
بسم الله الرحمن الرحيم

ریاضی عمومی ۲

بسمه تعالی

با سلام و احترام، با توجه به شیوع بیماری منحوس و تعطیلی کلاس های درسی در این اندک قسمتی از مطالب مرتبط با درس ریاضی ۱ و ۲ و آمار به صورت ساده و خلاصه عرضه شده تا عزیزان آمادگی لازم برای ادامه این درس به صورت حضوری و مجازی بعد عید را داشته باشند. قبلاً و قلباً از خداوند منان برای عزیزان و کادر اداری دانشگاه آرزوی سلامتی و موفقیت را خواستارم.

مهدی رحیمی

یادآوری: دترمینان ماتریس های ۲×۲ به صورت زیر حساب می شود

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = (a \times d) - (c \times b)$$

مثال)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = (1 \times 4) - (2 \times 3) = 4 - 6 = -2$$

برای محاسبه دترمینان ماتریس های ۳×۳ چند روش وجود دارد روشی که در اینجا مورد استفاده است بدین صورت می باشد. به عنوان نمونه در مثال زیر ابتدا سطر اول ستون اول را حذف خواهیم کرد محل تلاقی عدد یک است. بعد از این عمل ماتریس حاصل شده $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$ است عدد یک را به دترمینان این ماتریس ضرب خواهیم کرد یعنی $(1 \times 5) - (1 \times 4)$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

بعد از آن سطر اول و ستون دوم را حذف خواهیم کرد ماتریس حاصل شده ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ است محل تلاقی یعنی عدد 2 را به دترمینان این ماتریس ضرب خواهیم کرد.

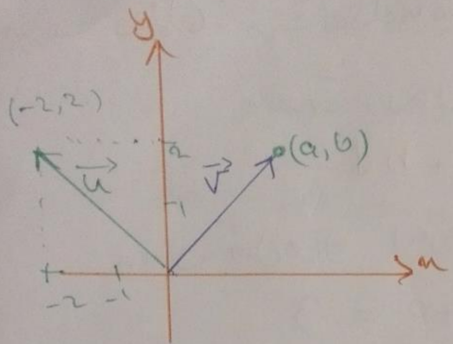
و بعد از آن سطر اول ستون سوم را حذف خواهیم کرد.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1\left((1 \times 5) - (1 \times 4)\right) - 2\left[(0 \times 5) - (2 \times 4)\right] + 3\left((0 \times 1) - (2 \times 1)\right)$$

$$= 1(5 - 4) - 2(0 - 8) + 3(1 - 2)$$

$$= 1 + 16 - 3 = 14$$

بردارها:



هر بردار در فضای دوبعدی را می‌توان با یک نقطه متناظر کرد. هرگاه $\vec{V}$ یک بردار در دستگاه مختصات دکارتی باشد بطوریکه انتهای آن نقطه‌ی (a,b) و ابتدای آن نقطه‌ی $(0,0)$ است خواهیم نوشت:

$$\vec{V}=(a,b)$$

به عنوان نمونه در شکل بالا $\vec{u}=(-2,2)$.

جمع و تفریق و ضرب یک عدد در یک بردار: هرگاه $\vec{u}=(c,d)$, $\vec{V}=(a,b)$ باشند و k یک عدد حقیقی در این صورت:

$$\vec{u}+\vec{V}=(a,b)+(c,d)=(a+c\ ,\ b+d)$$

$$\vec{u}-\vec{V}=(a-c\ ,\ b-d)$$

$k\vec{u}=(kc,kd)$ ضرب اسکالر

$\|\vec{u}\|=\sqrt{c^2+d^2}$ اندازه‌ی یک بردار به صورت مقابل می‌باشد

البته اندازه‌ی یک بردار با نمادهای $|\vec{u}|$, $\|\vec{u}\|$ نشان داده می‌شود.

