پژوهش عملیاتی

استاد حشمتی

سرفصل ها

۱) مقدماتی در مورد پژوهش عملیاتی

۲) مدل سازی پژوهش عملیاتی

۳) حل مدل برنامه ریزی خطی به روش ترسیمی

۴) حل مدل برنامه ریزی خطی به روش جدول سیمپلکس

۵) حل مدل برنامه ریزی خطی به روش M بزرگ و دوفازی

۶) سیمپلکس دوآل

۷) تحلیل حساسیت

①

فصل اول) مقدماتی در مورد پژوهش عملیاتی (تحقیق عملیاتی)

operation Research ⟶ or

تحقیق عملیات اولین بار در جنگ جهانی دوم در ارتش نظامی انگلیس و توسط جورج دانسیک در سال ۱۹۴۷ بکار گرفته شد. امروزه در همه ی سازمان های صنعتی بازرگانی و تولیدی و دولتی در زمینه هایی مانند برنامه ریزی تولید، تخصیص منابع، انتخاب محل، سود دهی، زیان دهی، تعیین تکنولوژی، سیاست های مالی، استخدامی، سرمایه گذاری و ... بکار گرفته می شود

تعریف:

تحقیق عملیات روش علمی برای شناسایی مسائل و مشکلات سازمان و تدوین مدل ها مناسب برای آزمایش و اصلاح آن و راه حلی برای پیاده سازی آن می باشد. علم تحقیق در عملیات مترادف با علم مدیریت، تصمیم گیری، روش های مقداری و تجزیه و تحلیل مقداری می باشد.

ویژگی های اساسی تحقیق در عملیات:

۱) نگرش نظام گرا یا برخورد سیستمی
۲) استفاده از علوم مختلف
۳) استفاده از روش های علمی
۴) استفاده از مدل

مراحل انجام یک روش علمی :

۱) تعریف مساله
۲) تنظیم فرضیه
۳) آزمایش
۴) اجرای آزمایش
۵) رد یا تایید فرضیه

۱) تعریف مساله :
مساله باید برای تحلیل تعریف شده و شرایط مشاهده تعیین گردد

۲) تنظیم فرضیه (مشاهده)
مشاهدات مختلف تحت شرایط متفاوت اند به رفتار سیستم دربرگیرنده ی مساله را مشخص می کنند

۳) آزمایش :
برای آزمون فرضیه ، فرضیات یک آزمایش تجربی و قابل اندازه گیری باید طراحی شود

۴) اجرای آزمایش :
آزمایش یا آزمایشات طراحی شده بایستی اجرا شوند و نتایج آزمایش ثبت و ضبط گردد

۵) تایید یا رد فرضیه :
با استفاده از نتایج آزمایشات به بررسی صحت و سقم فرضیات می پردازیم با استفاده

از نتایج آزمایشات می توان دریافت که آیا فرضیه تایید می شود یا رد.

مراحل پیاده سازی فرآیند تحقیق در عملیات:

۱) تشخیص و تعریف مساله

۲) مدل سازی

۳) ارزیابی مدل

۴) ارزیابی راه حل

۵) اجرای راه حل

۶) تجدید نظر و اصلاح

تشخیص و تعریف مساله:

در مرحله ی تشخیص و تعریف مساله کاملاً مورد بررسی قرار گرفته و با استفاده از متخصصین علوم مختلف همه ی متغیرها و روابط میان آنها مشخص می شود

راه حل بهینه:

در تحقیق در عملیات بهترین راه حل است که برای مدل بدست می آید و ممکن است بهترین جواب برای مساله واقعی نباشد. لذا داده های کمی باشیم در کنار داده های کیفی مورد ارزیابی قرار گرفته و سپس از تفسیر دقیق و اصطلاحات مناسب راه حل نهایی مشخص شود

مدل ها:

مدل ها نمایش انتخابی از واقعیات هستند با ایجاد یک مدل مناسب می توان نتایج

مختلفی که از راه حل های مختلف بدست می آید مورد بررسی قرار داد. لذا توسط یک مدل بدون آنکه مخاطره، تصمیم گیری در دنیای واقعی وجود داشته باشد می توان بهترین تصمیم را اتخاذ نمود. در مدل سازی عوامل اضافی و مخل کنار گذاشته می شود و مدلی که فقط نشان دهنده ی اجزای مورد نظر و روابط میان آنها ساخته می شود.

مدل های غیر احتمالی یا قطعی و مدل های احتمالی یا غیر قطعی:
اگر شرایط کامل مشخص باشد و اطلاعات شرایط اطمینان کامل در دست باشد از مدل های قطعی (غیر احتمالی) استفاده می گردد مانند مدل های برنامه ریزی خطی، مدل برنامه ریزی غیر خطی، برنامه ریزی عدد صحیح، برنامه ریزی آرمانی، حمل و نقل و تخصیص)
چنانچه شرایط کاملاً مشخص نباشد و اطلاعات کامل در دست نباشد در این صورت از مدل های احتمالی (غیر قطعی) استفاده می شود مانند تئوری صف، تئوری بازی ها، شبیه سازی، تصمیم گیری در شرایط ریسک، فرآیند مارکوف و...

موارد استفاده از پژوهش عملیاتی:

۱) برنامه ریزی تولید
۲) تخصیص منابع
۳) توزیع کالا

از مدل های غیر قطعی و احتمالی در شبکه ها کنترل موجودی و برنامه ریزی پویا استفاده می شود.

