \text{ To } m)$ به مسأله افزوده

می‌شود.

(توجه- $x_{i,n+1}$ $(i = 1 \text{ To } m)$ های مثبت در جواب بهینه نشان دهنده

مقدار کالایی است که در انبار i ام باقی مانده و فرستاده نمی‌شود.)

ب- $\sum_i a_i < \sum_j b_j$.

در این حالت یک انبار تصنعی (artificial warehouse)

(انبار $(m+1)$ام) با موجودی $a_{m+1} = \sum_j b_j - \sum_i a_i$

و با هزینه حمل $C_{m+1,j} = 0$ $(j = 1 \text{ To } n)$ به مسأله افزوده می‌شود.

(توجه- در جواب بهینه $x_{m+1,j}$ $(j = 1 \text{ To } n)$ های مثبت نشان

دهنده کمبود کالا است که به مشتری j ام فرستاده نمی‌شود. به عبارت

دیگر تقاضای مشتری j ام به اندازه $x_{m+1,j}$ واحد کمتر از مقدار

خواسته شده ارسال گردیده است.)

صورت ماتریسی مسأله حمل و نقل:

$$\min \quad Z = cx \qquad c = [c_{11}, \dots, c_{ij}, \dots, c_{mn}]$$

$$\text{S.t} \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \qquad x = [x_{11}, \dots, x_{ij}, \dots, x_{mn}]^T$$

$$b = [a_1, \dots, a_m, b_1, \dots, b_n]^T$$

ماتریس ضرایب مسأله حمل و نقل ←

$$A = \begin{array}{c} m \text{ سطر} \\ \\ n \text{ سطر} \end{array} \left[\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \\ \hline I_n & I_n & \cdots & I_n \end{array}\right]_{(m+n)\times(mn)}$$

بردارهای با اعضای واحد

$$= [A_{11}, \dots, A_{ij}, \dots, A_{mn}]$$

$$\text{where} \quad A_{ij} = e_i + e_{m+j} \; ; \quad e_i, e_{m+j} \in \mathbb{R}^{m+n}$$

ستون (ij) ام ماتریس A

شدنی بودن مسأله حمل و نقل-

تحت فرض $\sum_i a_i = \sum_j b_j$ مسأله حمل و نقل دارای جواب شدنی است،

زیرا اگر قرار دهیم: $x_{ij} = \frac{a_i b_j}{d}$ where $d = \sum_i a_i = \sum_j b_j$

for all i,j

آنگاه:

الف- $x_{ij} > 0$ (for all i,j)

ب- $\sum_i x_{ij} = b_j \; , \; \sum_j x_{ij} = a_i$

ج- $x_{ij} \leq \min\{a_i, b_j\}$

به عبارت دیگر x_{ij} (for all i,j) یک جواب شدنی مسأله حمل و نقل است.

کراندار بودن مسأله حمل و نقل-

برای اثبات کراندار بودن مسأله حمل و نقل کافی است نشان دهیم مجموعه :

$$\bar{D} = \{ d \neq 0 ,\ \underset{(m+n)\times(mn)}{A}\ \underset{(mn)\times 1}{d} = 0 ,\ \overset{1d=1}{d} \geq 0 \}$$

تهی است . برای این منظور به برهان خلف فرض کنیم $d \in D$ ، در این صورت $d \neq 0$ و

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_i d_{ij} = 0 \Rightarrow d_{ij} = 0 \ (i = 1 \text{ To } m) \\ \sum_j d_{ij} = 0 \rightarrow d_{ij} = 0 \ (j = 1 \text{ To } n) \\ d_{ij} \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow d_{ij} = 0 \ (\text{for all } i,j)$$

$$\Rightarrow d = 0 \ \divideontimes$$

بنابراین $\bar{D} = \phi$ و لذا مجموعه جوابهای شدنی مسأله حمل و نقل دارای هیچ جهت دور شونده نیست و لذا مسأله حمل و نقل همواره کراندار است .

نتیجه - با توجه به شدنی بودن و کراندار بودن مسأله حمل و نقل ، این مسأله همواره دارای جواب بهینه است .

خواص ماتریس ضرایب مسأله حمل و نقل

I - رتبه ماتریس A

فرض کنیم $m, n \geq 2$ ، پس $m+n \leq mn$ ولذا $\text{rank}(A) \leq m+n$.
$(m+n)\times(mn)$

اما از آنجائی که مجموع m سطر اول A با مجموع n سطر آخر A برابر است، پس $\text{rank}(A) < m+n$.

نشان می‌دهیم $\text{rank}(A) = m+n-1$. برای این منظور بایستی یک زیرماتریس از مرتبه $(m+n-1)\times(m+n-1)$ A پیدا کنیم که دترمینان آن ناصفر باشد.

با صرفه‌نظر کردن از سطر آخر A ، زیرماتریس A' از A را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:
$$A' = [A'_{1n}, A'_{2n}, \ldots, A'_{mn}, A'_{11}, A'_{12}, \ldots, A'_{1,n-1}]$$

که یک زیرماتریس بالا مثلثی به صورت $A' = \begin{bmatrix} I_m & Q \\ 0 & I_{n-1} \end{bmatrix}$ است،

به طوری که $\text{rank}(A') = m+n-1$ ولذا $\text{rank}(A) = m+n-1$.

حال با دانستن اینکه $\text{rank}(A) = m+n-1$ ، دو انتخاب برای ما می‌ماند:

الف - سطر آخر A را حذف کنیم که در این صورت $m+n-1$ سطر مستقل خطی خواهیم داشت. ب - یک متغیر تصنعی (x_a) به یکی از قیود (مثلاً قید $(m+n)$ام) بیافزائیم که در این صورت ماتریس جدید به صورت زیر خواهد بود:

در چنین حالتی تمامی معادلات مستقل خواهند بود. $A_{(\text{جدید})} = [A : e_{m+n}]$

II - تک کالبدی بودن ماتریس A

تعریف - ماتریس A° را تک کالبدی (unimodularity) گویند، هرگاه دترمینان هر زیرماتریس A°، برابر ۰ یا ۱± باشد.

ثابت می‌کنیم ماتریس ضرایب حمل و نقل A تک کالبدی است. اثبات به استقراء روی مرتبه زیرماتریسهای A صورت می‌گیرد. فرض کنیم A_K یک زیرماتریس $K \times K$ دلخواه از A باشد $(1 \le K \le m+n)$.

چون اعضای ماتریس A صفر یا 1 است، پس ۱ یا $\det(A_1) = 0$ و همچنین $\det(A_{m+n}) = 0$ (چرا؟). بنابراین حکم برای $K = 1, m+n$ برقرار است. حال فرض کنیم $\det(A_{K-1}) = 0$ یا ± 1 (فرض استقراء).

