
بسم الله الرحمن الرحیم

آمار
واحتمالات

بسمه تعالی

با سلام و احترام، با توجه به شیوع بیماری منحوس و تعطیلی کلاس های درسی در این اندک فرصت از مطالب مرتبط به درس ریاضی۲ را آمار به صورت ساده و خلاصه عرضه شده تا عزیزان آمادگی لازم برای ادامه این درس به صورت حضوری و مجازی بعد عید را داشته باشند. قبلاً و قلباً از خداوند منان برای عزیزان و کادر اداری دانشگاه آرزوی سلامتی و مصونیت را خواستارم.

مهدی رحیمی

احتمال) آزمایش تصادفی: عملی که در حالت عادی قابل تکرار باشد و حدود تمام حالات ممکن قابل حدس زدن است ولی به صورت قطعی نمی‌توان گفت کدام حالت اتفاق می‌افتد.

مانند ریختن یک تاس سالم یا پرتاب یک سکه‌ی سالم.

فضای نمونه‌ای: اگر تعداد تمام حالات یک آزمایش تصادفی در یک مجموعه‌ای به اسم S قرار گرفته شود این مجموعه فضای نمونه‌ای است مانند فضای نمونه‌ای در پرتاب یک تاس سالم

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

پیشامد تصادفی: هر زیر مجموعه از فضای نمونه‌ای یک پیشامد تصادفی است. توجه می‌کنیم که پیشامدهای ϕ تهی و خود S دو پیشامد از S هستند که اولی را غیرممکن و دوم را حتمی گوییم.

مثال) فضای نمونه‌ای را در ریختن دو سکه‌ی سالم بنویسید.

حل) هر گاه خط را با T، شیر را با H اسم گذاری کنیم داریم:

$$S = \{HH, HT, TH, TT\}$$

توجه می‌کنیم که TH به این معنی است که اول خط و دوم شیر ظاهر شود...

تمرین: فضای نمونه‌ای را در ریختن سه سکه‌ی سالم و دو تاس سالم بنویسید.

□ هر پیشامد تک عضوی از فضای نمونه‌ای را پیشامد ساده گوییم.

□ هرگاه پیشامدهای ساده از یک آزمایش تصادفی هم شانس باشند، برای محاسبه‌ی احتمال وقوع پیشامد A به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

تعداد اعضای A

احتمال وقوع پیشامد A

تعداد اعضای S

مثال) در ریختن دو سکه‌ی سالم احتمال اینکه دو بار شیر ظاهر شود را حساب کنید.

حل

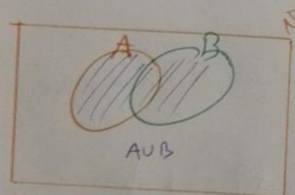
فضای نمونه‌ای $S = \{HH, HT, TH, TT\} \Rightarrow n(S) = 4$ (تعداد اعضای S)

پیشامد ۲ بار ظاهر شدن شیر $A = \{HH\} \Rightarrow n(A) = 1$ (تعداد اعضای A)

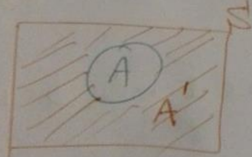
$$\Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{1}{4}$$

تمرین: در ریختن دو تاس سالم احتمال آنرا حساب کنید که مجموع اعداد ظاهر شده هفت باشد.

اعمال جبری روی پیشامدها: هرگاه A, B دو پیشامد تصادفی از فضای نمونه‌ای S باشند آنگاه:



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$



اگر A' متمم A باشد

$$P(A') = 1 - P(A)$$

مثال) در یک سازمان $\frac{۳}{۵}$ از کارمندان مرد و $\frac{۲}{۳}$ از کارمندان دارای سن کمتر از ۲۵ سال هستند. همچنین $\frac{۱}{۸}$ از کارمندان مرد و دارای سن کمتر از ۲۵ سال باشند احتمال آنرا حساب کنید که کارمندان مرد باشد یا سن کمتر از ۲۵ سال داشته باشند.

حل)

$$\begin{cases} \underbrace{P(A)}_{\text{مرد}} = \frac{3}{5} , \quad \underbrace{P(B)}_{\text{کمتر از ۲۵ سال}} = \frac{2}{3} \\ \underbrace{P(A \cap B)}_{\text{مرد و سن کمتر از ۲۵ سال}} = \frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underbrace{P(A \cup B)}_{\text{احتمال اینکه مرد یا سن کمتر از ۲۵ سال}} = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{3} + \frac{3}{5} - \frac{1}{8} = \frac{80 + 72 - 15}{120}$$

احتمال شرطی: هرگاه در محاسبه‌ی احتمال پیشامد A یک شرط اضافی هم داده شده باشد و بخواهیم احتمال A را با توجه به این شرط B محاسبه کنیم آنرا احتمال A به شرط B گوییم و به صورت زیر محاسبه می‌کنیم:

$$\underbrace{P(A|B)}_{\text{احتمال A به شرط B}} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

46) در ریختن دو تاس سالم احتمال آن را حساب کنید که عددهای ظاهر شده دارای مجموع شش باشد به شرطی که بدانیم اعداد رو شده زوج هستند.