نرم افزارهایی که برای حسابرسی در پژوهش عملیاتی استفاده می شود

✓ QSB
✓ win QSB
✓ Lindo
✓ Lingo
✓ DEA
✓ DS
✓ SSP
✓ Topsis

فصل دوم) مدل های برنامه ریزی خطی

مدل برنامه ریزی خطی (LP) یک مدل غیراحتمالی وقطعی است پس تصمیم گیری با شرایط اطمینان کامل انجام می پذیرد یک مدل برنامه ریزی خطی دارای تابع هدف، قیدها و متغیرها می باشد

تابع هدف

بیانگر حداکثر بودن یا حداقل نمودن عملکرد مدل می باشد. (Min ، MAX)

قیود یا محدودیت ها

بیانگر محدودیت های منابع جهت رسیدن به اهداف مدل می باشد که به صورتهای $\leq$ $=$ $\geq$ می باشد

متغیرهای تصمیم

نشان دهنده ی مقدار عملکرد یا سطح یک فعالیت بوده و این متغیرها اگر به صورت مثبت و به صورت نه نامنفی یا آزاد به کار می رود

نکته ۱) متغیر آزاد متغیری است که می‌تواند مقادیر منفی، مثبت و یا صفر را شامل شود

نکته ۲) هر چقدر تعداد محدودیت‌ها کمتر باشد حجم محاسبات جهت حل مسئله کمتر خواهد بود (در مقایسه با تعداد متغیرها)

صورت کلی مسئله برنامه ریزی خطی

min max ضریب تابع هدف

۱) تابع هدف $\text{opt} : Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$

۲) محدودیت‌ها یا قیود

ضرایب تکنولوژی

$$\text{s.t} \quad
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &\le (\ge \text{ یا } =) \; b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &\le (\ge \text{ یا } =) \; b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &\le (\ge \text{ یا } =) \; b_m
\end{aligned}$$

R.H.S

۳) متغیرهای تصمیم $x_1, x_2, \ldots, x_n \ge 0$

$C = [c_1, c_2, \ldots, c_n]$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$b^t = [b_1, b_2, \ldots, b_m]$$

$$X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$$

$$\boxed{\begin{array}{l} Opt: CX \\ s.t \quad AX \leq b \\ \quad x \geq 0 \end{array}}$$

نکته) اگر سود باشد و یا در مورد قیمت و یا ظرفیت آن را در نظر بگیریم MAX سازی و اگر هزینه باشد و یا ضرر و زیان از Min سازی استفاده می کنیم و برای این حالت ها علامت محدودیت ها را اکثراً به صورت $\leq$ برای MAX سازی و $\geq$ برای Min سازی می باشد

مثال: در یک کارخانه‌ای ۳ نوع محصول A.B.C تولید می‌شوند برای تولید این ۳ نوع محصول از نوع مواد اولیه و نیروی کار استفاده می‌شود حداکثر مواد اولیه و نیروی کار به ترتیب ۶۰۰ و ۴۰۰ و ۸۰۰ می‌باشد. مقدار مواد مصرفی و زمان لازم برای تهیه‌ی این ۳ محصول در جدول زیر آمده است. مقدار سود محصولات A.B.C به ترتیب ۸ و ۵ و ۱۰ دلار می‌باشد. مدل برنامه ریزی خطی را طوری بنویسید که ضمن رعایت منابع کارخانه به بیشترین سود برسیم.

	A (x_1)	B (x_2)	C (x_3)	حداکثر
مواد اولیه ۱	۲ (a_{11})	۳ (a_{12})	۱ (a_{13})	۶۰۰
مواد اولیه ۲	۴ (a_{21})	۱ (a_{22})	۸ (a_{23})	۴۰۰
مواد اولیه ۳	۳ (a_{31})	۱ (a_{32})	۲ (a_{33})	۸۰۰
	۸	۵	۱۰	قیمت

متغیرهای تصمیم:

x_1 = متغیرهای مربوط به تولید محصول A

x_2 = متغیرهای مربوط به تولید محصول B

x_3 = متغیرهای مربوط به تولید محصول C

نوع تابع هدف = Max

$$\text{Max}: Z = 8x_1 + 5x_2 + 10x_3$$

$$\text{s.t} \quad 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 600$$

$$4x_1 + x_2 + 8x_3 \leq 400$$

$$3x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 800$$

$x_i \geq 0 \; , \; i = 1,2,3$ یا $x_1 \geq 0 , x_2 \geq 0 , x_3 \geq 0$ یا $x_1 , x_2 , x_3 \geq 0$

مثال :) شخصی مرتبی برای تامین احتیاجات ویتامینی فصلی بدن خود دست کم به ۱۲۰۰ واحد ویتامین B_1 و ۱۲۰۰ واحد ویتامین B_2 و ۲۴۰۰ واحد ویتامین B_6 نیاز دارد ، دو نوع قرص در بازار موجود است . نوع اول شامل ۶ واحد ویتامین B_1 و ۲ واحد ویتامین B_2 و ۶ واحد ویتامین B_6 می باشد . و قیمت آن ۶ دلار می باشد . نوع دوم شامل ۲ واحد ویتامین B_1 ، ۶ واحد ویتامین B_2 و ۶ واحد ویتامین B_6 می باشد و قیمت آن ۱۲ دلار می باشد تعیین کنید از هر نوع قرص به چه مقداری خریداری شود تا ضمن تامین ویتامین مورد نظر بدن خود کمترین پول را نیز دریافت کند :

	B_1	B_2	B_6	قیمت
حداقل	۱۲۰۰	۱۲۰۰	۲۴۰۰	
نوع اول	۶	۲	۶	۶
نوع دوم	۲	۶	۶	۱۲

متغیرهای تصمیم :

x_1 = تعداد قرص های خریداری شده از نوع اول

x_2 = تعداد قرص های خریداری شده از نوع دوم

نوع تابع هدف = Min

$$\text{Min}: Z = 6x_1 + 12x_2$$

$$\text{s.t} \quad 6x_1 + 2x_2 \geq 1200$$

$$2x_1 + 6x_2 \geq 1200$$

$$6x_1 + 6x_2 \geq 2400$$

$$x_1 \geq 0 \ , \ x_2 \geq 0$$

دایان

تمرین: یک بیمارستان در ۶ شیفت کاری می خواهد تعدادی پرستار استخدام کند. حداقل پرستار مورد نیاز برای شیفت های کاری در جدول زیر آمده است. مدل برنامه ریزی خطی را طوری بنویسید که هر پرستار در دو شیفت متوالی کار کند و هر پرستار مورد نیاز هر شیفت برآورد شود و بیمارستان کمترین تعداد پرستار را انتخاب کرده باشد.

شیفت	ساعت	حداقل پرستار
۱	۲۴-۴	۸
۲	۴-۸	۱۰
۳	۸-۱۲	۴
۴	۱۲-۱۶	۶
۵	۱۶-۲۰	۲۰
۶	۲۰-۲۴	۱۰

متغیرهای تصمیم

x_1 = متغیرهای مربوط به شیفت اول

x_2 = 〃 〃 〃 〃 〃 دوم

x_3 = 〃 〃 〃 〃 〃 سوم

x_4 = 〃 〃 〃 〃 〃 چهارم

x_5 = 〃 〃 〃 〃 〃 پنجم

x_6 = 〃 〃 〃 〃 〃 ششم

نوع تابع هدف = Min

$$Min: Z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6$$

$$x_6 + x_1 \geq 8$$

$$x_1 + x_2 \geq 10$$

$$x_2 + x_3 \geq 4$$

$$x_3 + x_4 \geq 6$$

$$x_4 + x_5 \geq 20$$

$$x_5 + x_6 \geq 10$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0$$

مثال:) یک کارخانه ی کاغذسازی در ۳ سفارش برای تهیه توپ های کاغذی که طول و عرض آن در جدول زیر آمده است.