به عنوان نمونه: با فرض اینکه $\vec{V}=(0,4)$, $\vec{u}=(1,2)$ مطلوبست محاسبه‌ی $\vec{u}-\vec{V}$. $\vec{u}+\vec{V}$, $5\vec{u}$, $|\vec{u}|$.

حل: $\vec{u}+\vec{V}=(1,2)+(0,4)=(1+0,2+4)=(1,6)$

$$\vec{u}-\vec{V}=(1-0\ ,\ 2-4)=(1,-2)$$

$$5\vec{u}=5(1,2)=(5,10)$$

$$|\vec{u}|=\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$$

ضرب نقطه‌ای: ضرب نقطه‌ای یا ضرب داخلی دو بردار $\vec{u}=(a,b)$, $\vec{v}=(c,d)$
به صورت زیر قابل تعریف است:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(a,b)\cdot(c,d)=ac+bd$$

به عنوان مثال هرگاه $\vec{u}=(3,4)$, $\vec{v}=(1,0)$ باشند آنگاه

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,4)\cdot(1,0)=3+0=3$$

مهم: دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ برهم عمود هستند $\iff \vec{u}\cdot\vec{v}=0$

یعنی دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ برهم عمود هستند آنگاه $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ (ضرب داخلی برابر صفر است)

و بالعکس هرگاه ضرب داخلی $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$ آنگاه دو بردار برهم عمود هستند

مثال) آیا دو بردار $\vec{u}=(3,-2)$, $\vec{v}=(2,3)$ برهم عمود هستند؟

حل) ابتدا باید ضرب داخلی حساب شود اگر صفر شد پس دو بردار برهم عمود هستند

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=(3,-2)\cdot(2,3)=6+(-6)=0$$

پس برهم عمود هستند

مهم: هرگاه θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u},\vec{v}$ باشد با استفاده از رابطه‌ی زیر میزان θ را می‌توان پیدا کرد.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$$

مثال) زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}=(+1,0)$, $\vec{v}=(3,4)$ را بیابید.

حل) $|\vec{u}|=\sqrt{1^2+0^2}=1$, $|\vec{v}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$

$\vec{u}\cdot\vec{v}=(1,0)\cdot(3,4)=3+0=3$

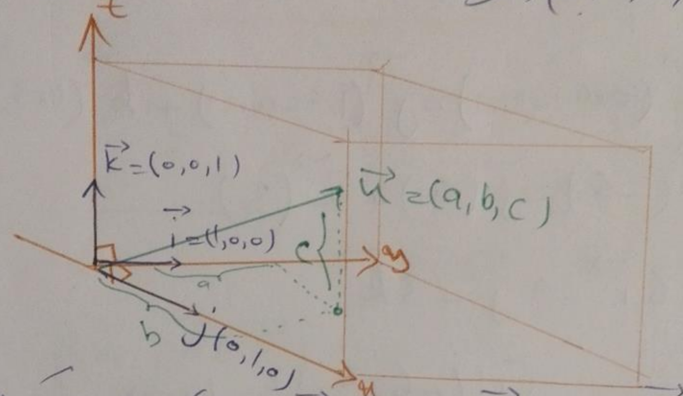
$\Rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta$

$3=1\times5\times\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}$

$\Rightarrow \theta=\cos^{-1}\frac{3}{5}=?$ با استفاده از ماشین حساب مهندسی

همانطور که دیدیم مختصات سه بعدی که از عمود کردن یک محور سوم به محورهای x و y حاصل می‌شود را گفتیم هر بردار در فضای سه بعدی دارای سه مولفه‌ی $\vec{u}=(a,b,c)$

ضرب، جمع و تفریق در حالت سه بعدی کاملاً شبیه حالت دو بعدی است:



بردارهای $\vec{i}=(1,0,0)$ و $\vec{j}=(0,1,0)$ و $\vec{k}=(0,0,1)$ را بردارهای واحد یا یکه گویند.

