دوگان (دوال - ثانویه) :

هر مسئله برنامه‌ریزی خطی یک مسئله دوگان وابسته به خود را دارد. خود مسئله را مسئله اولیه (P یا پرایمال) می‌نامند و دیگری مسئله را دوال (D $\boxed{\text{یا دوال}}$) می‌نامند. این مسئله خواص وابسته بسیار نزدیکی به هم دارند، بطوری که جواب بهینه یکی از مسائل اولیه، دوگان جواب بهینه مسئله دیگری را می‌دهد.

$$(P): \text{Max} : cx \qquad \text{s.t} \quad Ax \le b, \quad x \ge 0$$

$$(D): \text{min} \; wb \qquad \text{s.t} \quad wA \ge c, \quad w \ge 0$$

قاعده کلی برای نوشتن دوگان یک مسئله LP:

فرض کنیم صورت مسئله اولیه Max سازی است.

۱- تابع هدف دوگان بصورت Min ارائه می‌شود.

۲- تعداد متغیرهای دوگان برابر تعداد قیود مسئله اولیه است.

۳- تعداد قیود مسئله دوگان برابر تعداد متغیرهای مسئله اولیه است.

۴- بردار سود مسئله اولیه (ضرایب تابع هدف) مقادیر سمت راست مسئله دوگان را تشکیل می‌دهد.

۵- بردار سمت راست مسئله اولیه (b)، ضریب تابع هدف مسئله دوگان را تشکیل می‌دهد.

۶- ترانهاده ماتریس ضرایب ماتریس اولیه، ماتریس ضرایب مسئله دوگان می‌باشد.

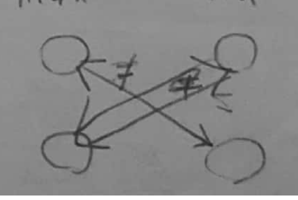
مثال: دوال مسئله زیر را بنویسید؟

$$(P): \text{Max}: z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$
$$\text{s.t}: \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 \le 25 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 \ge 10 \\ -5x_1 - x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 3 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \le 0,\ x_4 \text{ آزاد} \end{cases}$$

$$(D): \text{Min}: w = 25y_1 + 10y_2 + 3y_3$$
$$\text{s.t} \begin{cases} y_1 - 2y_2 - 5y_3 \ge 1 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 \ge 2 \\ 2y_1 + 3y_2 - 3y_3 \le -3 \\ -3y_1 - 2y_2 + 3y_3 = 4 \\ y_1 \ge 0,\ y_2 \le 0,\ y_3 \text{ آزاد} \end{cases}$$

	MAX	MIN	
محدودیت‌ها	$\le$	$\ge$	محدودیت‌ها
	$\ge$	$\le$	
	$=$	$=$	
متغیرها	≥ 0	≥ 0	متغیرها
	≤ 0	≤ 0	
	آزاد	آزاد	

*: نکته :



مثال:

① (P): $\min\ z = 7x_1 + 3x_2 + 5x_3$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} x_1 + 4x_2 + x_3 &\geq 5 \\ 4x_2 + 6x_3 &\leq 7 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 9 \end{aligned}$$

$x_1 \geq 0$ و $x_2 \leq 0$ و x_3 آزاد

(D): $\max: w = 5w_1 + 7w_2 + 9w_3$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} w_1 + 0w_2 + 2w_3 &\leq 7 \\ 4w_1 + 4w_2 - w_3 &\geq 3 \\ w_1 + 6w_2 + 2w_3 &= 5 \end{aligned}$$

$w_1 \geq 0$ و $w_2 \leq 0$ و w_3 آزاد

② (P): $\max: z = 5x_1 + 7x_2 + 6x_3$

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &\leq 4 \\ 2x_2 + 4x_3 &\geq 8 \end{aligned}$$

$x_1 \leq 0$ و $x_2 \geq 0$ و x_3 آزاد

(D): $\min: w = 4w_1 + 8w_2$

$$\begin{aligned} w_1 + 0w_2 &\leq 5 \\ -w_1 + 2w_2 &\geq 7 \\ w_2 + 4w_2 &= 6 \end{aligned}$$

$w_1 \geq 0$ و $w_2 \leq 0$

قضیه: دوگان دوگان مسئله اولیه است.

اثبات:

$$\begin{aligned} &\min\ cx \\ &\text{s.t}\ \ Ax \geq b \\ &\quad\ \ x \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\max: wb \\ &\text{s.t}\ \ wA \leq c \\ &\quad\ \ w \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\min: (-b^t)w^t \\ &\text{s.t}: (-A^t)w^t \geq -c^t \\ &\quad\ \ w^t \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\max: x^t(-c^t) \\ &\text{s.t}: x^t(-A^t) \leq -b^t \\ &\quad\ \ x^t \geq 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} &\min: cx \\ &\text{s.t}\ \ Ax \geq b \\ &\quad\ \ x \geq 0 \end{aligned}$$

قضیه ضعیف دوالیتی: اگر دو مسئله دوال هم باشند، همواره مقدار تابع هدف مسئله $\max$ سازی کوچکتر مساوی مقدار تابع هدف مسئله $\min$ سازی به ازای نقاط شدنی سایر متناظر خود باشد (یعنی $cx \leq wb$).

$$\begin{aligned} &\max\ cx \\ &Ax \leq b \\ &x \geq 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &\min\ by \\ &\text{s.t}\ \ yA \geq c \\ &\quad\ \ y \geq 0 \end{aligned}$$

اثبات:

$$\left.\begin{aligned} Ax \leq b &\xrightarrow{\times w} wAx \leq wb \\ wA \geq c &\xrightarrow{\times x} wAx \geq cx \end{aligned}\right\} \qquad cx \leq wAx \leq wb \qquad \boxed{cx \leq wb}$$

قضیه قوی دوالیتی: اگر مسئله اولیه شدنی و متناهی باشد، آنگاه جوابهای بهینه مسئله دوال موجودات بطوری که: $cx^* = by^*$ (x^* و y^* جوابهای بهینه اولیه و دوال هستند.)

*): جوابها در مسئله های اولیه و دوال:

دوال \ اولیه	شدنی	بهینه	نامتناهی
شدنی	+	—	+
بهینه	—	+	—
نامتناهی	+	—	+

سیمپلکس دوگان:

از این روش زمانی استفاده می‌کنیم که مقادیر سمت راست تساوی عددی منفی باشند و یا در تجزیه مسئله به دوال عددی منفی به دست آید.

مراحل حل مسئله با سیمپلکس دوگان (دوال):

۱- مسئله را به فرم استاندارد می‌نویسیم.

۲- یک جواب اساسی را که بهینه، ولی نشدنی است را انتخاب و جدول LP سیمپلکس دوال را ایجاد می‌کنیم.

۳- انتخاب بردار یا متغیر خروجی: منفی‌ترین عدد سمت راست را انتخاب می‌کنیم، سطر مربوط به این متغیر را سطر لولا می‌نامیم و متغیر اساسی این سطر را خروجی می‌نامیم. در صورتی که تمام اعداد سمت راست غیرمنفی باشند، جواب اساسی فعلی شدنی و بهینه است، در غیر اینصورت به گام بعدی برویم.

۴- انتخاب بردار یا متغیر ورودی به پایه: متغیر ورودی را با تقسیم اعداد سطر z به اعداد منفی سطر لولا و انتخاب بزرگترین اعداد (کوچکترین عدد از نظر قدر مطلق) را انتخاب می‌کنیم. یعنی:

$$\frac{z_k - c_k}{y_{rk}} = \min\left\{ \left| \frac{z_j - c_j}{y_{rj}} \right| \;\middle|\; y_{rj} < 0 \right\}$$

ستون زیر متغیر ورودی در محدودیت‌ها را ستون لولا می‌نامیم. اگر تمامی عناصر سطر لولا غیرمنفی باشد، مسئله فاقد جواب شدنی است.