گوئیم در هر ستون A_K ① یا اصلاً عدد 1 وجود ندارد ② یا فقط یک عدد 1 وجود دارد ③ و یا دو عدد 1 موجود است.

حالت ① - اگر در یکی از ستونهای A_K عدد 1ی وجود نداشته باشد، واضح است که $\det(A_K) = 0$.

حالت ② - اگر در یکی از ستونهای A_K فقط یک عدد 1 وجود داشته باشد، در این صورت با بسط دترمینان A_K در این ستون، $\det(A_K) = \pm \det(A_{K-1})$.

حالت ③ اگر تمام ستونهای A_K دو عدد 1 داشته باشد، در این صورت یکی از 1ها در سطر مبدأ و دیگری در سطر مقصد قرار خواهد داشت. در این حالت چون مجموع سطرهای مبدأ با مجموع سطرهای مقصد A_K برابر است، پس سطرهای A_K

وابسته خطی است ولذا $\det(A_k) = 0$.

نتیجه - $\det(A_k) = 0$ یا ± 1 یعنی ماتریس A تک کالبدی است . ■

III - مثلثی بودن پایه

ثابت می‌کنیم هر پایه مستخرج از A را می‌توان به یک ماتریس بالا مثلثی تبدیل کرد.

برهان - فرض کنیم B پایه دلخواهی از A باشد . با توجه به خاصیت تک کالبدی بودن A ، B بایستی دارای ستونی باشد که در آن فقط یک عدد 1 موجود است (چرا؟) در غیر این صورت $\det(B) = 0$ که این تناقض است .

با جابجا نمودن سطر و ستون این عضو، خواهیم داشت :

هم‌ارز

$$B \equiv T_1 = \begin{bmatrix} 1 & q \\ 0 & B_{m+n-2} \end{bmatrix}$$

حال B_{m+n-2} را در نظر می‌گیریم . با همان استدلال قبل B_{m+n-2} بایستی دارای ستونی باشد که در آن فقط یک عدد 1 موجود است . با جابجا نمودن این عضو، داریم :

$$B_{m+n-2} \equiv \begin{bmatrix} 1 & p \\ 0 & B_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

با قرار دادن $q = (q_1, q_2)$ می‌توان نوشت :

$$B \equiv T_2 = \begin{bmatrix} 1 & q_1 & q_2 \\ 0 & 1 & p \\ 0 & 0 & B_{m+n-3} \end{bmatrix}$$

حال با ادامه این روش می‌توان B را تبدیل به یک ماتریس بالا مثلثی نمود

$$B \to T_1 \to T_2 \to \cdots \to T \leftarrow$$ ماتریس بالا مثلثی

نتیجه - فایده خاصیت مثلثی بودن پایه در بدست آوردن جوابهای اساسی از روابط $Bx_B = b$ است (چگونه؟)

با تبدیل B به ماتریس بالا مثلثی T ، خواهیم داشت : $Tx'_B = b'$

(x'_B و b' تغییر یافته بردارهای x_B ، b متناظر تغییر B به T است.)

حال با توجه به بالا مثلثی بودن ماتریس T ، به سادگی می‌توان بوسیله روش جایگذاری پسرو جوابهای اساسی را بدست آورد.

صحیح بودن جوابهای اساسی

چون تمام اعضای ماتریس پایه مسائل حمل و نقل اعداد صحیح و تمام اعضای قطری آن 1 است، اگر مقادیر عرضه (a_i ها) و تقاضا (b_j ها) صحیح باشند مقادیر متغیرهای اساسی صحیح بوده و لذا جواب بهینه صحیح است.

خواص ستونهای متناظر متغیرهای غیراساسی در جدول سیمپلکس

با توجه به اینکه جدول سیمپلکس در هر مرحله به صورت زیر است:

	x_B	x_N			
پایه	$x_1 \cdots x_m$	x_{m+1}	x_j	x_n	R.H.S
x_B	I	$B^{-1}A_{\cdot m+1}$	$B^{-1}A_{\cdot j}$ "y_j	$B^{-1}A_{\cdot n}$	$\bar{b} = B^{-1}b$
$-z$	0	$\bar{c}_{m+1}$	$\bar{c}_j$	$\bar{c}_n$	$-z^*$

اگر Y_{ij} ستون متناظر یک متغیر غیراساسی در جدول سیمپلکس مسأله حمل و نقل باشد، داریم:

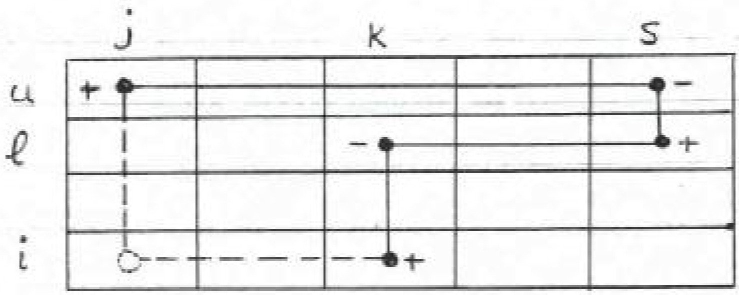
$$Y_{ij} = B^{-1}A_{ij} \qquad \text{یا} \qquad BY_{ij} = A_{ij}$$

$$\Rightarrow (Y_{ij})_k = \frac{\det B_k}{\det B} = \frac{0 \text{ یا } \pm 1}{\pm 1} = 0 \text{ یا } \pm 1$$

(با توجه به تک‌کالبدی بودن ماتریس A)

این مطلب نشان می‌دهد که A_{ij} را می‌توان به سادگی با جمع و تفریق نمودن بعضی از ستونهای پایه بدست آورد. در نمایش دادن بردار غیراساسی $A_{ij} = e_i + e_{m+j}$ برحسب بردارهای اساسی، باید بردارهائی مانند $A_{ik} = e_i + e_{m+k}$ با ضریب $+1$ و بردارهائی مانند $A_{lk} = e_l + e_{m+k}$ با ضریب -1 وجود داشته باشد که بتوان A_{ij} را به صورت ترکیبی از آنها نوشت. نمایش کلی A_{ij} می‌تواند چنین باشد:

$$A_{ij} = A_{ik} - A_{lk} + A_{ls} - A_{us} + A_{uj}$$



مشخص نمودن پایه در جدول حمل و نقل

قضیه- هر پایه در جدول حمل و نقل به صورت یک درخت گسترنده با $m+n-1$ خانه (رأس) مشخص می‌شود. بالعکس، یک درخت گسترنده با $m+n-1$ خانه همراه یک متغیر تصنعی یک پایه است.