طول	عرض	سفارش
۱۰۰۰	۵	۱
۳۰۰۰	۷	۲
۲۰۰۰	۹	۳

در این کارخانه توپ های کاغذی در دو عرض ۱۰ و ۲۰ دسی متری تولید می شود که به اندازه هایی که در سفارش ها مشخص شده بریده می شود برای طول توپ های استاندارد محدودیتی وجود ندارد. زیرا از لحاظ علمی توپ های با طول محدودتر می توانند به هم وصل شوند و طول های مورد نیاز را به ما بدهند. هدف مشخص کردن ضایعات.

۱۰ دسی‌متری

x_1	۵	۵
x_2	۷	۳
x_3	۹	۱

۲۰ دسی‌متری

x_4	۵	۵	۵	۵
x_5	۹	۹	۲	
x_6	۷	۷	۵	۱
x_7	۹	۷	۴	
x_8	۵	۵	۹	۱
x_9	۵	۵	۷	۳

$$\text{Min}: Z = \underbrace{3x_2 + x_3 + 2x_5 + x_6 + 4x_7 + x_8 + 2x_9}_{\text{ضایعات عرضی}} + \underbrace{5S_1 + 7S_2 + 9S_3}_{\text{ضایعات طولی}}$$

۵ دسی‌متری: $2x_1 + 4x_4 + x_6 + 2x_8 + 2x_9 - S_1 = 1000$

۷ دسی‌متری: $x_2 + 2x_6 + x_7 + x_9 - S_2 = 3000$

۹ دسی‌متری: $x_3 + 2x_5 + x_6 + x_8 - S_3 = 2000$

$x_j \geq 0 \; (1, 2, \ldots, 9) \quad , \quad S_i \geq 0 \; (1, 2, 3)$

تمرین ۱) فردی روز شنبه ۱۰۰ دلار پول دارد می خواهد در یک سرمایه گذاری شرکت کند به طوری که روز پنجشنبه همان هفته بیشترین سود را برده باشد شرایط سرمایه گذاری به شرح زیر است:

اگر فرد ۲ واحد از پول خود را از امروز سرمایه گذاری کند باید نصف مبلغ را یعنی ۱ واحد را در روز بعد در همان حساب سرمایه گذاری کند تا روز سوم دو برابر مقدار سرمایه گذاری اولیه را دریافت کند.

تمرین ۲) مسائل زیر را فرمول نویسی کنید.

یک تولید کننده آلیاژ سفارشی از یک مشتری با ترکیبی حداقل ۲۳٪ فلز نوع A و حداکثر ۱۵٪ نوع B و ۴٪ نوع C و همچنین میان ۳۵٪ تا ۶۵٪ فلز نوع D دریافت کرده است. در تولید این آلیاژ غیر از ۴ نوع فلز فوق استفاده از ترکیب با فلزی دیگری مجاز نیست تولید کننده به ۶ نوع سنگ معدن دسترسی دارد که می توان با استفاده از آنها آلیاژ مورد نظر مشتری را تعیین کند جدول زیر درصد ترکیبات و قیمت فروش هر واحد آن را نشان می دهد. هدف پاسخ به تقاضای مشتری با حداقل هزینه است

سنگ معدن	فلز A	فلز B	فلز C	فلز D	ناخالصی	قیمت فروش
نوع ۱	۲۵٪	۱۰٪	۱۰٪	۲۵٪	۳۰٪	۲۳
نوع ۲	۴۰٪	۰٪	۰٪	۳۰٪	۳۰٪	۲۰
نوع ۳	۲۰٪	۱۰٪	۰٪	۳۰٪	۴۰٪	۱۸
نوع ۴	۰٪	۱۵٪	۵٪	۲۰٪	۶۰٪	۱۰
نوع ۵	۲۰٪	۲۰٪	۰٪	۴۰٪	۲۰٪	۲۷
نوع ۶	۸٪	۵٪	۱۰٪	۱۷٪	۶۰٪	۱۲

$$\min Z: 23x_1 + 20x_2 + 18x_3 + 10x_4 + 27x_5 + 12x_6$$

s.t. =

فلز A $\quad 25x_1 + 40x_2 + 20x_3 + \quad\quad + 20x_5 + 8x_6 \geq 23$

فلز B $\quad 10x_1 + \quad\quad + 10x_3 + 15x_4 + 20x_5 + 5x_6 \leq 15$

فلز C $\quad 10x_1 + \quad + \quad + 5x_4 + \quad + 10x_6 = 4$

فلز D $\quad 25x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 40x_5 + 17x_6 \geq 35$

فلز D $\quad 25x_1 + 20x_2 + 20x_3 + 20x_4 + 40x_5 + 17x_6 \leq 45$

$x_j \geq 0 \;,\; j = 1, \dots, 6$

فصل سوم   حل مدل برنامه ریزی خطی با استفاده از روش ترسیمی

از این روش معمولاً برای حل مسائلی به کار می رود که شامل دو متغیر تصمیم می باشد که شامل ۲ مرحله ی تعیین منطقه ی موجه (ناحیه ی شدنی) و تعیین جواب بهینه می باشد. روش کار به صورت زیر است:

۱) ابتدا تابع هدف را در نظر می گیریم

۲) مساله را به صورت استاندارد می نویسیم (محدودیت ها اگر به صورت ≥ و یا ≤ باشد آنرا به صورت مساوی می نویسیم

۳) محدودیت های استاندارد شده را روی محورها رسم می کنیم

۴) برای نشان دادن جهت فلش ها نقطه ی مبدأ را در قیدهای اصلی (قیدهای داده شده) جایگذاری می کنیم درصورتی که از لحاظ منطقی درست باشد فلش به طرف مبدأ و گرنه درخلاف قرارگیری مبدأ آنرا علامت می زنیم

۵) کوچکترین ناحیه ای که با استفاده از فلش ها بدست می آید (از طریق اشتراک گذاری ناحیه شدنی خواهد بود)

۶) پس از اینکه ناحیه ی شدنی مشخص شد نقاط رأسی (نقاط گوشه ای) را برای خود مشخص می کنیم. نکته: درصورتی که مختصات نقطه ای مشخص نباشد. آنرا با حل دستگاه دو معادله ی دو مجهولی که با استفاده از تقاطع خطوطی که نقطه مورد نظر در آن واقع شده بدست می آوریم

۷) پس از اینکه نقاط رأسی مشخص شد آنرا در تابع هدف جایگذاری می کنیم سپس هر نقطه ای بهینه برای ما مشخص خواهد بود. (در برخی از اوقات یک یا دو یا سه نقطه جواب بهینه داریم و در برخی از اوقات اصلاً جواب بهینه نخواهیم داشت.)