۵- عملیات محوری را انجام می‌دهیم تا جدول بصورت متعارف تبدیل شود، سپس به گام مرحله ۳ برمی‌گردیم.

مثال: با استفاده از روش سیمپلکس دوال مسائل زیر را حل کنید؟

الف)

$$\begin{aligned} \max\ & z = 12x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t}\ & 4x_1 + 2x_2 \geq 80 \\ & 2x_1 + 3x_2 \geq 90 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \max\ & z = +12x_1 + 5x_2 \\ \text{s.t}\ & -4x_1 - 2x_2 + s_1 = -80 \\ & -2x_1 - 3x_2 + s_2 = -90 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

x_B	c_B	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
		12	5	0	0	
s_1	0	-4	-2	1	0	-80
s_2	0	-2	-3	0	1	-90
$z_j - c_j$		-12	-5	0	0	0
s_1	0	$-\frac{8}{3}$	0	1	$-\frac{2}{3}$	-20
x_2	+5	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	30
$z_j - c_j$		$-\frac{26}{3}$	0	0	$-\frac{5}{3}$	+150
s_2	0	4	0	$-\frac{3}{2}$	1	30
x_2	+5	2	1	$-\frac{1}{2}$	0	40
$z_j - c_j$		-2	0	$-\frac{5}{3}$	0	-200

$$\min\left\{ \left|\frac{-5}{-3}\right| , \left|\frac{-12}{-2}\right| \right\} = \frac{5}{3}$$

$$\min\left\{ \left|\frac{\frac{5}{3}}{-\frac{2}{3}}\right| , \left|\frac{\frac{26}{3}}{\frac{-8}{3}}\right| \right\} = \frac{5}{2}$$

جواب بهتر نمی‌شود اما شدنی می‌شود.

ب)

$\max\ z = -x_1 - ۳x_۲$

$s.t\quad x_1 + x_۲ \geq ۲$

$x_1 + ۳x_۲ \leq ۳$

$x_1, x_۲ \geq ۰$

$\Rightarrow$

$\max\ z = -x_1 - ۳x_۲$

$s.t\quad -x_1 - x_۲ + s_1 = -۲$

$x_1 + ۳x_۲ + s_۲ = ۳$

$x_1, x_۲ \geq ۰$

x_B	c_B	x_1	$x_۲$	s_1	$s_۲$	R.H.S
		۱-	۳-	۰	۰	
s_1	۰	۱-	۱-	۱	۰	۲-
$s_۲$	۰	۱	۳	۰	۱	۳
$z_j - c_j$		۱	۳	۰	۰	۰
x_1	۱-	۱	۱	۱-	۰	۲
$s_۲$	۰	۰	۲	۱	۱	۱
$z_j - c_j$		۰	۲		۰	۲-

$\min\left\{\left|\frac{۱}{-۱}\right|, \left|\frac{۳}{-۱}\right|\right\} = ۱$

$z^* = -۲\ ,\ x_1^* = ۲\ ,\ x_۲^* = ۰$

شرط بهینگی برقرار است و چون مقدار منفی در R.H.S نداریم جدول بهینه است:

ج)

$\text{Min}:\ z = ۲x_1 + ۳x_۲ + ۴x_۳$

$s.t:\quad x_1 + ۲x_۲ + x_۳ \geq ۳$

$۲x_1 - x_۲ + ۳x_۳ \geq ۴$

$x_1, x_۲, x_۳ \geq ۰$

$\Rightarrow$

$\text{Min}:\ z = ۲x_1 + ۳x_۲ + ۴x_۳$

$s.t\quad -x_1 - ۲x_۲ - x_۳ + s_1 = -۳$

$-۲x_1 + x_۲ - ۳x_۳ + s_۲ = -۴$

$x_1, x_۲, x_۳ \geq ۰$

x_B	c_B	x_1	$x_۲$	$x_۳$	s_1	$s_۲$	R.H.S
		۲	۳	۴	۰	۰	
s_1	۰	۱-	۲-	۱-	۱	۰	۳-
$s_۲$	۰	۲-	۱	۳-	۰	۱	۴-
$z_j - c_j$		۲-	۳-	۴-	۰	۰	۰
s_1	۰	۰	$-\frac{۵}{۲}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	$-\frac{۱}{۲}$	۱-
x_1	۲	۱	$-\frac{۱}{۲}$	$\frac{۳}{۲}$	۰	$-\frac{۱}{۲}$	۲
$z_j - c_j$		۰	۴-	۱-	۰	۱-	۴
$x_۲$	۳	۰	۱	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲}{۵}$
x_1	۲	۱	۰	$\frac{۷}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$-\frac{۲}{۵}$	$\frac{۱۱}{۵}$
$z_j - c_j$		۰	۰	$-\frac{۹}{۵}$	$-\frac{۸}{۵}$	$-\frac{۱}{۵}$	$\frac{۲۸}{۵}$

د)

$\min: z = ۲x_1 + ۳x_۲ + ۵x_۳ + ۶x_۴$

$s.t:\quad x_1 + ۲x_۲ + ۳x_۳ + x_۴ \geq ۲$

$-x_1 + x_۲ - x_۳ + ۳x_۴ \leq -۳$

$x_i \geq ۰ \quad i = ۱,۲,۳,۴$

(اعلام حل نزن)

تمرین

و)

$\max:\ z = -۴x_1 - ۶x_۲ - ۱۸x_۳$

$s.t\quad ۲x_1 + ۳x_۳ \geq ۳$

$۳x_۲ + ۲x_۳ \geq ۵$

$x_1, x_۲, x_۳ \geq ۰$

تحلیل حساسیت

در برخی از اوقات، در مسائل مجبور هستیم که پس از حل آن تغییراتی در مسئله بوجود آوریم و ببینیم که می‌توان بدون حل کامل آن به جواب رسید یا نه!

مسئله $\min\ cx$ $s.t\ Ax=b$ $x\geq 0$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم روش سیمپلکس ماتریس پایه بهینه B را تولید کرده است. چگونگی استفاده از (روابط اولیه - دوال) را به منظور کسب جواب بهینه جدید بدون حل مجدد مسئله در تغییرات زیر را بررسی می‌کنیم:

۱- تغییر در ضریب هزینه c

۲- تغییر در بردار سمت راست (b)

۳- تغییر در ماتریس تکنولوژیکی A.

۴- افزودن یک متغیر جدید.

۵- افزودن یک محدودیت (قید) جدید.

۱- تغییر در ضریب هزینه c : الف) فرض کنیم ضریب متغیر غیرپایه‌ای x_k تغییر کند.

فرض کنیم ضریب متغیر غیرپایه‌ای x_k، از c_k به c'_k تغییر پیدا کند. در این حالت تنها تغییری که در جدول فعلی ایجاد می‌شود z_k-c_k است. یعنی:

$$z_k-c'_k=(z_k-c_k)+(c_k-c'_k)$$

پس از اعمال تغییرات حاصله در جدول کافی است، مقدار $c_k-c'_k$ را به مقدار z_k-c_k اضافه کنیم. اگر $z_k-c'_k>0$ باشد، یک مرحله دیگر جدول سیمپلکس را ادامه می‌دهیم وگرنه اگر $z_k-c'_k\leq 0$ باشد جدول قبلی دارای جواب بهینه است.

ب) ضریب یک متغیر پایه‌ای x_{B_r} تغییر کند:

فرض کنیم ضریب متغیر پایه‌ای x_{B_r}، از c_{B_r} به c'_{B_r} تغییر پیدا کند. در این صورت بردار c_B که در همه z_j-c_j ها موجود است به c'_{B_r} تغییر پیدا می‌کند. یعنی: $z'_j-c_j=(z_j-c_j)+(c'_{B_r}-c_{B_r})y_{rj}$.

پس برای اعمال تغییرات حاصله در جدول کافی است به جز خود x_{B_r}، اعضای سطر rام جدول به $(c'_{B_r}-c_{B_r})$ ضرب شده و حاصل با سطر صفرام جمع شود. تنها مشکلی که می‌تواند رخ دهد، مثبت بودن برخی z_j-c_j حاصله برای متغیرهای غیرپایه‌ای است که با چندین بار تکرار روش سیمپلکس می‌توان به جواب بهینه رسید.