برهان: ($\Leftarrow$) - اثبات این قسمت چند مرحله دارد.

۱) نشان می‌دهیم بردارهای پایه در جدول حمل و نقل نمی‌تواند تشکیل حلقه بدهند.
اثبات- فرض کنیم بردارهای پایه توسط خانه‌های اساسی زیر تشکیل یک حلقه بدهند:

$$(p,q),(r,q),(r,s),(u,s),(u,v),(p,v)$$

بنابراین داریم: $A_{pq}-A_{rq}+A_{rs}-A_{us}+A_{uv}-A_{pv}\overset{?}{=}0$

یعنی بردارهای پایه وابسته خطی هستند و این تناقض است. نتیجه اینکه پایه بایستی یا یک درخت باشد یا یک جنگل.

۲) ثابت می‌کنیم گراف پایه بایستی گسترنده باشد، یعنی حداقل یک خانه اساسی در هر سطر و ستونی از جدول (حمل و نقل) وجود دارد.
اثبات- فرض کنیم گراف پایه شامل خانه‌ای در سطر i ام نباشد. بنابراین در سطر i ام متغیر اساسی وجود ندارد و این مخالف فرض پایه بودن است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که گراف پایه بایستی در هر ستون دارای حداقل یک خانه باشد. بنابراین گراف پایه گسترنده است.

$[0\ 0\ 0\ 0]$ سطر i ام

پایه B

۴) نشان می‌دهیم گراف پایه مرتبط است.

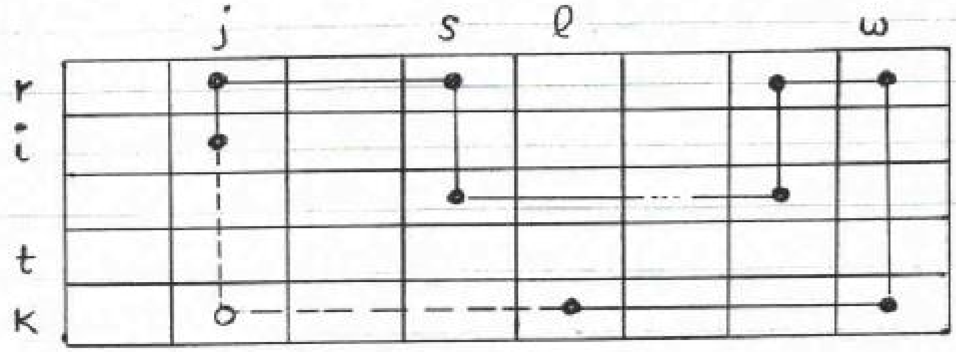
اثبات - دو خانه اساسی (i,j) و (k,l) را در جدول حمل و نقل در نظر بگیرید. اگر خانه (k,j) اساسی باشد، در این صورت دو خانه اساسی فوق توسط زنجیر $\{(i,j), (k,j), (k,l)\}$ بهم مرتبط می‌شوند. اگر خانه (k,j) غیراساسی باشد، A_{kj} را می‌توان به صورت ترکیب خطی بعضی از بردارهای پایه (مثلاً به صورت زیر) نوشت:

$$A_{kj} = A_{rj} - A_{rs} + A_{ts} - \cdots - A_{vw} + A_{kw}$$

بنابراین در این حالت، دو خانه اساسی (i,j) و (k,l) توسط زنجیر اساسی زیر بهم مرتبط می‌شوند.

$$\{(i,j), (r,j), (r,s), (t,s), \ldots, (v,w), (k,w), (k,l)\}$$

شکل زیر ملاحظه شود.



نتیجه اینکه هر دو خانه اساسی بوسیله زنجیر گراف پایه بهم مرتبط می‌شوند.

نتیجه - از قسمتهای (۱) و (۲) و (۳) می‌توان نتیجه گرفت که هر پایه در جدول حمل و نقل به صورت یک درخت گسترنده با $m+n-1$ خانه مشخص می‌شود.

برهان (⇐) - کافی است نشان دهیم که ماتریس متناظر یک درخت گسترنده، یک ماتریس از مرتبه $(m+n-1)$ بالامثلثی با اعضای قطری 1 است.

۱) در یک درخت با m رأس، حداقل یک رأس از درجه 1 وجود دارد (این رأس را رأس انتهایی می‌نامند).

اثبات - فرض کنیم درخت T رأسی از درجه 1 نداشته باشد. بنابراین:

$$\sum_{v \text{ رئوس}} d(v) \geq 2m$$

از طرفی درخت T با m رأس، $m-1$ قوس دارد، پس $\sum_{v \text{ رئوس}} d(v) = 2(m-1)$

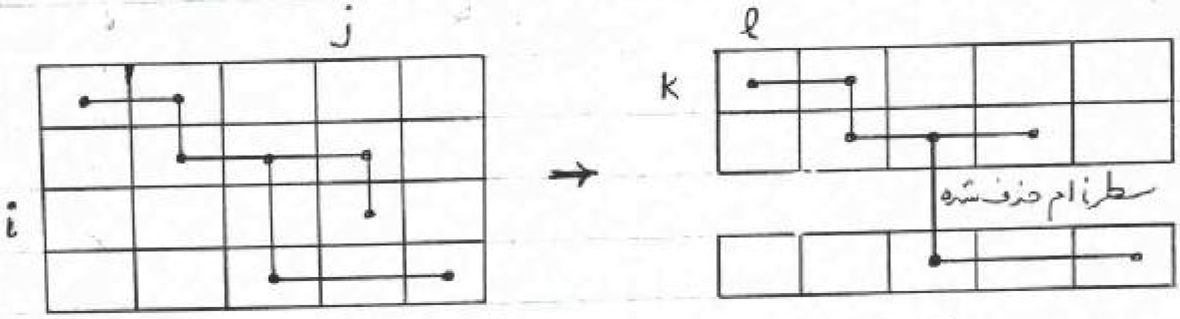
و این با رابطه بالا در تناقض است. پس درخت T حداقل یک رأس از درجه 1 دارد.

حال یک انتهای درخت را در نظر می‌گیریم. این نقطه اولاً بایستی فقط یک نقطه سطری یا یک نقطه ستونی باشد. زیرا اگر در یک سطر یا در یک ستون دو انتهای درخت وجود داشته باشد، یک حلقه تشکیل می‌شود که این خلاف فرض درخت بودن است.