در فضای سه بعدی ضرب دکارتی به صورت زیر تعریف می‌شود:

همانطور $\vec{u}=(a_1,b_1,c_1)$ و $\vec{v}=(a_2,b_2,c_2)$ در این صورت:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix},\quad \vec{v}\times\vec{u}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_1 & b_1 & c_1\end{vmatrix}$$

در واقع رابطه‌ی بالا دترمینان ماتریس نوشته است برای محاسبه‌ی این دترمینان به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\end{vmatrix}=i(b_1c_2-b_2c_1)-j(a_1c_2-a_2c_1)+\vec{k}(a_1b_2-a_2b_1)$$

یعنی در واقع ابتدا سطر اول و ستون اول را حذف می‌کنیم محل تلاقی ($\vec{i}$) است اینجا $\vec{i}$ را نوشته پس $\vec{i}$ را با $b_1c_2-b_2c_1$ ضرب خواهم کرد ..... در ادامه سطر اول و ستون دوم را حذف خواهم کرد. محل تلاقی $\vec{j}$ است این بار $\vec{j}$ را به صورت $-\vec{j}$ خواهیم نوشت و ... (3)

مثال) اگر $\vec{u}=(1,0,2)$, $\vec{v}=(0,3,4)$ مطلوبست محاسبه‌ی $\vec{u}\times\vec{v}$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=$$

$$=\vec{i}\,\big((0\times4)-(3\times2)\big)-\vec{j}\,\big((1\times4)-(0\times2)\big)+\vec{k}\,\big((1\times3)-(0\times0)\big)$$

$$=\vec{i}(-6)-\vec{j}(4)+\vec{k}(3)$$

$$=-6\vec{i}-4\vec{j}+3\vec{k}$$

بردار حاصل شده همان بردار $(-6,-4,3)$ است.

نکته: حاصل جواب ضرب برداری یک بردار است و اینکه $\vec{u}\times\vec{v}=-(\vec{v}\times\vec{u})$

هرگاه θ زاویه‌ی بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ باشد می‌توان از رابطه‌ی زیر θ را به دست آورد

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

مثال) هرگاه $\vec{u}=(1,2,2)$, $\vec{v}=(0,3,4)$ باشد با استفاده از مفهوم ضرب برداری θ زاویه‌ی بین آنها را حساب کنید.

حل)

$$|\vec{u}|=\sqrt{1^2+2^2+2^2}=\sqrt{9}=3$$

$$|\vec{v}|=\sqrt{0^2+3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 2 & 2\\ 0 & 3 & 4\end{vmatrix}=\vec{i}\big((2\times4)-(3\times2)\big)-\vec{j}\big((1\times4)-(0\times2)\big)+\vec{k}\big((1\times3)-(0\times2)\big)$$

$$=\vec{i}(2)-\vec{j}(4)+\vec{k}(3)$$

$$=(2,-4,3)$$

$$\Rightarrow |\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{2^2+(-4)^2+3^2}=\sqrt{4+16+9}=\sqrt{29}$$

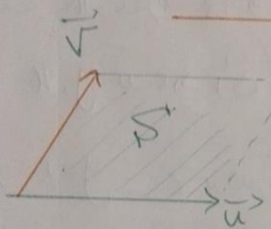
(4)

ادامه $\Leftarrow$

$$|\vec{u}\times\vec{v}| = |\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta$$

$$\sqrt{20} = 3\times 5\times \sin\theta \Rightarrow \sin\theta = \frac{\sqrt{20}}{15}$$

$$\Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{20}}{15}\right) = ?$$



نکته : مساحت متوازی الاضلاعی که توسط
بردارهای $\vec{u}$ و $\vec{v}$ ساخته می‌شود
برابر است با اندازه‌ی بردار $\vec{u}\times\vec{v}$

$$S = |\vec{u}\times\vec{v}|$$

تابع دو متغیره: تابعی $z=F(x,y)=xy^2+yx^2$ را که دارای یک متغیر وابسته z و دو متغیر مستقل x و y است نمونه‌ای از یک تابع دو متغیره است که از زیرمجموعه‌ای از $\mathbb{R}^2$ به سمت $\mathbb{R}$ تعریف می‌شود $F:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ یعنی در واقع با انتخاب عددهای دلخواه برای x و y یک عدد برای z حاصل خواهد شد. به عنوان نمونه هرگاه در مثال بالا