نکته: جوابهای بهینه را با زدن علامت * بر روی جوابهای بهینه مشخص می کنیم.

مثال:) مدل های برنامه ریزی خطی زیر را با روش هندسی حل کنید:

$\text{Max: } Z = 2x_1 + 3x_2$

① st $\quad x_1 - x_2 \leq 5$

② $\quad 2x_1 + x_2 \leq 6$

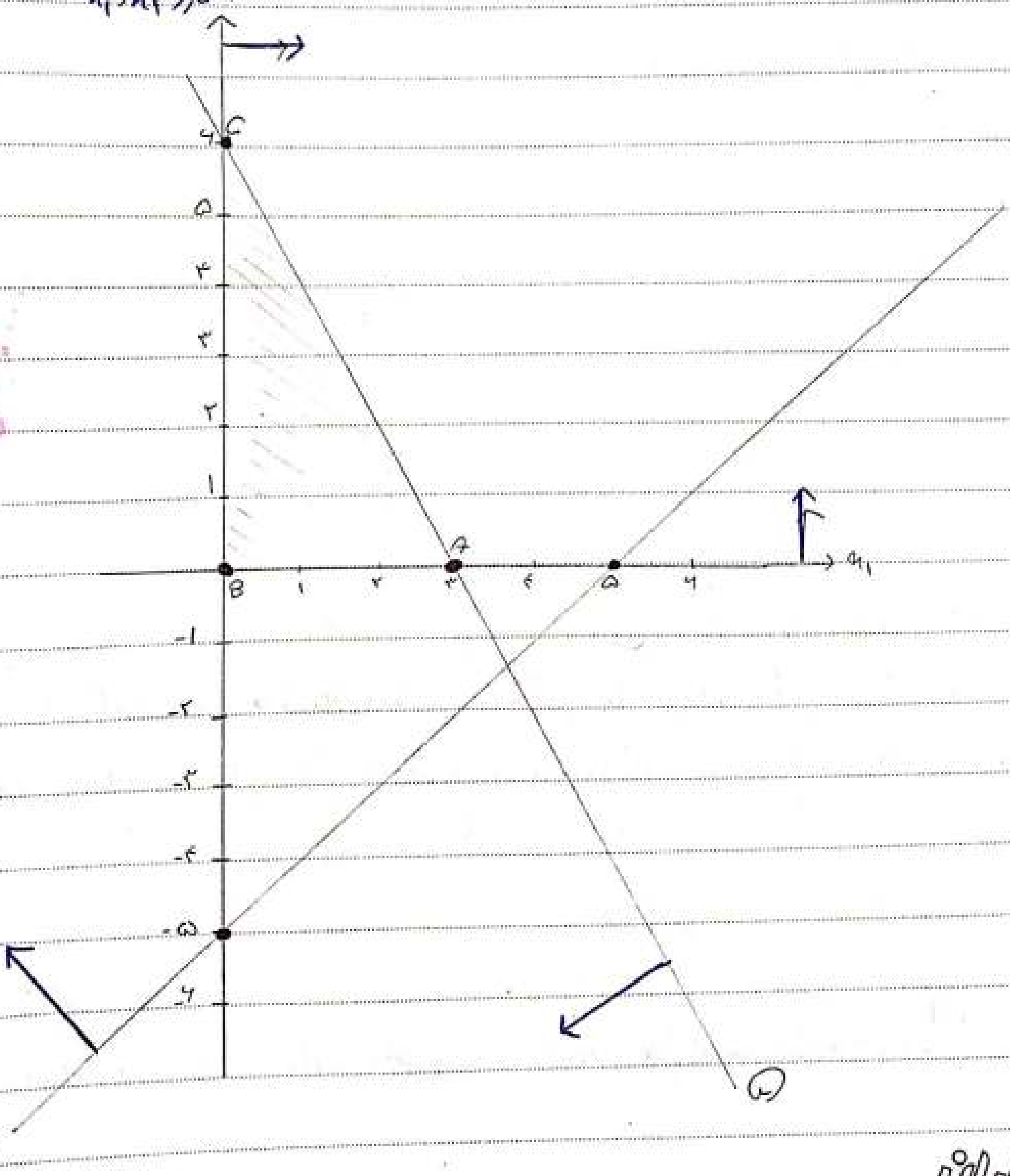
$\quad x_1 , x_2 \geq 0$

① $x_1 - x_2 = 5$

x_1	0	5
x_2	-5	0

② $2x_1 + x_2 = 6$

x_1	0	3
x_2	6	0



چون MAX است بزرگترین انتخاب می شود

$A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Z_A = 6$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \longrightarrow Z_B = 0$