مثال (A): مسئله زیر را در نظر بگیرید و جدول بهینه آن هم در زیر داده شده است:

$$\begin{aligned}\min:\ & z=-2x_1+x_2-x_3\\ s.t\ & x_1+x_2+x_3\leq 6\\ & -x_1+2x_2\leq 4\\ & x_1,x_2,x_3\geq 0\end{aligned}$$

x_{B_r}	c_{B_r}	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		-2	1	-1	0	0	
x_1	-2	1	1	1	1	0	6
s_2	0	0	3	1	1	1	10
z_j-c_j		0	-3	-1	-2	0	-12

فرض کنیم $c_2 = 1$ با ۳- عوض شود. چون x_2 غیر پایه‌ای است پس $z_2 - c_2' = (z_2 - c_2) + (c_2 - c_2') = -3+4 = 1$ و سایر $z_j - c_j$ ها تغییر نمی‌کنند. لذا x_2 وارد پایه می‌شود. یعنی:

x_{B_r}	c_{B_r}	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		-2	-3	-1	0	0	
x_1	-2	1	1	1	1	0	6
s_2	0	0	3	1	1	1	10
$z_j - c_j$		0	1	-1	-2	0	-12

و جدول را ادامه می‌دهیم.

حال فرض کنیم که $c_1 = -2$ به صفر تغییر پیدا کند. چون x_1 متغیر پایه‌ای است، پس سطر هزینه جدید، به جز $z_1 - c_1$، از ضرب سطر x_1 در تغییر c_1 یعنی ($2 = (-2) - 0$) و جمع آن با سطر هزینه قبلی بدست می‌آید. $z_1 - c_1$ جدید صفر باقی می‌ماند، توجه می‌کنیم که $z_3 - c_3$ جدید حالا مثبت است، پس x_3 وارد پایه می‌شود و جدول را ادامه می‌دهیم.

x_{B_r}	c_{B_r}	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		0	1	-1	0	0	
x_1	0	1	1	1	1	0	6
s_2	0	0	3	1	1	1	10
$z_j - c_j$		0	-1	1	0	0	0

۲) اگر بردار سمت راست (b) تغییر کند:

فرض کنیم بردار سمت راست b به b' تغییر کند. لذا تمامی بردار سمت راست $\begin{array}{|c|}\hline c_B B^{-1} b \\ \hline B^{-1} b \\ \hline\end{array}$ به $\begin{array}{|c|}\hline c_B B^{-1} b' \\ \hline B^{-1} b' \\ \hline\end{array}$ تبدیل شده و در جدول جایگزین می‌شود. تنها مشکل اینست که منفی شدن برخی از مولفه‌های سمت راست ($B^{-1}b' \ngeq 0$) است که می‌توان آنرا با چند بار تکرار روش سیمپلکس دوال حل کرد:

مثال: فرض کنیم در مثال فوق (A) سمت راست به $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ تغییر پیدا کند. چون $B^{-1} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$، لذا $B^{-1}b' = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}3\\7\end{bmatrix}$

پس $B^{-1}b' \geq 0$ و لذا جواب بهینه جدید $x_1 = 3$ و $s_2 = 7$ خواهد بود و $x_2 = x_3 = s_1 = 0$.

تحلیل حساسیت :

۳) تغییراتی در ضرایب (ماتریس) تکنولوژیکی A ایجاد شود :

الف) ستون نظیر متغیر غیرپایه‌ای a_k عوض شود .

فرض کنید ستون a_k نظیر متغیر غیرپایه‌ای x_k ، به a'_k تغییر پیدا کند، پس تغییرات تنها در ستون متناظر x_k رخ می‌دهد و در جدول بجای ستون $\boxed{\begin{array}{c} z_j - c_j \\ \hline y_j \end{array}}$ ، ستون $\boxed{\begin{array}{c} z'_j - c_j \\ \hline y'_j \end{array}}$ بصورت زیر انجام می‌شود :

$$z'_j - c_j = c_B B^{-1} a'_j - c_j$$

$$y'_j = B^{-1} a'_j$$

اگر $z'_j - c_j \geq 0$ شود جدول بهینه است وگرنه برای رسیدن به جواب بهینه ، چند تکرار جدول سیمپلکس انجام می‌گیرد.

ب) ستون نظیر متغیر پایه‌ای a_{B_r} عوض شود .

فرض کنید a_{B_r} ستون متغیر پایه‌ای به a'_{B_r} تغییر کند. چون در این حالت B و B^{-1} عوض می‌شود و چون تغییر B^{-1} در کل جدول تأثیر می‌گذارد، مسئله را از اول حل می‌کنیم.

مثال : فرض کنید در مثال ۶ ، a_2 از $\binom{1}{2}$ به $\binom{2}{5}$ تغییر داده شود. پس

$$y'_2 = B^{-1} a'_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} a'_2 - c_2 = (-2, 0) \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 = -5$$

لذا جدول بهینه جاری با تعویض ستون x_2 با $(\underbrace{2, 7}_{a_2}, \overset{z_2 - c_2}{-5})^t$ بهینه باقی می‌ماند.

ـ حال فرض کنید که ستون a_1 از $\binom{1}{-1}$ به $\binom{0}{-1}$ تغییر داده شود. پس :

$$y'_1 = B^{-1} a'_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} a'_1 - c_1 = (-2, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} - (-2) = 2$$

با اضافه کردن $(\underbrace{0, -1}_{a_1}, \overset{z_1 - c_1}{2})^t$ به جدول برای متغیر جدید x'_1 ، x_1 در نقش متغیر غیرپایه‌ای خواهد بود، که ~~با انجام روش M بزرگ~~ و جدول را بدست می‌آوریم : بصورت زیر

		x_1	x'_1	x_2	x_3	s_1	s_2	
-2	x_1	1	0	1	1	1	0	6
0	s_2	0	-1	3	1	1	1	10
$z_j - c_j$		$-M$	2	-3	-1	-2	0	-12

پس از عمل محورگیری معمولی در سطر x_1 و ستون x_1 جهت کسب $z_1 - c_1 = 0$ ، یعنی تبدیل جدول به شکل متعارف ، ~~با روش M بزرگ مسئله را ادامه می‌دهیم~~. مسئله را از اول می‌نویسیم.

سرانجام فرض کنید ستون a_1 از $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ به $\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$ تغییر داده شود. پس:

$$y'_1 = B^{-1}a'_1 = \begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1} a'_1 - c_1 = (-2,\ 0)\begin{pmatrix}3\\9\end{pmatrix} - (-2) = -4$$

لذا عنصر y'_1 سطر x_1 صفر نیست و بنابراین ستون $(-4,3,9)^t$ متغیر x'_1 را اضافه می‌کنیم. با محورگیری در ستون x'_1 و سطر x_1 با حذف x_1 مسئله را پی می‌گیریم:

-2	x'_1	3	1	1	1	0	6
0	s_2	9	3	1	1	1	10
$z_j - c_j$		-4	-3	-1	-2	0	-12

(ادامه کار به عهده دانشجو)

۴) متغیر جدید x_{n+1} به مسئله اضافه شود.

فرض کنیم متغیر جدید x_{n+1} با ضریب هزینه c_{n+1} به مسئله اضافه شود و ستون تکنولوژیکی آن a_{n+1} باشد. در این حالت کافیست ستون

$z_{n+1} - c_{n+1}$
y_{n+1}

را که بصورت مقابل قابل محاسبه است به جدول اضافه کرد:

$$\begin{cases} z_{n+1} - c_{n+1} = c_B B^{-1} a_{n+1} - c_{n+1} \\ y_{n+1} = B^{-1} a_{n+1} \end{cases}$$

اگر $z_{n+1} - c_{n+1} \le 0$ باشد، جواب بهینه فعلی مورد قبول است وگرنه برای رسیدن به جواب بهینه، عمل سیمپلکس را تکرار می‌کنیم.