فرض کنیم انتهای درخت تنها نقطه سطر i ام باشد (خانه اساسی (i, j)). در این حالت بردار $A_{ij} = e_i + e_{m+j}$ تنها بردار درخت است که در سطر i ام عضو غیرصفر دارد. با جابجا نمودن سطرها و ستونهای ماتریس برخورد درخت T که از مرتبه $(m+n-1)$ است، داریم:

$$T \rightarrow \left[\begin{array}{c|c} T_1 & q \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \rightarrow \text{سطر } i \text{ ام} \end{array}$$

T_1 ماتریس متناظر بردارهای درختی است که سطر i ام و بردار A_{ij} حذف شده است.
حال در این درخت تقلیل یافته، یک نقطه انتهائی را مشخص می‌کنیم. فرض کنیم
این نقطه پایانی در خانه (k,ℓ) باشد.



بنابراین $A_{k\ell} = e_k + e_{m+\ell}$ تنها بردار در درخت است که در سطر $(m+\ell)$ ام عضو غیرصفر دارد. حال با جابجا نمودن سطرها و ستونهای ماتریس متناظر T_1، خواهیم داشت:

$$T \rightarrow \left[\begin{array}{cc:c} T_2 & p & q_1 \\ 0 & 1 & q_2 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

با تکرار این عمل، در نهایت یک ماتریس بالا مثلثی از مرتبه $(m+n-1)$ از ماتریس T بدست می‌آید که اعضای قطری آن 1 است. بنابراین $rank(T) = m+n-1$

حال با اضافه کردن بردار تصنعی به ماتریس T یک پایه برای A تشکیل می‌شود.

سوال – چرا در مسأله حمل و نقل، مقدار متغیر تصنعی افزوده شده به پایه در هر جواب اساسی شدنی، صفر است؟

ستون متناظر متغیر تصنعی

ماتریس افزوده حمل و نقل $\leftarrow$ $\bar{A} = [A, e_{m+n}] \implies$ اگر فرض کنیم B یک پایه دلخواه $\bar{A}$ باشد، آنگاه بایستی e_{m+n} یکی از ستونهای این پایه باشد، چون در غیر این صورت B منفرد خواهد شد و این تناقض است.

ماتریس ضرایب حمل و نقل

بنابراین در هر جواب اساسی شدنی، متغیر تصنعی بایستی وجود داشته باشد. حال دستگاه زیر را در نظر بگیرید!

$$Bx_B = b \implies (x_B)_{m+n} = x_a = \frac{\det B_{m+n}}{\det B}$$

$(m+n)\times(m+n)$

این روش کمی اشکال دارد – روی آن فکر کنید!

$$\text{but} \quad B_{m+n} = \left(B_{\cdot 1}, \dots, B_{\cdot m+n-1}, b \right) \implies \det B_{m+n} = 0 \, (?)$$

b به جای ستون e_{m+n}

زیرا مجموع سطرهای عرضه و تقاضا باهم مساوی هستند.

$$\text{مجموع سطرهای عرضه} = (1, 1, \dots, 1, \sum_{i=1}^{m} a_i)$$

$$\text{مجموع سطرهای تقاضا} = (1, 1, \dots, 1, \sum_{j=1}^{n} b_j) \quad \& \quad \sum a_i = \sum b_j$$

بنابراین مقدار متغیر تصنعی در هر جواب اساسی شدنی، صفر است.

پس ضریب هزینه x_a می‌توانند دلخواه باشد و لذا برای سهولت قرار می‌دهیم $c_a = 0$

نمایش بردارهای غیراساسی برحسب بردارهای اساسی

برای نمایش یک خانه غیراساسی برحسب خانه های اساسی، حلقه ای در گراف باید پیدا می کنیم که شامل قوس متناظر خانه غیراساسی باشد. چون بردار تصنعی در نمایش بردارهای غیراساسی ظاهر نمی شود، بنابراین متغیر تصنعی همواره صفر است.

روش سیمپلکس برای مسأله حمل و نقل

توجه - مراحل کلی بکاربردن روش سیمپلکس در برنامه ریزی خطی عبارتند از:

۱- پیدا کردن یک جواب اساسی شدنی برای شروع.

۲- محاسبه مقادیر $z_j - c_j$ برای هریک از متغیرهای غیراساسی، توقف یا انتخاب ستون وارد شونده.

۳- تعیین سطر خارج شونده.

۴- بدست آوردن جواب اساسی شدنی جدید و تکرار مرحله ۲.

نشان می دهیم هریک از این مراحل را می توان مستقیماً در جدول حمل و نقل انجام داد.

(I) پیدا کردن یک جواب اساسی شدنی برای شروع.

فرض اساسی $\sum_j b_j = \sum_i a_i$

الف- روش گوشه شمال غربی

- در این روش c_{ij} ها هیچ نقشی ندارند.

- این روش در سه مرحله زیر انجام می شود تا تمامی عرضه‌ها تخصیص داده شده و تمامی تقاضاها برآورده شوند.

(i) تخصیص دادن min مانده عرضه و تقاضا به متغیرها

(ii) تعدیل کردن عرضه و تقاضا پس از تخصیص

(iii) حرکت به راست یا پایین در یک خانه

- در حالت غیر تبهگنی این روش درست $m+n-1$ مقدار مثبت x_{ij} تولید می کند.

سؤال - چرا قاعده گوشه شمال غربی یک جواب شدنی تولید می کند؟ تحویل ۱۸ اسفند

جواب - کافی است نشان دهیم گراف حاصل از روش فوق شامل حلقه نیست.

برای این منظور گوییم چون در هر مرحله از روش گوشه شمال غربی، یک واحد به اندیس متغیرهای سطری یا ستونی افزوده می گردد، امکان آن نیست که مقدار مثبتی به متغیرهای سطری یا ستونی قبل که تنها مورد به وجود آمدن حلقه است، افزوده گردد. بنابراین قاعده گوشه شمال غربی یک جواب اساسی شدنی تولید می کند.