$\boxed{C = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow Z_C = 18}$

$\Longrightarrow Z^* = 18 \,,\; x_1^* = 0 \,,\; x_2^* = 6$

$\min \; Z = 3x_1 - x_2$

(1) به جای با مساوی رسم کنیم $x_1 + x_2 \geq 1$ — $x_1 + x_2 = 1$

x_1	0	1
x_2	1	0

(2) $-x_1 + 2x_2 \leq 4$ — $x_1 + 2x_2 = 4$

x_1	0	-4
x_2	2	0

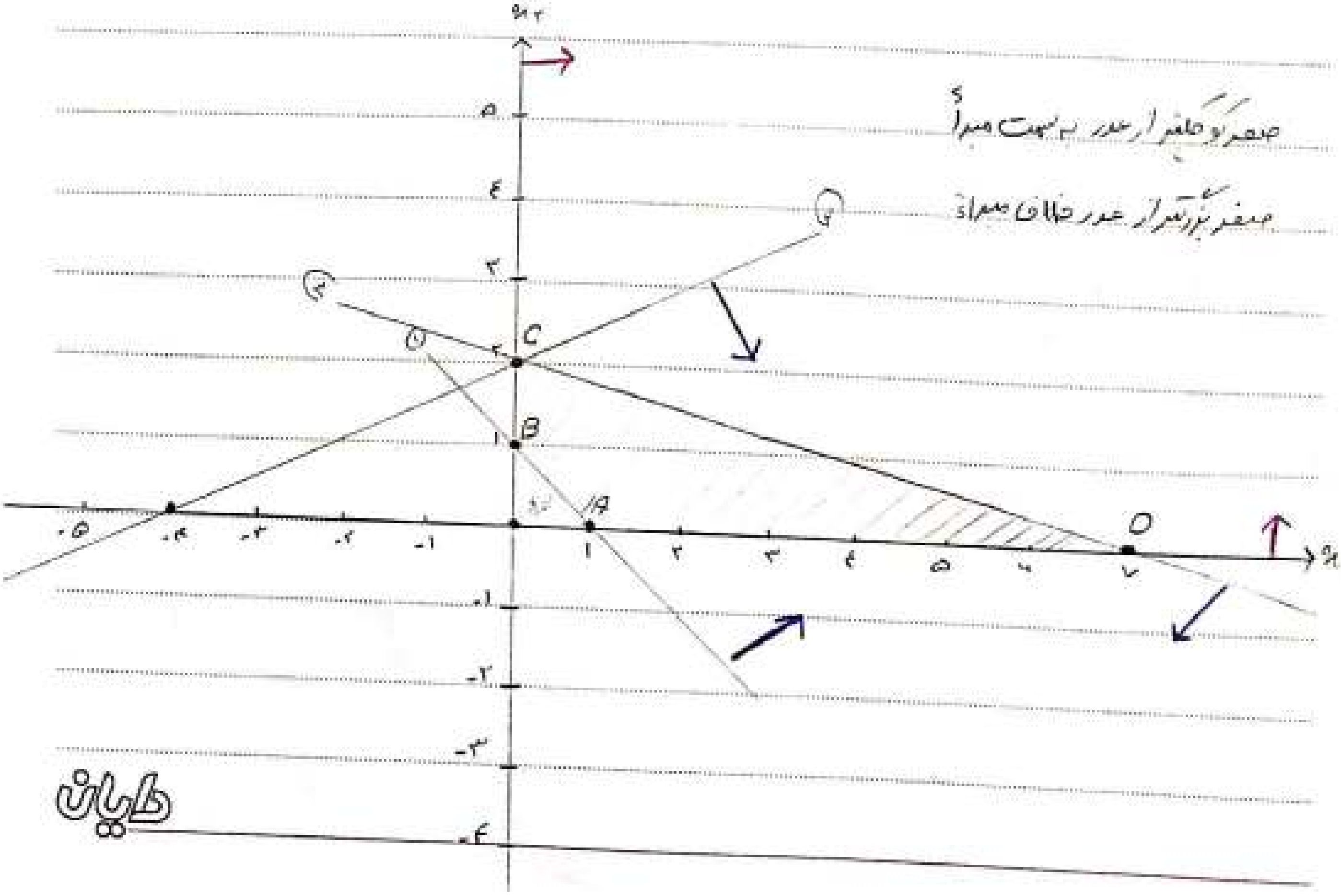
(3) $2x_1 + 7x_2 \leq 14$ — $2x_1 + 7x_2 = 14$

x_1	0	7
x_2	2	0

(4),(5) $x_1 , x_2 \geq 0$

صفر کوچکتر از عدد به سمت مبدأ

صفر بزرگتر از عدد خلاف مبدأ



۳۹۸-۹۸۲

چون Min است کوچکترین انتخاب می شود

$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Z_A = 3(1) - 1(0) = 3$

$B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \rightarrow Z_B = 3(0) - 1(1) = -1$

$C = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \rightarrow Z_C = 3(0) - 1(2) = -2$

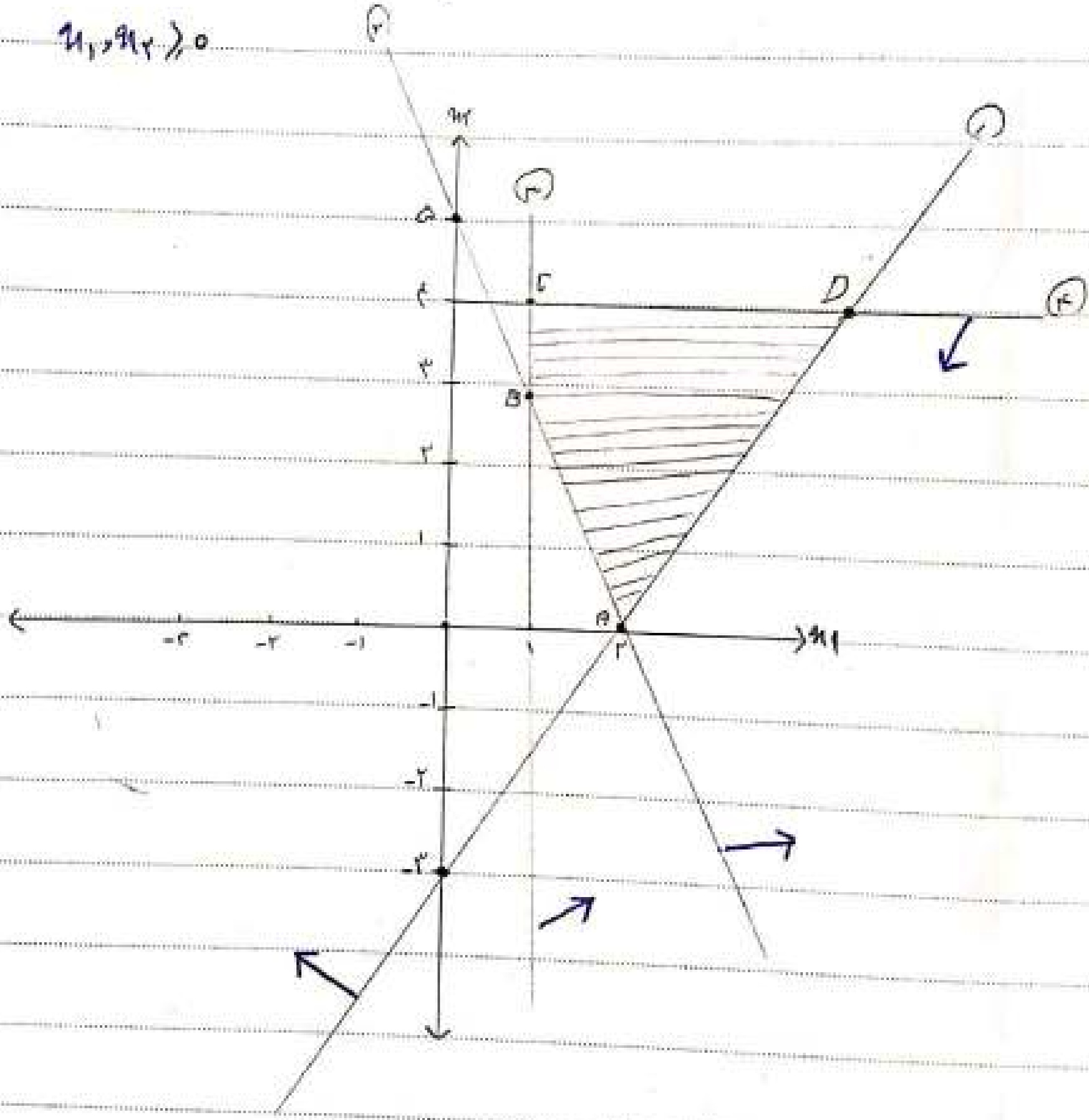
$D = \begin{bmatrix} 7 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow Z_D = 3(7) - 1(0) = 21$