مثال: در مثال A، اگر متغیر x_4 با $c_4 = 1$ و $a_4 = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$ معرفی شود جواب بهینه جدید را پیدا کنید.

ابتدا $z_4 - c_4$ را محاسبه می‌کنیم.

$$z_4 - c_4 = c_B B^{-1} a_4 - c_4 = (-2,0)\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} - 1 = 1$$

$$y_4 = B^{-1} a_4 = \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

لذا با محورگیری در سطر s_2 و ستون x_4، x_4 وارد پایه می‌شود.

c_B	x_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	x_4	R.H.S
-2	x_1	1	1	1	1	0	-1	6
0	s_2	0	3	1	1	1	1	10
$z_j - c_j$		0	-3	-1	-2	0	1	-12

(در جدول ادامه پیدا کنید.)

۵- قید جدید $a_{m+1}x \geq b_{m+1}$ به مسئله اضافه شود.

فرض کنیم $a_{m+1}x \geq b_{m+1}$ به مسئله اضافه شود. اگر B را به پایه جدول نهایی مسئله قبل در نظر بگیریم می‌توان قید جدید را در مسئله نوشت:
جدول را به روش سیمپلکس حل می‌کنیم. در صورتی که عدد سمت راست منفی شود آن را توسط سیمپلکس دوال حل می‌کنیم و به جواب بهینه می‌رسیم.

مثال: مثال A را با افزودن قید $-x_1+2x_3 \geq 2$ به آن اضافه شده را در نظر می‌گیریم. به روشنی جواب بهینه $(x_1,x_2,x_3)=(6,0,0)$
بازنویسی می‌کنیم که در آن متغیر s_3 متغیر کمکی کامل است. داریم:

-2	x_1	1	1	1	1	0	0	6
0	s_2	0	3	1	1	1	0	10
0	s_3	1	0	-2	0	0	1	-2
z_j-c_j		0	-3	-1	-2	0	0	-12

سطر اول را در ۱- ضرب می‌کنیم و با سطر سوم جمع می‌کنیم تا ستون x_1 به واحد تبدیل شود. حال روش سیمپلکس دوگان را بکار می‌بریم تا جدول زیر حاصل شود:

-2	x_1	1	1	1	1	0	0	6
0	s_2	0	3	1	1	1	0	10
0	s_3	0	-1	-3	-1	0	1	-8
z_j-c_j		0	-3	-1	-2	0	0	-12

(بقیه به عهده دانشجو)

مثال:

$$\min: -2x_1+x_2-x_3$$
$$\text{s.t}\quad x_1+x_2+x_3\le 6$$
$$-x_1+2x_2\le 4$$
$$x_1,x_2,x_3\ge 0$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		-2	1	1	0	0	
x_1	-2	1	1	1	1	0	6
s_2	0	0	3	1	1	1	10
z_j-c_j		0	-3	-1	-2	0	-12

مطلوب است تحلیل حساسیت در حالات زیر:

الف) $c_2=1$ به $c_2=-3$.

در این حالت چون x_2 غیر پایه‌ای است پس $z_j-c'_j=(z_j-c_j)+(c_j-c'_j)$.

$$z_2-c'_2=(z_2-c_2)+(c_2-c'_2)=-3+(1-(-3))=-3+4=1>0$$

لذا x_2 وارد پایه می‌شود و s_2 خارج می‌شود.

ب) $c_1=-2$ به $c_1=0$.

در این حالت چون x_1 پایه‌ای است لذا $z'_j-c_j=(c_B B^{-1}a_j-c_j)$.

$$z'_1-c_1=(z_j-c_j)+(c'_{B_r}-c_{B_r})y_{rj}=0+(0-(-2)y_r)=2y_r=2$$

در این حالت عدد ۲ را با تمامی z_j-c_j غیر پایه‌ای جمع می‌کنیم. در این حالت $z_3-c_3>0$ است و x_3 وارد پایه شده و x_1 خارج می‌شود.

ج) $b=\binom{6}{4}$ به $b=\binom{3}{4}$.

از رابطه $\bar{b}=B^{-1}b$ و $z=c_B B^{-1}b'$ استفاده می‌کنیم.

$$\bar{b}=B^{-1}b'=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\7\end{pmatrix}$$

$$c_B B^{-1}b'=(-2,0)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=-6$$

د) $a_2=\binom{1}{2}$ به $a_2=\binom{2}{5}$.

چون x_2 غیر پایه‌ای است پس

$$z'_2-c_2=c_B B^{-1}a'_2-c_2=(-2,0)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}-1=-5<0$$

$$y_2=B^{-1}a'_2=\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\end{pmatrix}$$

لذا جدول بهینه است.

و) اضافه کردن متغیر x_4 با ضریب $c_4=1$ ، $a_4=\binom{-1}{2}$.

با استفاده از رابطه $z_{n+1}-c_{n+1}$ و $y_{n+1}=B^{-1}a_{n+1}$.

$$z_4-c_4=(-2,0)\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}-1=1>0$$

پس x_4 وارد پایه شده و s_2 خارج می‌شود.

هـ) قید $-x_1+2x_3\ge 2$ اضافه شود.

قید را بصورت $-x_1+2x_3-s_3=2$ را نوشته (یعنی $x_1-2x_3+s_3=-2$). چون $b=-2$ است پس با روش سیمپلکس دوآل آن را حل می‌کنیم.

مثال: مسئله برنامه ریزی خطی زیر و جدول بهینه آخر آنرا در نظر بگیرید:

$$\max:\ 2x_1 + x_2 - x_3$$
$$\text{s.t}\quad x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 8$$
$$-x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		2	1	1	0	0	
x_1	2	1	2	1	1	0	8
s_2	0	0	3	-1	1	1	12
$z_j - c_j$		0	3	3	2	0	16

الف) دوگان آنرا بنویسید:

$$\min:\ 8w_1 + 4w_2$$
$$\text{s.t}\quad w_1 - w_2 \geq 2$$
$$2w_1 + w_2 \geq 1$$
$$w_1 - 2w_2 \geq -1$$
$$w_1 \geq 0,\ w_2 \geq 0$$

ب) اگر ضریب x_2 در تابع هدف از یک به شش تغییر پیدا کند؟

$$z_2 - c'_2 = (z_2 - c_2) + (c_2 - c'_2) = (2,0)\begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix} - 6 = -2 < 0$$

x_2 غیرپایه‌ای است لذا

پس x_2 وارد پایه می‌شود و s_2 خارج شونده است و داریم:

x_1	2	1	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	0
x_2	6	0	1	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	4
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{2}{3}$	24

ج) اگر ضریب x_2 در اولین قید از 2 به $\frac{1}{4}$ تغییر داده شود؟

$$z'_2 - c_2 = c_B B^{-1} a'_2 - c_2 = (2,0)\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\2\end{pmatrix} - 1 = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} < 0$$

x_2 غیرپایه‌ای است پس داریم:

$$y'_2 = B^{-1} a'_2 = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\\frac{5}{4}\end{pmatrix}$$

x_1	2	1	$\frac{1}{4}$	1	1	0	8
x_2	1	0	$\frac{5}{4}$	-1	1	1	12
$z_j - c_j$		0	$-\frac{1}{2}$	3	2	0	16

x_2 وارد پایه شده و s_2 خارج می‌شود

جدول مقابل بهینه است:

x_1	2	1	0	$\frac{6}{5}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$	$\frac{28}{5}$
x_2	1	0	1	$-\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{48}{5}$
$z_j - c_j$		0	0	$\frac{8}{5}$	$\frac{12}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{104}{5}$

د) اگر قید $x_2 + x_3 \geq 3$ را به محدودیت‌ها اضافه کنیم:

قید را بصورت $-x_2 - x_3 + s_3 = -3$ نوشته و با استفاده از سیمپلکس دوگال آنرا حل کنیم.

x_1	۲	۱	۲	۱	۱	۰	۰	۸
s_1	۰	۰	۳	۱-	۱	۱	۰	۱۲
s_2	۰	۰	۱-	۱-	۰	۰	۱	۳-
z_j-c_j		۰	۳	۳	۲	۰	۰	۱۶

$\Rightarrow$

x_1	۲	۱	۱	۰	۱	۰	۱	۵
s_1	۰	۰	۴	۰	۱	۱	۱-	۱۵
s_2	۰	۰	۱	۱	۰	۰	۱-	۳
z_j-c_j		۰	۰	۰	۰	۰	۳	۷

جدول بهینه است.