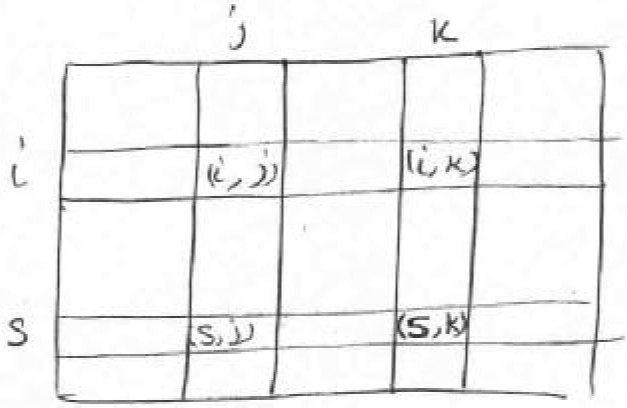
ب - روش کمترین قیمت

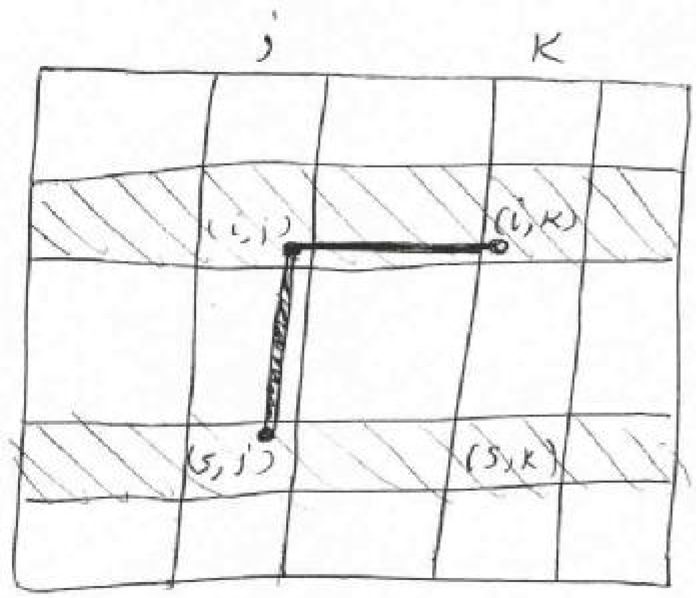
- در این روش c_{ij}ها مهمترین نقش را دارند.

- در جدول min c_{ij} را در نظر گرفته و min مقدار را به این خانه تخصیص می دهیم. با تخصیص این مقدار، یکی از قیود عرضه یا تقاضا برقرار می گردد. حال سطر یا ستون مورد نظر که قید آن صدق نموده از جدول حذف می کنیم. روش را در جدول باقیمانده تکرار می کنیم تا تمامی عرضه‌ها تخصیص و تمامی تقاضاها برآورده شوند.

سوال- چرا در روش کمترین قیمت هزینه به دور برخورد می کنیم؟

جدول سیمپلکس





روش تقریب نوگل

1- در هر سطر و ستون اختلاف دو کمترین هزینه را بدست می آوریم

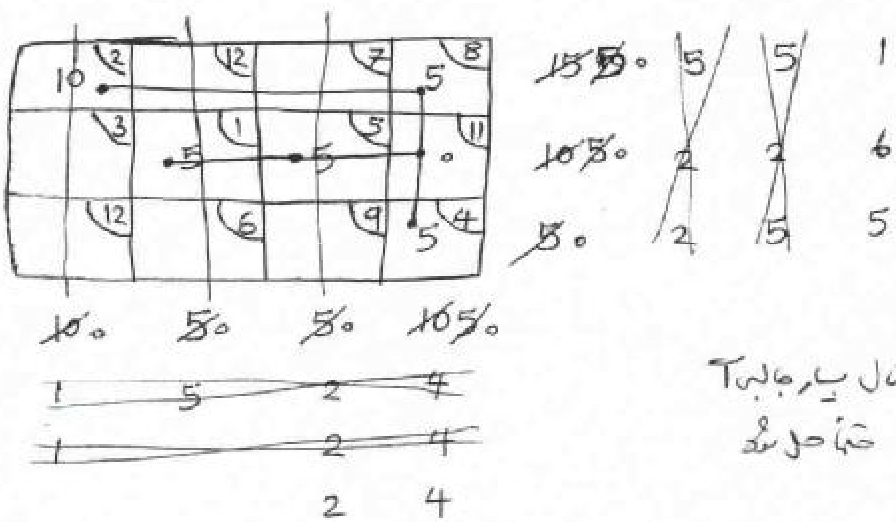
2- انتخاب سطر یا ستونی که بیشترین اختلاف را دارد

3- اختصاص دادن بیشترین مقدار به کمترین هزینه در این سطر یا ستون

روش فوگل برای بدست آوردن یک جواب پایه‌ای شدنی در مسأله‌ی حمل و نقل :

جدول حمل و نقل را در نظر می‌گیریم . در هر سطر و ستون دو عدد کوچکترین هزینه‌ها را انتخاب می‌کنیم و تفاضل این دو عدد را روبه‌روی سطر یا ستون مورد نظر در خارج از جدول می‌نویسیم . از میان این اعداد ، بزرگترین آنها را انتخاب کرده - اگر دو عدد برابر به عنوان بزرگترین موجود بود یکی را به دلخواه انتخاب می‌کنیم - و در سطر یا ستون مربوط به آن به سراغ خانه‌ای می‌رویم که دارای کمترین هزینه است . در خانه‌ی مورد نظر عرضه و تقاضا را تعدیل می‌کنیم . اگر عرضه صفر شد سطر مربوط را حذف و اگر تقاضا صفر شد ستون مربوط به آن را حذف می‌کنیم . روند فوق را برای جدول جدید ادامه داده تا جاییکه به تنها یک سطر یا یک ستون می‌رسیم . الگوریتم متوقف می‌شود و برای هر خانه در سطر یا ستون باقیمانده هنگام کردن (تعدیل عرضه و تقاضا) را انجام داده تا به خانه‌ی پایانی می‌رسیم . به یک جواب پایه‌ای شدنی در پایان این روش رسیده‌ایم .

* اثبات اینکه این روش ما را به یک جواب پایه‌ای شدنی می‌رساند مربوط به درخت حاصل و ویژگیهای آن است .



مثال بسیار جالب آن
حاصل شد

$$c_{k\ell} = \min c_{ij} \rightarrow x_{k\ell} = \min\{\hat{a}_k, \hat{b}_\ell\}$$

مقدار تخصیص داده شده

سؤال - چرا روش کمترین قیمت یک جواب اساسی شدنی تولید می‌کند؟

(II) محاسبه $z_{ij} - c_{ij}$ برای خانه‌های غیراساسی

دو روش برای محاسبه $z_{ij} - c_{ij}$ ها وجود دارد:

الف - روش حلقه

در این روش چنین عمل می‌کنیم:

$$z_{ij} - c_{ij} = wA_{ij} - c_{ij} = c_B B^{-1} A_{ij} - c_{ij} = c_B y_{ij} - c_{ij}$$

چون مؤلفه‌های y_{ij} اعداد ± 1 یا ۰ هستند، پس $c_B y_{ij}$ با جمع یا کم کردن بعضی از ضرایب قیمت متغیرهای اساسی بدست می‌آید. به طور مثال داریم:

$$z_{ij} - c_{ij} = (c_{uj} - c_{us} + c_{\ell s} - c_{\ell k} + c_{ik}) - c_{ij}$$

توجه شود که بردار y_{ij} با تشکیل حلقه‌ای از خانه غیراساسی (i,j) و بعضی از خانه‌های اساسی محاسبه می‌شود. از این رو روش فوق را گاهی روش حلقه می‌نامند.