$\Rightarrow Z^* = -2 \quad x_1^* = 0 \quad x_2^* = 2$

تمرین:

$\text{Max}: Z = 4x_1 + x_2$

(1)	$3x_1 - 2x_2 \leq 6$	$3x_1 - 2x_2 = 6$	$\begin{array}{c|c}x_1 & \begin{bmatrix}0\\-3\end{bmatrix} \\ x_2 & \end{array}$	$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$
(2)	$5x_1 + 2x_2 \geq 10$	$5x_1 + 2x_2 = 10$	$\begin{array}{c|c}x_1 & \begin{bmatrix}0\\5\end{bmatrix} \\ x_2 & \end{array}$	$\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}$
(3)	$x_1 \geq 1$	$x_1 = 1$		
(4)	$x_2 \leq 4$	$x_2 = 4$		
	$x_1, x_2 \geq 0$			



$5(1) + 2(x_2) = 10$
$5 + 2x_2 = 10$
$10 - 5 = 2x_2$
$x_2 = \frac{5}{2} = 2.5$

$A = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \rightarrow Z_A = 8$

$B = \begin{bmatrix}1\\2.5\end{bmatrix} \rightarrow Z_B = 6.5$

$C = \begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} \rightarrow Z_C = 8$

$D = \begin{bmatrix}4.6\\4\end{bmatrix} \rightarrow Z_D = 22.4$

$3x_1 - 2(4) = 6$

$\Longrightarrow Z^* = 22.4 \quad x_1^* = 4.6 \quad x_2^* = 4$

تمرین:

$Max: Z = 3x_1 - x_2$

(1) $x_1 + 2x_2 \geq 2$ $x_1 + 2x_2 = 2$

x_1	0	2
x_2	1	0

(2) $3x_1 + x_2 \leq 12$ $3x_1 + x_2 = 12$

x_1	0	3
x_2	12	0

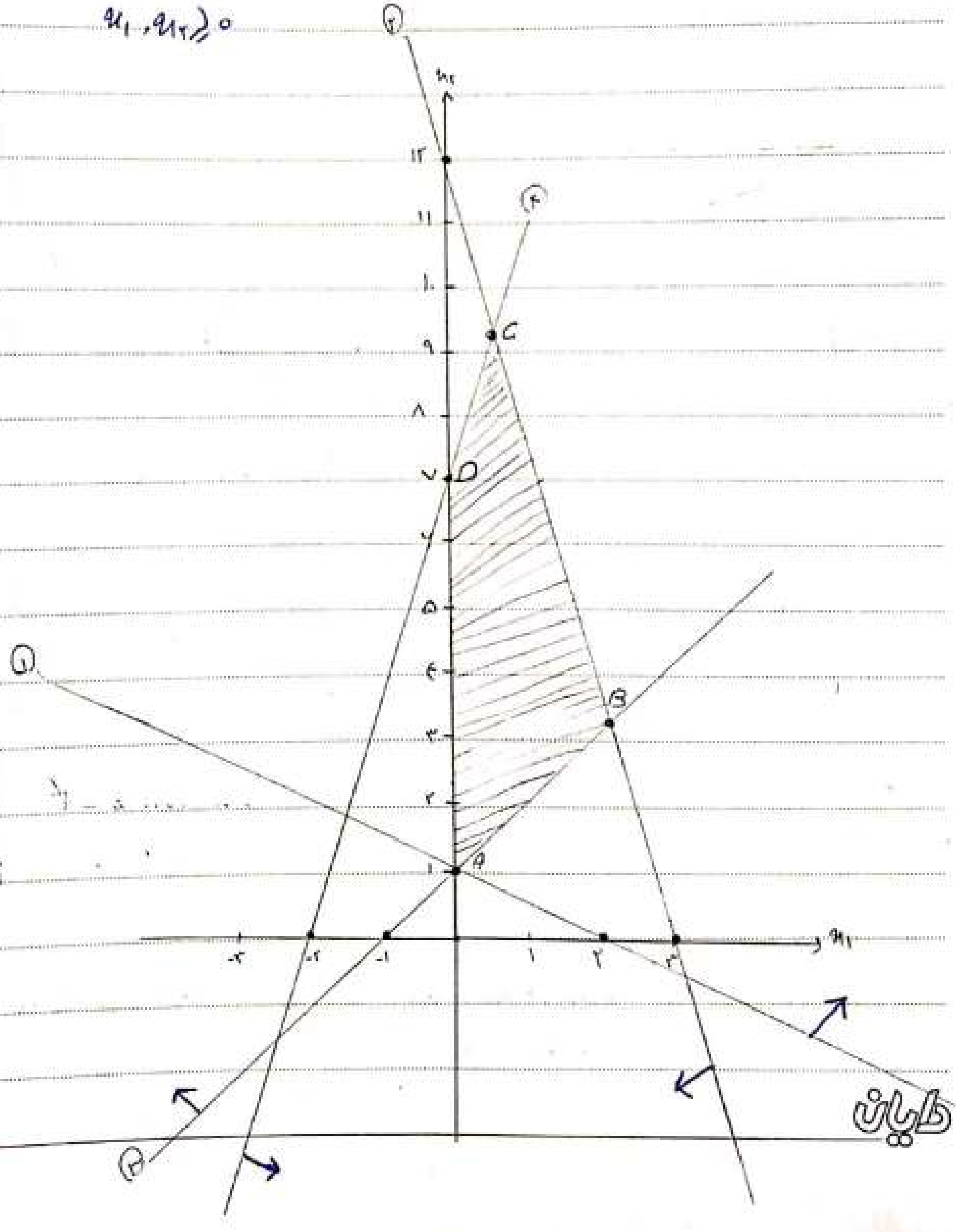
(3) $-x_1 + x_2 \geq 1$ $-x_1 + x_2 = 1$