حل)

$$S=\{(1,1),(1,2),(1,3),\dots,(1,6)$$
$$(2,1)(2,2),\dots,(2,6)$$
$$\vdots$$
$$(6,1)(6,2),\dots(6,6)\} \Rightarrow \underset{\text{تعداد اعضای S}}{n(S)}=36$$

$$A=\{(1,5)(2,4)(3,3)(4,2)(5,1)\}$$ مجموع اعداد شش باشد

$$B=\{(2,2)(2,4)(2,6),(4,2)(4,4)(4,6),(6,2)(6,4)(6,2)\}$$ اعداد زوج باشد

$$\Rightarrow n(B)=9 \qquad \Rightarrow A\cap B=\{(2,4),(4,2)\}$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{9}{36}}=\frac{2}{9}$$

متغیر تصادفی: هرگاه تابع X به هر عضو از فضای نمونه‌ای یک عدد حقیقی نسبت دهد این تابع را متغیر تصادفی گوییم به عنوان نمونه هرگاه در پرتاب سه سکه سالم X تعداد خط‌ها باشد در این صورت X می‌تواند مقادیر 0، 1، 2، 3 را اختیار کند

$$S=\{\underset{0}{HHH},\underset{1}{HHT},\underset{1}{HTH},\underset{1}{THH},\underset{2}{HTT},\underset{2}{THT},\underset{2}{TTH},\underset{3}{TTT}\}$$

$$X: 0,1,2,3$$

توجه می‌کنیم که منظور از $f(0)$ یعنی احتمال اینکه X برابر صفر باشد

$$f(0)=P(X=0)=\frac{1}{8}$$ در یک حالت X صفر است پس:

$$f(1)=P(X=1)=\frac{3}{8}$$ در سه حالت X یک است لذا:

$$f(2)=P(X=2)=\frac{3}{8}$$

$$f(3)=P(X=3)=\frac{1}{8}$$

اگر احتمال های بدست آمده را در یک جدول بنویسیم جدول حاصل شده را جدول احتمال گوییم

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

تابع f در مثال بالا یک تابع احتمال است به شرطی که به ازای هر x متعلق به X، $f(x)$ عددی بزرگتر مساوی صفر باشد، اینکه مجموع تمام $f(x)$ ها مساوی یک است.

در مثال بالا: $\frac{1}{8}+\frac{3}{8}+\frac{3}{8}+\frac{1}{8}=\frac{8}{8}=1$

مثال) در پرتاب دو تاس سالم هرگاه X مجموع عددهای ظاهر شده باشد احتمال های زیر را می‌یابیم.

$p(X=7)$ و $p(X=4)$

حل) $X=7$ یعنی پیشامدی که مجموع عددها هفت است $A=\{(2,5)(5,2)(3,4)(4,3)(1,6)(6,1)\}$

$$\Rightarrow p(X=7)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

$p(X=4)=$ تمرین

امید ریاضی: به عنوان مثال برای جدول احتمال

x	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

اگر بخواهیم امید X یا همان $E(X)$ را حساب کنیم هر عدد بالای جدول را به احتمال مربوطه ضرب خواهیم کرد و نهایتاً مجموع آنها را حساب می‌کنیم.

$$E(X)=\left(0\times\frac{1}{8}\right)+\left(1\times\frac{3}{8}\right)+\left(2\times\frac{3}{8}\right)+\left(3\times\frac{1}{8}\right)$$

$$=0+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

همچنین برای محاسبه $E(X^2)$ توان دوم هر عدد را با احتمال مربوطه ضرب خواهیم کرد یعنی

$$E(X^2)=(0^2\times\frac{1}{8})+(1^2\times\frac{3}{8})+(2^2\times\frac{3}{8})+(3^2\times\frac{1}{8})=\,?$$

$$=0+\frac{3}{8}+\frac{12}{8}+\frac{9}{8}=\frac{24}{8}=3$$

همچنین برای محاسبه $E(5X)$ یا $E(3X-2)$ چنین عمل می‌کنیم. البته این روابط را می‌توان به صورت زیر نیز محاسبه کرد:

$$E(3X-2)=3E(X)-2$$

$$=(3\times\frac{3}{2})-2=\frac{9}{2}-2=\frac{5}{2}$$

$$E(5X)=5E(X)=5\times\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$$

در مثال بالا به وضوح دیده می‌شود که $E(X^2)$ با $E(X)^2$ مختلف است. اختلاف این دو همان $Var(X)$ یا واریانس X است. به عنوان نمونه در مثال بالا

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2$$

$$=3-(\frac{3}{2})^2=3-\frac{9}{4}=\frac{12-9}{4}=\frac{3}{4}$$

مثال) برای جدول مقابل $E(X)$، $E(X^2)$، $E(X-4)$، $Var(X)$ را بیابید.