$x=0$ ، $y=1$ z به صورت زیر حاصل می‌شود

$$z=F(0,1)=0(1)^2+(1)(0)^2=0$$

دامنه‌ی چنین توابعی شبیه حالت یک متغیره است مانند $F(x,y)=\dfrac{1}{x-y}$

در این تابع مخرج کسر باید مخالف صفر باشد یعنی $x-y\neq 0$ یعنی در واقع $x\neq y$ یعنی آن دسته از x,y هایی که باهم برابر هستند شامل دامنه‌ی تابع نمی‌باشد یعنی

$$D_F=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\neq y\}$$

مشتق‌های جزئی: مشتق چنین توابعی در دو حالت قابل بررسی است. یک مشتق F نسبت به x که با F_x یا $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ نشان داده می‌شود و دیگری مشتق F نسبت به y که با F_y یا $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ نشان داده می‌شود. در محاسبه F_x مهم است y را عدد ثابت فرض کنیم و در محاسبه F_y مهم است x را عدد ثابت فرض کنیم.

مثال) برای تابع $F(x,y)=xy^2-yx^2$ مطلوب است محاسبه‌ی F_x , F_y .

حل) در محاسبه‌ی F_x ، y را عدد ثابتی فرض خواهیم کرد به عنوان مثال در قسمت xy^2
y^2 یک عدد ثابتی است که در مشتق‌گیری ثابت خواهد ماند و در قسمت $-yx^2$ عبارت $-y$
ثابت است که به مشتق x^2 یعنی $2x$ ضرب خواهد شد در واقع

$$\begin{cases} F_x = 1\times y^2 - (y\times 2x) = y^2 - 2yx \\ F_y = x\times(2y) - (1\times x^2) = 2xy - x^2 \end{cases}$$

نکته) از F_x نسبت به y دوباره مشتق گرفته شود آن را با نماد F_{xy} نشان
خواهیم داد که به این منظور است که از تابع F ابتدا نسبت به x، پس نسبت به y مشتق
گرفته شده است این مشتق را مشتق مرتبه‌ی دوم گوییم یعنی برای مثال بالا داریم:

$$F_{xy} = 2y - 2\times x = 2y - 2x$$

یعنی از عبارت $F_x = y^2 - 2yx$ نسبت به y مشتق گرفته شده که در این صورت x را عدد
ثابتی فرض خواهیم کرد. همچنین F_{xx} ، F_{yx} ، F_{yy} نیز به همین منوال قابل محاسبه است.

مثال) برای تابع $F(x,y)=2xy-y^2$ مطلوب است محاسبه‌ی F_x , F_y , F_{yy} , F_{xy} .

حل)

چون y عدد ثابت است

$$F_x = 2y - 0 \Rightarrow F_{xy} = 2 - 0 = 2$$

$$F_y = 2x - 2y \Rightarrow F_{yy} = 0 - 2 = -2$$

دیفرانسیل کامل: دیفرانسیل کامل تابع $F(x,y)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$

مثال) دیفرانسیل کامل تابع $F(x,y) = xy + x^3$ را در نقطه‌ی $(0,1)$ بیابید

حل)

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$

$$= (y + 3x^2)\,dx + (x + 0)\,dy$$

$$\Rightarrow dF(0,1) = (1 + 3(0)^2)\,dx + (0 + 0)\,dy = 4\,dx + 0\,dy$$

$$= 4\,dx$$