ه) اگر یک ~~جدید~~ متغیر جدید x_4 با ضریب ۴ در تابع هدف و بردار $a_4=(۱,۲)^t$ داده شود؟

$$z_4-c_4=(۲,۰)\begin{pmatrix} ۱ & ۰ \\ ۱ & ۱ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} ۱ \\ ۲ \end{pmatrix}-۴=-۲<۰$$

و) x_4 وارد پایه می‌شود و s_2 خارج شوند.

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	R.H.S
		۲	۱	۱	۴	۰	۰	
x_1	۲	۱	۲	۱	۱	۰	۱	۸
s_2	۰	۰	۳	۱-	۳	۱	۱	۱۲
z_j-c_j		۰	۳	۳	۲-	۲	۰	۱۶
x_1	۲	۱	۱	$\frac{۴}{۳}$	۰	$\frac{۲}{۳}$	$-\frac{۱}{۳}$	۴
x_4	۴	۰	۱	$-\frac{۱}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۴
z_j-c_j		۰	۵	$\frac{۵}{۳}$	۰	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۲۴

جدول بهینه است.

مثال: مسئله زیر و جواب بهینه آن را در نظر بگیرید:

$$\max: z=-۵x_1+۵x_2+۱۳x_3$$
$$s.t:\ -x_1+x_2+۳x_3\le ۳$$
$$۱۳x_1+۴x_2+۱۰x_3\le ۹۰$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	R.H.S
		۵-	۵	۱۳	۰	۰	
x_2	۵	۱-	۱	۳	۱	۰	۲۰
s_2	۰	۱۶	۰	۲-	۴-	۱	۱۰
z_j-c_j		۰	۰	۲	۵	۰	۱۰۰

الف) اگر در متغیر x_3، $c_3=۱۳$ به $c_3=-۲$ تبدیل شود؟

ب) اگر در متغیر x_2، $c_2=۵$ به $c_2=۱$ تبدیل شود؟

ج) اگر $a_1=\begin{pmatrix} -۱ \\ ۱۳ \end{pmatrix}$ به $a_1=\begin{pmatrix} ۳ \\ -۱ \end{pmatrix}$ تبدیل شود؟

د) اگر $b=\begin{pmatrix} ۳ \\ ۹۰ \end{pmatrix}$ به $b=\begin{pmatrix} ۱۳ \\ ۱۰ \end{pmatrix}$ تبدیل شود؟

و) اگر متغیر x_4 از $c_4=-۳$ و $a_4=\begin{pmatrix} ۲ \\ -۱ \end{pmatrix}$ به مسئله اضافه شود؟

ه) اگر قید $x_1-۲x_2+x_3\le ۳۰$ به ~~جدول~~ مسئله اضافه شود؟

بسمه تعالی

①

مدل برنامه ریزی عدد صحیح

مدل برنامه ریزی خطی که در پژوهش‌های قبلی مورد بررسی قرار گرفت همگی پیوسته بودند، بدین معنی که متغیرهای تصمیم گیری می‌توانستند اعداد کسری به خود بگیرند. مثلاً ممکن است ۱۰۲٫۷۵ گالن از محصول قابل تقسیم شیمیایی را تولید کرد. اما در مواقعی جوابهای کسری واقع بینانه نیستند و باید متغیرهای تصمیم گیری عدد صحیح به خود بگیرند.

صورت کلی مدل برنامه ریزی عدد صحیح همان مدل برنامه ریزی خطی است به علاوه $x_j \in Z$، یعنی

$$\max \quad z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$s.t: \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad (i=1,\dots,m)$$

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,\dots,n)$$

$$x_j \in Z$$

این مدل برنامه ریزی خطی با متغیرهای عدد صحیح (گسسته) نامیده می‌شود. اگر در برخی از متغیرها عدد صحیح و کسری باشد، برنامه ریزی خطی با اعداد مختلط نامیده می‌شود.

انواع مدلهای برنامه ریزی خطی عدد صحیح:

۱- مدل عدد صحیح محض　　۲- مدل صفر و یک　　۳- مدل عدد صحیح مختلط

۱- مدل عدد صحیح محض: مدلی است که در آن تمام متغیرهای تصمیم گیری عدد صحیح می‌باشند نه اعداد کسری و اعشاری.

مثال: در طرح توسعه یک کارگاه تصمیم گرفته شده است تا بروی خرید ماشین های جدید سرمایه گذاری شود. پیش بینی می‌شود که خرید هر ماشین تراش و هر ماشین پرس سود روزانه را به ترتیب ۱۵۰ و ۱۰۰ ریال افزایش دهد. چون خرید ماشین‌ها محدود است و دارای دو محدودیت پولی و فضای نصب است. لذا نمی‌توان آنها را به هر تعداد خرید. بودجه خرید ماشین‌ها ۴۰ ریال است و حداکثر فضایی که برای نصب ماشین‌های ذکر شده وجود دارد ۲۰۰ فوت مکعب است. قیمت خرید و اشغال فضای مورد نیاز آنها در جدول زیر داده شده است. این کارگاه چه تعداد از هر ماشین بخرد تا سود به حداکثر برسد؟ مسئله را به فرم برنامه ریزی عدد صحیح مدل سازی کنید؟

	ماشین	فضای مورد نیاز	قیمت خرید
x_1	پرس	۱۵	۸۰۰۰
x_2	تراش	۳۰	۴۰۰۰

$$\max: \quad z = 100x_1 + 150x_2$$

$$s.t: \quad 15x_1 + 30x_2 \leq 200$$

$$8000x_1 + 4000x_2 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad \text{و عدد صحیح}$$

یعنی تعداد باید یک عدد صحیح باشد مثلاً باید یعنی ۳ دستگاه یا ۲ تا دستگاه و نمی‌توانیم ۲٫۵ دستگاه بگیریم.

مثال: یک فروشنده کالا تصمیم دارد که فقط کولر و یخچال خرید و فروش کند. بررسی های بازار نشان می دهد که سود حاصل از فروش هر کدام از کولرها ۵۰۰۰ تومان و سود حاصل از فروش هر یخچال ۶۰۰۰ تومان خواهد بود. کل سرمایه فروشنده ۲,۰۰۰,۰۰۰ تومان است و فضای انبار آن ۶۰ متر مربع است. اطلاعات مربوط به هزینه خرید کولر و یخچال و نیز فضای مورد نیاز در جدول آمده است:

نوع کالا	هزینه خرید هر واحد	فضای مورد نیاز
کولر	۱۰۰,۰۰۰	۴
یخچال	۲۰۰,۰۰۰	۲

مسئله را طوری فرموله کنید که فروشنده به حداکثر سود برسد:

① تعریف متغیرهای تصمیم: x_1 : کولرهایی که باید خریداری شود.

x_2 : یخچال هایی که باید خریداری شود.

② تعریف تابع هدف: $\max z: 5000x_1 + 6000x_2$

③ تعریف محدودیت ها یا قیود: $\text{s.t}\quad 100000x_1 + 200000x_2 \le 2000000$

$4x_1 + 2x_2 \le 60$

④ $x_1 \ge 0$ و $x_2 \ge 0$ و x_1, x_2 عدد صحیح

مدل عدد صحیح مختلط:

در این مدل برخی از متغیرها عدد صحیح بوده یعنی مقادیر مربوط به این متغیرها باید عدد صحیح باشد اما برخی دیگر از متغیرها هر عدد دیگری می توانند باشند.