ب - روش متغیرهای دوال

در این روش، داریم:

$$z_{ij} - c_{ij} = wA_{ij} - c_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$$

که در آن $w = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n)$ بردار متغیرهای دوال بوده و

$$A_{ij} = e_i + e_{m+j}$$

حال برای محاسبه بردار دوال w، داریم: $\quad w = C_B B^{-1}$

$$\Rightarrow WB = C_B \quad (*) \quad \text{where} \quad C_B = (c_{pq}, \ldots, c_{st}, c_a)$$

$$B = [A_{pq}, \ldots, A_{st}, e_{m+n}]$$

چون مقدار متغیر تصنعی در هر جواب اساسی شدنی، صفر است، پس مقدار c_a می‌تواند دلخواه باشد. برای سهولت قرار می‌دهیم $c_a = 0$. از رابطه (*) نتیجه می‌شود:

$$\begin{cases} u_p + v_q = c_{pq} \\ \quad \vdots \\ u_s + v_t = c_{st} \\ v_n = 0 \end{cases} \Rightarrow W = (u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_n) \text{ بدست می‌آید}$$

(III) مشخص کردن بردار (متغیر) خارج شونده

فرض کنیم بردار وارد شونده A_{rs} باشد: پس $A_{rs} = BY_{rs}$. بنابراین در قاعدهٔ min نسبت جدول سیمپلکس، مقادیر متغیرهای اساسی فقط به مؤلفه‌های مثبت Y_{rs}، یعنی 1+ ها، تقسیم می‌شوند. از این رو قاعدهٔ min چنین خواهد بود:

c_j	x_{rs}	R.H.S
x_B	Y_{rs}	$\bar{b}$
	$z_{rs} - c_{rs}$	

$\Delta = \min \{ \hat{x}_{ij} :$ برای خانه‌های اساسی (i,j) که در دور شامل خانه غیراساسی (r,s) ضریب 1+ دارند. $\}$

$\hat{x}_{ij}$: مقدار x_{ij} در جواب فعلی

با محاسبه Δ ، مقادیر متغیرهای اساسی به صورت زیر تعدیل می شوند :

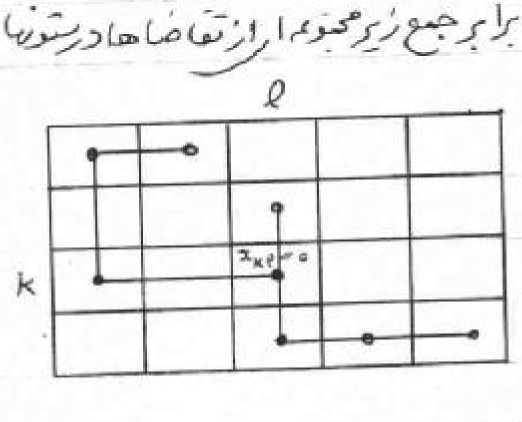
$$
\begin{cases}
x_{ij} = \hat{x}_{ij} - \Delta & \text{برای خانه های اساسی (زوایا) که در حلقه ضریب } +1 \text{ دارند.} \\
x_{ij} = \hat{x}_{ij} + \Delta & \text{" " " " } -1 \text{ "} \\
x_{ij} = \hat{x}_{ij} & \text{" " " شرکت نداشته اند.}
\end{cases}
$$

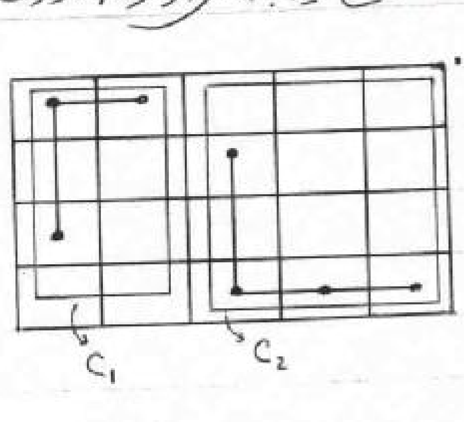
شرط لازم برای تبهگنی در مسأله حمل و نقل

فرض کنیم در تکراری از الگوریتم حمل و نقل، یک جواب اساسی شدنی تبهگن بدست بیاید.
با حذف یکی از خانه های تبهگنی، درخت متناظر این پایه به چندین مؤلفه تجزیه می شود.
با جمع قیود عرضه و تقاضا روی متغیرهای یکی از این مؤلفه ها (مثلاً C_1) داریم:

$$\sum_{C_1} x_{ij} = \sum_{C_1} a_i \quad \& \quad \sum_{C_1} x_{ij} = \sum_{C_1} b_j$$

بنابراین $\sum_{C_1} a_i = \sum_{C_1} b_j$. پس شرط لازم و کافی برای وجود تبهگنی آن است که جمع زیرمجموعه ای از عرضه های سطرها برابر جمع زیرمجموعه ای از تقاضاهای ستونها باشد.





مسأله واگذار نمودن (Assignment Problem)

بیان مسأله -

m کار (کارگر) قرار است به m ماشین واگذار شود

کار i ($i=1$ To m) وقتی به ماشین j ($j=1$ To m) واگذار شود، هزینه‌ای برابر c_{ij} دارد. هدف، واگذار کردن کارها به ماشین‌هاست (هر کار به یک ماشین و هر ماشین فقط یک کار انجام می‌دهد) به طوری که هزینه کلی min شود

راههای ممکن واگذار کردن i به ماشین j $(i,j=1$ To $m)$ $= m!$

فرموله کردن مسأله واگذاری به صورت یک LP -

با تعریف متغیر تصمیم:

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & \text{اگر کار } i \text{ به ماشین } j \text{ واگذار شود}\\ 0 & \text{در غیر این صورت}\end{cases}$$

خواهیم داشت:

$$\min \ z=\sum_i\sum_j c_{ij}x_{ij}$$

s.t

$$\begin{cases}\sum_j x_{ij}=1 & \text{(چون هر کار توسط یک ماشین انجام می‌شود)}\\ \sum_i x_{ij}=1 & \text{(چون هر ماشین فقط یک کار انجام می‌دهد)}\\ x_{ij}=0 \text{ یا } 1 \quad (i,j=1 \text{ To } m) & (*)\end{cases}$$

مسأله فوق را می‌توان به صورت زیر تبدیل نمود (چرا؟)

$$(\mathrm{II})\qquad \min\ z=cx \qquad \text{s.t}\begin{cases}Ax=1\\ x\geq 0\end{cases} \qquad \text{where } A=\begin{bmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\\ \hdashline I & I_m & \cdots & I\end{bmatrix}_{2m\times m^2} \longrightarrow \text{ماتریس تک کالایی}$$

با توجه به تک کالیدی بودن ماتریس A، اگر B پایه بهینه مسأله (II) باشد، آنگاه اعضای B^{-1} اعداد 1± یا 0 بوده و در نتیجه جواب بهینه $B^{-1}1$ مقادیر 1± یا 0 هستند که در خاصیت (*) صدق می‌کند. بنابراین با توجه به ساختمان خاص مسأله، می‌توان بجای قیدهای 1 یا 0 $=x_{ij}$ قیدهای x_{ij} را جایگزین کرد.