x_1	0	-1
x_2	1	0

(4) $7x_1 - 2x_2 \geq -14$ $7x_1 - 2x_2 = -14$

x_1	0	-2
x_2	7	0

$x_1, x_2 \geq 0$



چون MAX هست بزرگترین انتخاب می شود

$$\left.\begin{array}{l} A=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \to Z_A=-1 \\ B=\begin{bmatrix}2.2\\3.2\end{bmatrix} \to Z_B=3.4 \\ C=\begin{bmatrix}0.6\\9.1\end{bmatrix} \to Z_C=-7.3 \\ D=\begin{bmatrix}0\\7\end{bmatrix} \to Z_D=-7 \end{array}\right\} \Longrightarrow Z^*=3.4 \quad x_1^*=2.2 \quad x_2^*=3.2$$

راس B خط ۲ و ۳

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=12 \\ -x_1+4x_2=1 \end{cases}$$

$$4x_1+x_2=12$$

$$-4x_1+4x_2=4$$

$$5x_2=14$$

$$\boxed{x_2=\frac{14}{5}=3.2}$$

$$-x_1+3.2=1$$

$$-x_1=1-3.2$$

$$\boxed{-x_1=-2.2}$$

راس C خط ۲ و ۴

$$\begin{cases} 4x_1+x_2=12 \\ 7x_1-2x_2=-14 \end{cases}$$

$$8x_1+2x_2=24$$

$$7x_1-2x_2=-14$$

$$15x_1=10$$

$$\boxed{x_1=\frac{10}{15}=\frac{2}{3}=0.6}$$

$$7x_1-2x_2=-14$$

$$7(0.6)-2x_2=-14$$

$$4.2-2x_2=-14$$

$$-2x_2=-14-4.2$$

$$-2x_2=-18.2$$

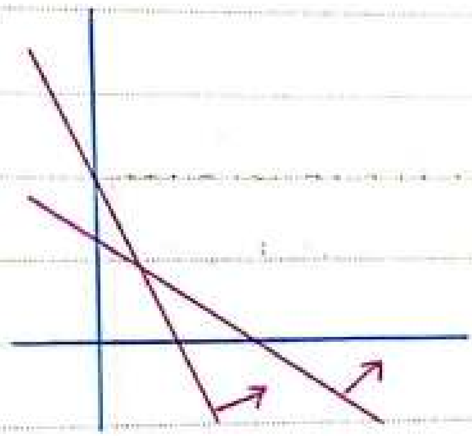
$$\boxed{x_2=\frac{18.2}{2}=9.1}$$

حالت های خاص ترسیم هندسی

۱) ناحیه جواب کردن

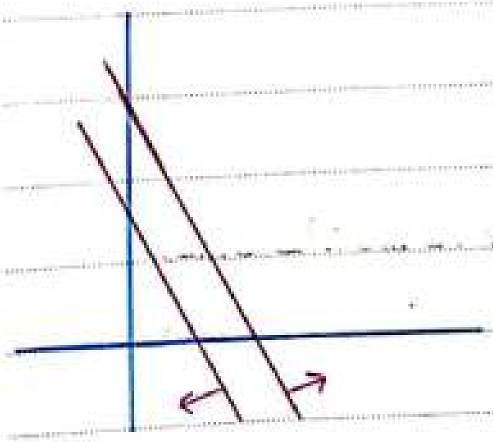
هرگاه ناحیه جواب مدل از یک سمت به محدودیت یا محدودیت هایی ختم نشود. در این صورت مسئله دارای جواب ناحیه بیکران خواهد بود. و گرنه دو حالت زیر به وجود خواهد آمد:

الف) مسئله جواب دارد ب) مسئله جواب ندارد



۲) فاقد ناحیه شدنی

این حالت زمانی به وجود می آید که برای بدست آوردن منطقه ناحیه موجه سودی برای ما ندارد یعنی هیچ اشتراکی در آن ها نیست

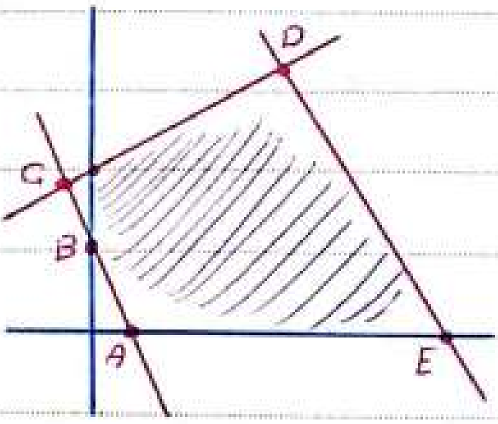


۳) بهینه چندگانه

هرگاه در یک مدل برنامه ریزی خطی یکی از محدودیت ها با خط تابع هدف موازی باشد در این حالت جواب بهینه ی چندگانه خواهیم داشت

پایان

اگر دو نقطه یک جواب مشترک داشته باشند پس تمام نقاط روی این خط جواب بهینه خواهد بود