مثال: یک سرمایه گذار ۵۰ میلیون تومان سرمایه دارد که می تواند آن را برای خرید سهام، خرید زمین و خرید اوراق قرضه استفاده کند. این سرمایه گذار می خواهد سرمایه اش را طوری سرمایه گذاری کند که در یک سال بیشترین سود را ببرد و در جدول زیر اطلاعات مربوط به سود و هزینه خریدشان داده شده است.

گزینه ها	سود	قیمت خرید به ازای هر واحد
سهام به ازای هر سهم	۸۰۰۰	۵۰,۰۰۰
زمین به هکتار	۲۰۰۰	۱۰,۰۰۰
	۱۰۰۰	۱۰,۰۰۰

تعداد سهام، هکتار زمین و اوراق قرضه به ترتیب ۱۰، ۲۰ و ۵ می باشد.

مسئله را طوری فرموله کنید که سود یک سال سرمایه گذاری حداکثر شود.

① تعریف متغیرهای تصمیم: x_1 : تعداد سهامی که بایستی خریداری شود.

x_2 : تعداد هکتار زمینی " " " .

x_3 : تعداد اوراق قرضه ای که " " " .

$x_1, x_2 \ge 0$ عدد صحیح

$x_3 \ge 0$

② تابع هدف: $\max: 8000x_1 + 2000x_2 + 1000x_3$

③ قیود یا محدودیت ها: $50000x_1 + 10000x_2 + 10000x_3 \le 50000000 \xleftarrow{} \text{s.t}$ محدودیت سرمایه گذاری

$x_1 \le 10$

$x_2 \le 20$ ← محدودیت خرید

$x_3 \le 5$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0$ و x_1, x_2 عدد صحیح

(۲)

برنامه‌ریزی صفر و یک:

در این مدل‌ها تمام متغیرهای تصمیم‌گیری صفر و یک خواهد بود که از آن جمله می‌توان به مدل‌های برنامه‌ریزی ماشین‌ها: کوله‌پشتی، بودجه‌بندی، سرمایه، فروشنده دوره‌گرد و ... اشاره کرد.

مثال: شورای یک شهر باید در خصوص ساخت امکانات تفریحی شهر تصمیم‌گیری کند. برای این منظور ۴ مکان تفریحی در نظر گرفته شده است. (ایجاد استخر شنا، زمین تنیس، یک ورزشگاه و یک سالن ژیمناستیک). شورای شهر با توجه به محدودیت بودجه و زمین‌های موجود در نظر دارد امکاناتی را ایجاد کند که افراد بیشتری از آن استفاده کنند. تعداد افرادی که از این امکانات استفاده خواهند کرد و به همراه هزینه و مقدار زمین مورد نیاز آنها در جدول زیر نشان داده شده است. شورای شهر برای ایجاد این امکانات ۱۲۰,۰۰۰ ریال بودجه و ۱۲ هکتار زمین دارد. چون زمین مورد استفاده برای ایجاد استخر شنا و زمین تنیس در یک منطقه از شهر قرار دارد. لذا فقط یکی از آن دو باید احداث شود. شورای شهر کدامیک از این امکانات را ایجاد کند تا روزانه افراد بیشتری از این امکانات استفاده کنند. مسئله را به روش برنامه‌ریزی عدد صحیح فرموله کنید؟

مکان تفریحی	تعداد افراد مورد استفاده از امکانات	هزینه برحسب ریال	زمین برحسب هکتار
استخر شنا	۳۰۰	۳۵,۰۰۰,-	۴
زمین ورزش	۹۰	۱۰,۰۰۰,-	۲
ورزشگاه	۴۰۰	۲۵,۰۰۰,-	۷
سالن ژیمناستیک	۱۵۰	۹۰,۰۰۰,-	۳

$$\text{Max}: \quad z = 300x_1 + 90x_2 + 400x_3 + 150x_4$$

$$\text{s.t.}: \quad 35000x_1 + 10000x_2 + 25000x_3 + 90000x_4 \leq 120$$

$$4x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 3x_4 \leq 12$$

$$x_1 + x_2 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 = 0 \text{ یا } 1$$

مثال: بخش تحقیق و توسعه سازمان، در صدد بررسی ۷ موقعیت سرمایه‌گذاری برای پروژه‌ها می‌باشد. کل بودجه موجود تومان برای سرمایه‌گذاری ۶۲۰ ریال است. بررسی‌های بخش توسعه و تحقیق نشان می‌دهد که با توجه به شرایط اقتصادی حداکثر می‌توان در ۴ پروژه سرمایه‌گذاری کند. نیروی انسانی موجود برای اجرای پروژه‌ها ۱۵ نفر می‌باشد. با توجه به اطلاعات جدول زیر مسئله را طوری فرموله کنید که حداکثر ارزش فعلی خالص ناشی از سرمایه‌گذاری حاصل شود:

پروژه	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷
سرمایه مورد نیاز	۱۰۰	۱۲۰	۱۸۰	۹۰	۲۰۰	۱۵۰	۲۲۰
نیروی انسانی مورد نیاز	۸	۳	۱	۴	۶	۳	۵
ارزش فعلی خالص	۲۰۰	۲۵۰	۳۰۰	۱۵۰	۳۲۰	۲۵۰	۲۹۰

$$\max: \ z = 200x_1 + 250x_2 + 300x_3 + 150x_4 + 320x_5 + 250x_6 + 290x_6$$

s.t: محدودیت نیروی انسانی: $8x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 + 6x_5 + 3x_6 + 5x_7 \leq 15$

محدودیت سرمایه مورد نیاز: $100x_1 + 120x_2 + 180x_3 + 90x_4 + 200x_5 + 150x_6 + 220 \leq 620$

محدودیت پروژه‌ها: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 \leq 4$

$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 = 0, 1$

اگر در پروژه jام سرمایه‌گذاری شود: $x_j = 1$

" " " " " نشود: $x_j = 0$

مسئله کوله‌پشتی: ساده‌ترین مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح، مسئله کوله‌پشتی است که تنها یک محدودیت دارد که در علم مدیریت یکی از مدل‌های مهم به شمار می‌رود و به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\max: \ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t} \ \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$$

$$x_j = 0, 1 \qquad (j = 1, \dots, n)$$

این مسئله به این دلیل کوله‌پشتی نامیده شده چون شبیه به حالتی است که یک کوهنورد باید تصمیم بگیرد چه وسایلی را در سفرش به همراه داشته باشد.

c_j هزینه وسیله jام است که وزن آن $a_j > 0$ کیلوگرم است.

مثال: مسئله کوله پشتی زیر را حل کنید

$$\max:\quad z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5$$

$$\text{s.t}:\quad 3x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 + 3x_5 \le 12$$

$$x_j = 0 \text{ یا } 1 \qquad j = 1, \dots, 5$$

حل:

$$\max:\quad z = 2x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 + x_5 + 0x_6$$

$$3x_1 + 7x_2 + 12x_3 + 2x_4 + 3x_5 + x_6 = 12$$

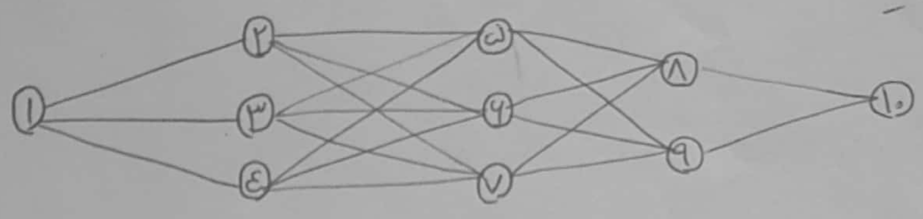
$$x_j = 0 \text{ یا } 1 \quad , \quad j = 1, \dots, 6$$

x_B	c_B	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	R.H.S
		2	3	8	1	1	0	
x_6	0	3	7	12	2	3	1	12
$z_j - c_j$		-2	-3	-8	-1	-1	0	0
x_3	8	$\frac{3}{12}$	$\frac{7}{12}$	1	$\frac{2}{12}$	$\frac{3}{12}$	$\frac{1}{12}$	1
$z_j - c_j$		0	$\frac{5}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	8

لذا به جواب بهینه $x^* = (0, 0, 8, 0, 0, 0)$ با مقدار بهینه تابع هدف $z^* = 8$ خواهیم رسید.