توجه - ① مسأله واگذاری حالت خاصی از مسأله حمل و نقل است که در آن a ها و b ها 1 هستند و بالعکس هر مسأله حمل و نقل را می‌توان به یک مسأله واگذاری تبدیل نمود (چگونه). بنابراین این دو مسأله معادل هم هستند.

② مسأله واگذاری دارای $2m-1=m+m-1$ قید مستقل است ($\text{rank}(A)=2m-1$)

③ از $2m-1$ متغیر اساسی در هر جواب اساسی شدنی، تنها m متغیر مثبت (برابر 1) و $(m-1)$ متغیر دیگر صفر هستند. بنابراین مسأله حالت تبهگنی شدیدی دارد.

دوال مسأله واگذاری

$$\max\ W=\sum_i u_i+\sum_j v_j$$

s.t

$$\begin{cases} u_i+v_j\le c_{ij} & (i,j=1\ \text{To}\ m)\\ u_i, v_j\ \text{آزاد} \end{cases}$$

شرایط مکمل زائد برای این مسأله چنین است :

$$(c_{ij}-u_i-v_j)x_{ij}=0 \quad (i,j=1\ \text{To}\ m)$$

یک جواب شدنی برای مسأله دوال

$\hat{u}_i=\min\limits_j\{c_{ij}\}\ \ (i=1\ \text{To}\ m)\rightarrow($ie: c_{ij} ها در سطر iام min$)$

$\hat{v}_j=\min\{c_{ij}-\hat{u}_i\}\ \ (j=1\ \text{To}\ m)\rightarrow($ie: $(c_{ij}-\hat{u}_i)$ ها در ستون jام min$)$

ماتریس تقلیل یافته

- ماتریس تقلیل یافته از ضرایب قیمت که در آن بجای c_{ij} ، $\hat{c}_{ij} = c_{ij} - \hat{u}_i - \hat{v}_j$ قرار گرفته تشکیل شده است.

- ماتریس تقلیل یافته در هر سطر (ستون) حداقل یک عضو صفر دارد.

- اگر بتوانیم در ماتریس تقلیل یافته، یک جواب شدنی از x_{ij} ها چنان پیدا کنیم که مقدار آنها در خانه‌های (i,j) ای که $\hat{c}_{ij} = 0$ ، برابر 1 باشد، در نتیجه با توجه به شرایط مکمل زائد، جواب حاصل بهینه است.

- با توجه به قیود مسأله واگذاری، یک جواب شدنی مسأله، دقیقاً m متغیر برابر 1 دارد و بقیه متغیرها صفر هستند.

قضیه - max تعداد خانه‌های صفر مستقل خطی در یک ماتریس تقلیل یافته مسأله واگذاری برابر است با min تعداد خطوطی که تمام صفرها را در ماتریس تقلیل یافته می‌پوشاند.

تعدیل ماتریس تقلیل یافته

اگر نتوانیم برای مسأله واگذاری یک جواب بهینه بدست بیاوریم، در این صورت ماتریس پوشانده شده (ماتریس تقلیل یافته‌ای که بوسیله حداقل تعداد خطوط، خانه‌های صفر پوشانده شده است) را در نظر بگیرید.

فرض کنیم K تعداد حداقل خطوطی باشد که خانه‌های صفر را پوشانده.

همچنین فرض کنیم:

① $S_r = \{i_1, \dots, i_p\} \rightarrow$ مجموعه سطرهایی که پوشانده نشده‌اند

② $S_c = \{j_1, \dots, j_q\} \rightarrow$ مجموعه ستونهایی که پوشانده نشده‌اند

③ $\bar{S}_r = M - S_r \quad , \quad \bar{S}_c = M - S_c \quad$ where $M = \{1, 2, \dots, m\}$

$$(\Rightarrow K = (m-p) + (m-q) = 2m - (p+q))$$

④ $C_0 = \min\limits_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}} \{\hat{c}_{ij}\} > 0$ (min C_0 اعضای پوشانده نشده ماتریس تقلیل یافته است)

ثابت می‌شود، مقادیر $\bar{u}_i , \bar{v}_j$ که به صورت زیر تعریف شده‌اند، یک جواب شدنی برای مسأله دوال هستند

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \hat{u}_i + c_0 & i \in S_r \\ \bar{u}_i = \hat{u}_i & i \in \bar{S}_r \\ \bar{v}_j = \hat{v}_j & j \in S_c \\ \bar{v}_j = \hat{v}_j - c_0 & j \in \bar{S}_c \end{cases}$$

کافی است ثابت شود که $\bar{u}_i + \bar{v}_j \le c_{ij}$ $(i,j = 1 \text{ To } m)$.

در ماتریس تقلیل یافته این مطلب معادل است با :

$\left[\begin{array}{c}\text{کم کردن } c_0 \text{ از اعضای پوشانده نشده} \\ \text{و افزودن } c_0 \text{ به اعضائی که دو بار به وسیله خطوط پوشانده شده‌اند}\end{array}\right]$

با این عمل، اعضای ماتریس تقلیل یافته جدید، نامنفی هستند، زیرا :

$$c_0 = \min_{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}} \{ \hat{c}_{ij} \} > 0 \rightarrow c_0 \le \hat{c}_{ij} \quad (i \in S_r , j \in S_c)$$

$$\underset{\substack{i \in S_r \\ j \in S_c}}{\hat{c}_{ij}\,\text{جدید}} = \hat{c}_{ij}\,\text{قدیم} - c_0 \ge 0 \quad \& \quad \underset{\substack{i \in \bar{S}_r \\ j \in \bar{S}_c}}{\hat{c}_{ij}\,\text{جدید}} = \hat{c}_{ij}\,\text{قدیم} + c_0 \ge 0$$

چرا الگوریتم مجارستانی (برای مسأله واگذاری) در تعداد متناهی از مراحل همگرا است ؟

اگر نتوانیم یک جواب شدنی از x_{ij} های برابر 1 در بین خانه های با اعضای صفر در ماتریس تقلیل یافته پیدا کنیم، با رسم خطوط و تعدیل ماتریس تقلیل یافته، کار را ادامه می‌دهیم.