x	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

$$\begin{cases} E(X)=(1\times\frac{1}{4})+(2\times\frac{2}{4})+(3\times\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{4}{4}+\frac{3}{4}=\frac{8}{4}=2 \\ E(X^2)=(1^2\times\frac{1}{4})+(2^2\times\frac{2}{4})+(3^2\times\frac{1}{4})=\frac{1}{4}+\frac{8}{4}+\frac{9}{4}=\frac{18}{4}=\frac{9}{2} \\ E(X-4)=((1-4)\frac{1}{4})+((2-4)\frac{2}{4})+((3-4)\times\frac{1}{4})=\,? \\ Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{9}{2}-2^2=\frac{9}{2}-4=\frac{9-8}{2}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

جدول احتمال توأم X و Y: جدولی مانند جدول زیر را فرض کنید.

y \ x	0	1	2	3
0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$	0
1	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

عدد $\frac{1}{8}$ که دور آن خط کشیده شده است عدد مربوط به سطر اول و ستون دوم می باشد منظور از این عدد یعنی احتمال اینکه $X=2$ و $Y=0$ باشد یعنی

$$f(2,0)=P(X=2,\ Y=0)=\frac{1}{8}$$

چنین جدولی، جدول احتمال توأم X و Y است به شرطی که همه احتمال ها بزرگتر مساوی صفر باشد و مجموع احتمال ها یک باشد. در مثال بالا اگر بخواهیم $P(X+Y\leq 1)$ را حساب کنیم داریم:

$$P(X+Y\leq 1)=P(X+Y=1)+P(X+Y=0)$$
$$=P(X=0,Y=1)+P(X=1,Y=0)+P(X=0,Y=0)$$
$$=0+\frac{2}{8}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$$

هرگاه اعداد مربوط به یک سطر را با هم جمع کنیم توزیع حاشیه ای برای Y حاصل خواهد شد.

و هرگاه اعداد مربوط به یک ستون را با هم جمع کنیم توزیع حاشیه ای X حاصل خواهد شد.

□ در مثال بالا توزیع حاشیه ای را حساب کنید.

y \ x	0	1	2	3	
0	$\frac{1}{8}$ +	$\frac{2}{8}$ +	$\frac{1}{8}$ +	0	$\frac{4}{8}$
1	0 +	$\frac{1}{8}$ +	$\frac{2}{8}$ +	$\frac{1}{8}$	$\frac{4}{8}$
	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	

x	0	1	2	3
f(x)	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

y	0	1
f(y)	$\frac{4}{8}$	$\frac{4}{8}$

از روی جدول احتمال توأم توزیع حاشیه‌ای برای X و Y را حساب کرده‌ایم البته از روی این جدول می‌توان $E(X)$, $E(Y)$ را حساب کرد.

$$\begin{cases} E(X) = (0\times\frac{1}{8}) + (1\times\frac{3}{8}) + (2\times\frac{3}{8}) + (3\times\frac{1}{8}) = 0+\frac{3}{8}+\frac{6}{8}+\frac{3}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ E(Y) = (0\times\frac{4}{8}) + (1\times\frac{4}{8}) = \frac{4}{8} \end{cases}$$

از جدول احتمال توأم مثال قبلی می‌توان پارامتر یا متغیر تصادفی جدیدی مانند XY یعنی X ضرب در Y تعریف کرد. XY مقدارهای $0,1,2,3$ را اختیار می‌کند به عنوان نمونه XY در مکان‌هایی 3 است که X برابر 1 و Y برابر 3 باشد

$$p(XY=3) = p(X=1, Y=3) = f(1,3) = \frac{1}{8}$$

$$p(XY=0) = f(0,1) + f(0,2) + f(0,0) + f(0,3) + f(1,0)$$
$$= \frac{1}{8} + \frac{2}{8} + \frac{1}{8} + 0 + 0 = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$p(XY=1) = p(X=1, Y=1) = \frac{1}{8}$$

$$p(XY=2) = p(X=2, Y=1) = \frac{2}{8}$$

از روی اعداد به دست آمده می‌توان جدولی برای XY رسم کرد.

$\Rightarrow$

xy	0	1	2	3
$f(xy)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{8}$

در نهایت با آن می‌توان $E(XY)$ را حساب کرد.

$$E(XY) = (0\times\frac{1}{2}) + (1\times\frac{1}{8}) + (2\times\frac{2}{8}) + (3\times\frac{1}{8})$$
$$= 0 + \frac{1}{8} + \frac{4}{8} + \frac{3}{8} = \frac{8}{8} = 1$$

کوواریانس X,Y: با استفاده از جدول احتمال توأم X و Y می‌توان کوواریانس X و Y را محاسبه کرد. با استفاده از رابطه‌ی زیر:

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

مثال) در مثال قبل کوواریانس X,Y را محاسبه کنید.

$$
\begin{aligned}
Cov(X,Y) &= E(XY) - E(X)E(Y) \\
&= 1 - \left(\frac{3}{2} \times \frac{4}{8}\right) \\
&= 1 - \frac{12}{16} = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$