برنامه ریزی پویا :

مسئله دلیجان : مسئله در مورد فرد فروشنده‌ای است که جهت فروش کالای خود از شرق به غرب سفر کند. این فروشنده با دلیجان سفر کند و می خواهد مسیری را انتخاب کند که امن ترین باشد :



برای این منظور مسیرهای در دسترس و هزینه‌های بیمه این مسیرها در جدول زیر آمده است :

	۲	۳	۴
۱	۲	۴	۳

	۵	۶	۷
۲	۷	۴	۶
۳	۳	۲	۴
۴	۴	۱	۵

	۸	۹
۵	۱	۴
۶	۶	۳
۷	۳	۳

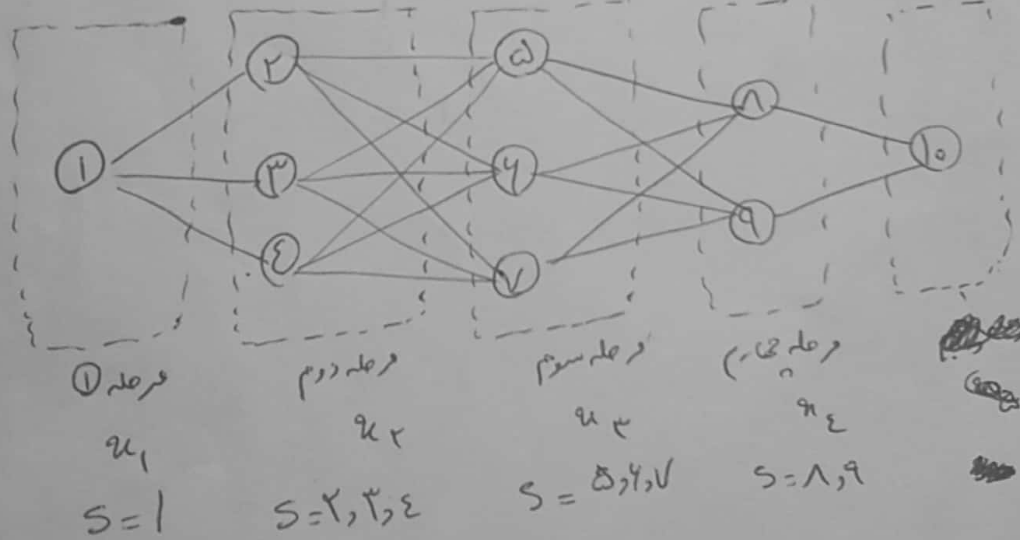
	۱۰
۸	۳
۹	۴

$1 \xrightarrow{2} 2 \xrightarrow{4} 6 \xrightarrow{3} 9 \xrightarrow{4} 10$

در روش اول :

اگر در روش دوم :

تشکیل مراحل و حالت ها :



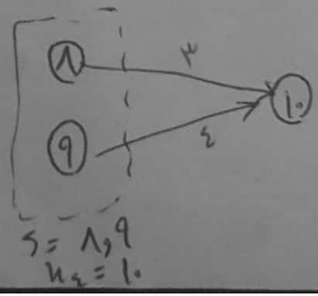
x_i : شهری که در مرحله i ام به عنوان مقصد انتخاب می شود.

مجموعه حالات یک مرحله : همه وضعیت هایی که در ابتدای هر مرحله قابل تصور می باشد.

از مرحله های آخر شروع می کنیم :

$f_4(s,x_4)$ مقدار تابع هدف از مرحله ۴ به بعد که در آن، حرکت از حالت s به x_4 در مرحله به صورت می گیرد.

$f_4^*(s)$ بهترین مقدار تابع هدف از مرحله ۴ به بعد که در آن حرکت از حالت s شروع شده است.



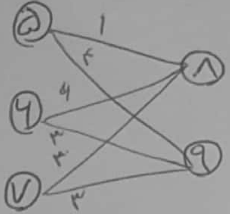
$s \backslash x_4$	$f_4(s,x_4)$ ۱۰	$f_4^*(s)$	x_4^*
۸	۳	۳	۱۰
۹	۴	۴	۱۰

(مرحله چهارم)

(۲)

برای مرحله سوم : $f_3(s, x_3)$ مقدار تابع هدف از مرحله ۳ به بعد که در آن، حرکت از حالت s به x_3 در مرحله بعد صورت می‌گیرد.

$f_3^*(s)$ بهترین مقدار تابع هدف از مرحله سه به بعد که در آن، حرکت از حالت s شروع شده است :



C_{s,x_3} هزینه حرکت از s به x_3 در تابع هدف

$$f_3(5,8) = C_{5,8} + f_4^*(8) = 1+3=4$$

$$f_n(s,x_n) = C_{s,x_n} + f_{n+1}^*(x_n)$$

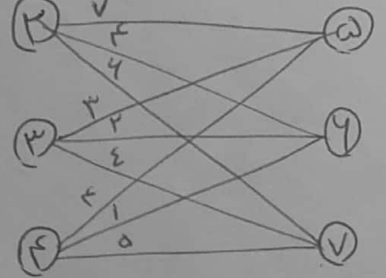
s = ۵، ۶، ۷

x_3

s \ x_3	$f_3(s,x_3)$: ۸	$f_3(s,x_3)$: ۹	$f_3^*(s)$	x_3^*
۵	۴ (۱+۳)	۸ (۴+۴)	۴	۸
۶	۹ (۶+۳)	۷ (۳+۴)	۷	۹
۷	۶ (۳+۳)	۷ (۳+۴)	۶	۸

برای مرحله دوم : $f_2(s,x_2)$ مقدار تابع هدف از مرحله ۲ به بعد که در آن حرکت از حالت s به x_2 در مرحله بعد صورت می‌گیرد.

$f_2^*(s)$ بهترین مقدار تابع هدف از مرحله دوم به بعد که در آن حرکت از حالت s شروع شده است :



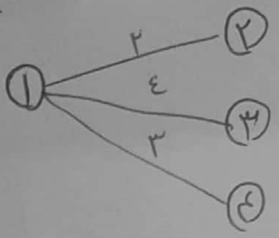
C_{s,x_2} هزینه حرکت از s به x_2 در تابع هدف :

s = ۲، ۳، ۴

x_2

s \ x_2	$f_2(s,x_2)$: ۵	$f_2(s,x_2)$: ۶	$f_2(s,x_2)$: ۷	$f_2^*(s)$	x_2^*
۲	۷+۴ = ۱۱	۴+۷ = ۱۱	۶+۶ = ۱۲	۱۱	۶ یا ۵
۳	۳+۴ = ۷	۲+۷ = ۹	۴+۶ = ۱۰	۷	۵
۴	۴+۴ = ۸	۱+۷ = ۸	۵+۶ = ۱۱	۸	۶ یا ۵

مرحله اول



s \ x_1	$f_1(s, x_1)$			$f_1^*(s)$	x_1^*
	۲	۳	۴		
۱	۲+۱۱ ۱۳	۴+۷ ۱۱	۳+۸ ۱۱	۱۱	۴ یا ۳

پس داریم :

$① \xrightarrow{4} ③ \xrightarrow{3} ⑤ \xrightarrow{1} ⑧ \xrightarrow{3} ⑩$

$① \xrightarrow{3} ④ \xrightarrow{1} ⑥ \xrightarrow{3} ⑨ \xrightarrow{4} ⑩$

هزینه (۱۱)

$① \xrightarrow{3} ④ \xrightarrow{4} ⑤ \xrightarrow{1} ⑧ \xrightarrow{3} ⑩$

اصول حاکم بر برنامه ریزی پویا :

۱- مسئله را به چند قسمت یا مرحله (stage) می توان تقسیم کرد. هر مرحله یک بخش از مسئله را نشان می دهد که باید در مورد آن تصمیم گرفت.