این کار در تعداد متناهی مراحل ما را به جواب بهینه می‌رساند (چرا؟)

اثبات - داریم :

$$\sum_i \sum_j \hat{c}_{ij} - \sum_i \sum_j \bar{c}_{ij} = \sum_i \sum_j (\hat{c}_{ij} - \bar{c}_{ij}) =$$

$$\overbrace{\sum_{(S_r,S_c)} (\hat{c}_{ij} - \bar{c}_{ij})}^{\sum c_0} + \overbrace{\sum_{(S_r,\bar{S}_c)} (\hat{c}_{ij} - \bar{c}_{ij})}^{\text{صفر}} + \overbrace{\sum_{(\bar{S}_r,S_c)} (\hat{c}_{ij} - \bar{c}_{ij})}^{\text{صفر}} + \overbrace{\sum_{(\bar{S}_r,\bar{S}_c)} (\hat{c}_{ij} - \bar{c}_{ij})}^{\sum(-c_0)}$$

در اینجا ثابت می‌کنیم $\bar{u}$ و $\bar{v}$ ای که به صورت زیر تعریف می‌شود یک جواب برای مسأله دوال است.

$$\begin{cases} \bar{u}_i = \hat{u}_i + c_0 & i \in S_r \\ \bar{u}_i = \hat{u}_i & i \in \bar{S}_r \\ \bar{v}_j = \hat{v}_j & j \in S_c \\ \bar{v}_j = \hat{v}_j - c_0 & j \in \bar{S}_c \end{cases}$$

$$c_0 = \min\{\hat{c}_{ij}\} \qquad \hat{c}_{ij} = c_{ij} - \hat{u}_i - \hat{v}_j$$

① IF $i \in S_r , j \in S_c$

$$\Rightarrow \bar{u}_i + \bar{v}_j = \hat{u}_i + c_0 + \hat{v}_j \leq \hat{u}_i + \hat{c}_{ij} + \hat{v}_j = c_{ij}$$

② IF $i \in S_r , j \in \bar{S}_c$

$$\Rightarrow \bar{u}_i + \bar{v}_j = \hat{u}_i + c_0 + \hat{v}_j - c_0 = \hat{u}_i + \hat{v}_j \leq c_{ij}$$

③ IF $i \in \bar{S}_r , j \in \bar{S}_c$ $\qquad c_0 > 0$

$$\Rightarrow \bar{u}_i + \bar{v}_j = \hat{u}_i + \hat{v}_j - c_0 < \hat{u}_i + \hat{v}_j \leq c_{ij}$$

④ IF $i \in \bar{S}_r , j \in S_c$

$$\Rightarrow \bar{u}_i + \bar{v}_j = \hat{u}_i + \hat{v}_j \leq c_{ij}$$

مهم - در ماتریس تقلیل یافته این مطلب معادل است با کسر نمودن عدد c_0 از اعضای سطرهای پوشیده نشده و افزودن c_0 به اعضای ستونهای پوشیده شده

$$= \sum_{(S_r, S_c)} c_0 + \sum_{(\bar{S}_r, \bar{S}_c)} (-c_0) = pq\,c_0 - (m-p)(m-q)\,c_0 = m\underbrace{(p+q-m)}_{m-K}\,c_0$$

$$\Rightarrow \sum_i \sum_j \hat{c}_{ij} - \sum_i \sum_j \bar{c}_{ij} = m(m-K)\,c_0 \rightarrow$$ عدد صحیح مثبت (اگر c ها صحیح باشند)

که در آن K = حداقل تعداد سطرها و ستونهای پوشانده شده = max تعداد خانه‌های صفر مستقل

در اینجا $K<m$، زیرا در غیر این صورت در آخرین تکرار جواب بهینه، داریم •

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_i \sum_j \hat{c}_{ij}}_{\text{مجموع اعضای ماتریس تقلیل یافته قدیم ما}} > \sum_i \sum_j \bar{c}_{ij} \rightarrow$$ مجموع اعضای ماتریس تقلیل یافته جدید

$$\begin{cases} \bar{c}_{ij} = c_{ij} - \bar{u}_i - \bar{v}_j \\ \hat{c}_{ij} = c_{ij} - \hat{u}_i - \hat{v}_j \end{cases}$$

حال چون اعضای ماتریس تقلیل یافته همواره نامنفی بوده و از مجموع اعضای ماتریس هر دفعه یک عدد صحیح مثبت کم می‌شود، پس الگوریتم مجارستانی در تعداد متناهی از مراحل متوقف شده و یک جواب بهینه را بدست می‌دهد (زیرا جواب بدست آمده در شرایط مکمل زائد صدق می‌کند).

* شرط پایانی الگوریتم مجارستانی این است که c_{ij} ها اعداد صحیح باشند.

خلاصهٔ الگوریتم مجارستانی برای مسأله واگذاری

مرحله شروع - از هر سطر ماتریس قیمت min عضو را از اعضای آن کم کرده و در ماتریس حاصل، min عضو هر ستون را از اعضای آن ستون کم می‌کنیم. ماتریس حاصل، ماتریس تقلیل یافته است.

مرحله اصلی - ① min تعداد خطوطی را رسم کنید که اعضای صفر سطرها و ستونها را بپوشاند (در ماتریس تقلیل یافته). اگر این تعداد، m باشد، جواب بهینه است. در غیر این صورت به مرحله ② بروید.

② بین اعضای پوشیده نشده، min عضو را انتخاب کرده (c_0)، این عضو را از اعضای پوشانده نشدهٔ ماتریس تقلیل یافته کم کنید و به اعضای دوبار پوشیده شده این عضو را (c_0) اضافه نمائید و سپس به مرحله ① برگردید.

بازنویسی در روز پنجشنبه ۷۵/۳/۲۱
ساعت 2.15 بامداد به انجام رسیده
سعید محرابیان

سؤال - چرا مقدار متغیر تصنعی در هر جواب شدنی مسأله حمل و نقل صفر است؟

جواب - با توجه به ماتریس ضرائب حمل و نقل داریم:

این سطرها را در (-1) ضرب می‌کنیم و سپس با n سطر بعدی جمع می‌کنیم

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & & & & 0 \\ & 1 & & & \vdots \\ & & \ddots & & \\ & & & 1 & 0 \\ \hline I & I & \cdots & I & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x \\ \\ x_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i \text{ ها} \\ \hline b_j \text{ ها} \end{bmatrix}$$

e_{m+n} ستون

$$\Rightarrow (0+\dots+0+x_a) = \sum_j b_j - \sum_i a_i$$

$$\Rightarrow \boxed{x_a = 0}$$