۲- هر مرحله دارای تعدادی حالت (state) وابسته به خود است.

۳- در هر مرحله با یک تصمیم از حالت وابسته به مرحله فعلی، به حالتی در مرحله بعدی می رود.

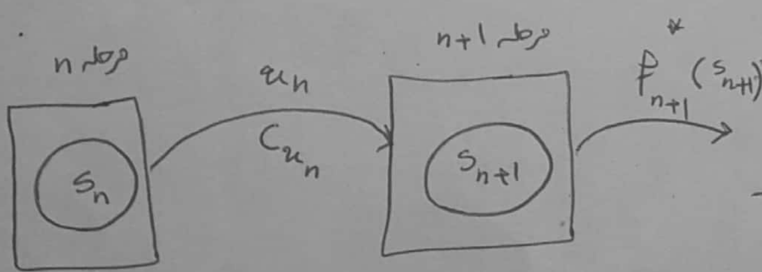
۴- با داشتن حالت فعلی، خط مشی مراحل باقیمانده مستقل از خط مشی مراحل باقیمانده دیگر است (خاصیت مارکوف برنامه ریزی فعلی)

۵- روش حل مسئله با پیدا کردن خط مشی بهینه برای هر حالت از مرحله نهایی (انتهایی) شروع می شود.

۶- سیاست بهینه همه حالات مرحله n را می توان با یک رابطه بازگشتی و با فرض معلوم بودن سیاست بهینه همه حالات مرحله n+1 ام مشخص کرد

۷- روش حل با حرکت از انتها و با استفاده از رابطه بازگشتی فوق از مرحله ای به مرحله دیگر اعمال می شود.

در حالت کلی در همه مسائل چنین عمل می کنیم



$$f_n(s_n, x_n) = C_{x_n} + f^*_{n+1}(s_{n+1})$$

(۳)

مثال: سازمان بهداشت جهانی در جهت بهبود بهداشت در کشورهای جهان سوم در نظر دارد ۵ کمیته پزشکی به ۳ کشور جهان سوم اعزام کند. معیار سنجش کارایی تیم های پزشکی افزایش طول عمر جمعیت های کشورهای جهان سوم تحت پوشش می باشد. طول عمر برحسب نفر-سال تعیین می شود که برابر حاصل ضرب جمعیت کشور در میانگین افزایش طول عمر سرانه است. در صورت تعلق هر تعداد تیم پزشکی به کشورهای مورد بحث افزایش طول عمر جمعیت (با ضریب ۱۰۰۰) در جدول زیر خلاصه شده است.

تعداد تیم ها	افزایش طول عمر (نفر-سال)		
	۱	۲	۳
۰	۰	۰	۰
۱	۴۵	۲۰	۵۰
۲	۷۰	۴۵	۷۰
۳	۹۰	۷۵	۸۰
۴	۱۰۵	۱۱۰	۱۰۰
۵	۱۲۰	۱۵۰	۱۳۰

هدف: چگونگی اعزام تیم های پزشکی به کشورهای مورد بحث با بالاترین کارایی است.

مرحله: تعداد کشورها (۱و۲و۳)

حالت: تعداد تیم های در دسترس که می توان آنها را به مرحله (کشور) n ام اختصاص داد.

تصمیم: تعداد تیمهایی که به هر کشور اختصاص می یابد.

مرحله سوم:

S	$f_3^*(s)$	x_3^*
۰	۰	۰
۱	۵۰	۱
۲	۷۰	۲
۳	۸۰	۳
۴	۱۰۰	۴
۵	۱۳۰	۵

مرحله دوم:

S	$f_2^*(s,x_2) = c_{x_2} + f_3^*(s)$						$f_2^*(s)$	x_2^*
	۰	۱	۲	۳	۴	۵		
۰	۰	—	—	—	—	—	۰	۰
۱	۰+۵۰	۲۰	—	—	—	—	۵۰	۰
۲	۰+۷۰	۲۰+۵۰	۴۵	—	—	—	۷۰	۰ یا ۱
۳	۸۰	۹۰	۹۵	۷۵	—	—	۹۵	۲
۴	۱۰۰	۱۰۰	۱۱۵	۱۲۵	۱۱۰	—	۱۲۵	۳
۵	۱۳۰	۱۲۰	۱۲۵	۱۴۵	۱۶۰	۱۵۰	۱۶۰	۴

۱۰۰+۲۰   ۷۰+۴۵   ۷۵+۵۰

مرحله اول:

s \ x_1	$f_1^*(s,x_1) = C_{x_1} + f_2^*(s)$ 0	1	2	3	4	5	$f_1^*(s)$	x_1^*
۵	۱۶۰	۱۷۰	۱۶۵	۱۶۰	۱۵۵	۱۲۰	۱۷۰	۱

کشور ۱	کشور ۲	کشور ۳
۱	۳	۱

(در کشور ۱، ۱ باقی مانده، یعنی از ۵ یکی کم می‌گردد پس برای کشور ۲، ۴ تا باقی می‌ماند. x_2^* برای ۴، ۳ است. پس ۱ برای کشور ۳ باقی می‌ماند.)

مثال: در یک پروژه تحقیقاتی به منظور حل یک مسئله فنی سه گروه تحقیقاتی در حال کار بود. احتمال شکست هریک از این سه گروه به ترتیب ۰/۴ گروه اول، ۰/۶ گروه دوم، ۰/۸ گروه سوم برآورد شده اند. احتمال شکست پروژه برابر $۰/۴ \times ۰/۶ \times ۰/۸ = ۰/۱۹۲$ است. برای کاهش احتمال شکست، دو دانشمند به این گروهها اضافه خواهند شد. احتمال شکست هر تیم

با افزایش تعداد دانشمندان در جدول زیر خلاصه شده است.

دانشمند جدید	احتمال شکست		
	۱	۲	۳
۰	۰/۴	۰/۶	۰/۸
۱	۰/۲	۰/۴	۰/۵
۲	۰/۱۵	۰/۲	۰/۳

هدف: تخصیص دانشمندان به گروههای تحقیقاتی است که احتمال شکست کمینه شود.

PAPCO

Subject:
Year. Month. Date. ۲۵

مرحله: گروههای تحقیقاتی ۱، ۲، ۳

حالت: تعداد دانشمندان در دسترس جهت تخصیص دادن به مرحله n ام

تصمیم: تعداد دانشمندان اختصاص یافته به گروه n ام

برای حالت ۳:

(n=3)

s	$f_3^*(s)$	x_3^*
٠	٠/٨	٠
١	٠/۵	١
٢	٠/٣	٢

بهترین حالت و حالت بعدی

برای حالت ۲:

(n=2)

$f_2^*(s,x_n)=P_{x_n}\times f_3^*(s-x_2)$

s \ x_2	٠	١	٢	$f_2^*(s)$	x_2^*
٠	٠/۶×٠/٨=٠/۴٨	—	—	٠/۴٨	٠
١	٠/۶×٠/۵=٠/٣	٠/٣٢ ٠/۴×٠/٨	—	٠/٣	٠
٢	٠/۶×٠/٣=٠/١٨	٠/٢ ٠/۴×٠/۵	٠/١۶ ٠/٢×٠/٨	٠/١۶	٣

تیم ۱	تیم ۲	تیم ۳
١	٠	١

$f_1(s,x_1)=P_{x_1}\times f_2^*(s-x_1)$

s \ x_1	٠	١	٢	$f_1^*(s)$	x_1^*
٢	٠/٠۶۴	٠/٠۶	٠/٠٧٢	٠/٠۶	١

٠/١۶×٠/۴

٠/٢×٠/٣

٠/١۵×٠/۴٨