$Z_D = ۱۵ \quad Z_E = ۱۵ \quad Z_C = ۱۰ \quad Z_B = ۳$

اگر ضریب xها یک مقدار افزایش یابد جواب بهینه چندگانه محسوب می‌شود

$MAX: Z = x_1 + 3x_2$

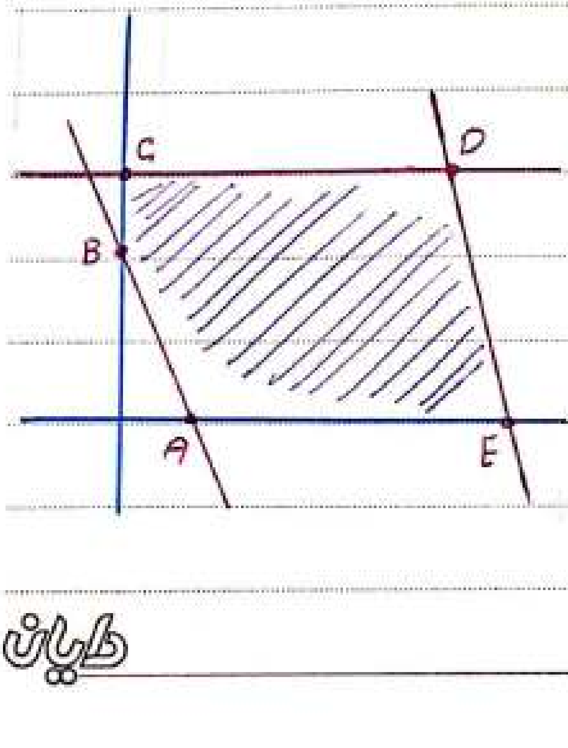
$s.t.: \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 11 \\ 5x_1 + 15x_2 \le 30 \end{cases}$

$x_1 , x_2 \ge 0$

۴) جواب تبهگن (تباهیده)

در صورتی که نقطه رأسی از بیش از دو معادله تشکیل شده باشد آن را نقطه‌ی رأسی تبهگن می‌نویسیم

اگر این رأسی بهینه باشد مسئله دارای جواب تبهگن خواهد بود



اگر جواب بهینه نقطه D باشد چون نقطه A بیش تر از دو خط را قطع می‌کند.

روش سیمپلکس

برای حل مسئله مدل برنامه ریزی خطی یکی دیگر از روش های موجود روش سیمپلکس می باشد.
ابتدا معادله را به صورت استاندارد می نویسیم سپس در صورتیکه محدودیت به صورت ≥ باشد با
وارد کردن متغیرهای کمکی (S_i) ها آن را به صورت استاندارد می نویسیم سپس با در نظر گرفتن
متغیرهای پایه ای که اکثراً متغیرهای پایه ای را در ابتدا همان متغیرهای کمکی در نظر می گیریم
متغیرهای غیر پایه ای را انتخاب می کنیم سپس جدول زیر را در نظر می گیریم:

ضریب x ها را می نویسیم یعنی هزینه ها را

هزینه ها با ضرایب x ها

متغیرهای کمکی

x_B	C_B	x_1 $x_2 \cdots x_n$ S_1 $S_2 \cdots S_m$ C_1 $C_2 \cdots C_n$ 0 $0 \cdots 0$	R.H.S
S_1	0	a_{11} $a_{12} \cdots a_{1n}$ 1 $0 \cdots 0$	b_1
S_2	0	a_{21} $a_{22} \cdots a_{2n}$ 0 $1 \cdots 0$	b_2
$\vdots$	$\vdots$	$\to y_2$	$\vdots$
S_m	0	a_{m1} $a_{m2} \cdots a_{mn}$ 0 $0 \cdots 0$	b_m
$Z_j - C_j$		$Z_1 - C_1$ $Z_2 - C_2 \cdots Z_n - C_n$ 0 $0 \cdots 0$	Z کل

$x_B =$ متغیرهای پایه ای

$x_N =$ متغیرهای غیر پایه ای

$$Z_j - C_j = C_B B^{-1} y_j - C_j$$

$$Z_{کل} = C_B b$$

طیبان

opt $\quad Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \; (+0s_1 + 0s_2 + \cdots + 0s_m)$

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \; (+s_1 =) \leq b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \; (+s_2 =) \leq b_2$$

$$\vdots$$

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \; (+s_m =) \leq b_m$$

$$a_j \geq 0 \quad j = (1, \ldots, n) \qquad s_t \geq 0 \quad t = (1, \ldots, n)$$

متغیرهای پایه‌ای

متغیرهایی هستند که جدول سیمپلکس را با استفاده از آن شروع می‌کنیم و بایستی همواره بصورت یک پایه باشند (یعنی درایه‌های مربوط به خود آن عضو 1 و مابقی 0 هستند) مانند:

$S_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)^t$ ترانهاده

$S_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)^t$

متغیرهای غیر پایه‌ای

متغیرهایی هستند که در پایه نمی‌باشند.

روش کار با جدول سیمپلکس: ابتدا مدل برنامه‌ریزی خطی را وارد جدول می‌کنیم بین سطرهای c_j و z_j و Z را برای آن تشکیل می‌دهیم. در صورتیکه:

الف) تابع هدف از نوع ماکسیمم سازی باشد اگر $c_j - z_j \leq 0$ باشد جدول بهینه است

ب) مینیمم باشد $c_j - z_j \geq 0$ باشد جدول بهینه است و مقادیر بهینه را برای خودمان

انتخاب می کنیم در غیر این صورت مراحل زیر را داریم: (این را فرض می کنیم که تابع از نوع MAX سازی است.)

نکته: در سطر $z_j - c_j$ متغیرهای پایه ای صفر اند و برای متغیرهای غیر پایه ای مقادیر را محاسبه می کنیم

متغیر وارد شونده:

زمانی که جدول بهینه نباشد از میان $z_j - c_j$ هایی که کوچکترین باشد (منفی ترین) باشد آن را به عنوان متغیر وارد شونده انتخاب می کنیم

متغیر خارج شونده:

با ورود متغیر وارد شونده بایستی یکی از متغیرهای پایه ای جای خود را به آن بدهد متغیر خارج شونده را با استفاده از رابطه زیر در نظر می گیریم:

$$MAX: z_j - c_j \geq 0$$

$$Min: z_j - c_j \leq 0$$

$$\text{متغیر خارج شونده} \; min = \left\{ \frac{R.H.S}{y_j} \middle| \, y_j > 0 \right\}$$

همیشه + مخرج قابل قبول

$$min \left\{ \frac{5}{2} , \cancel{\frac{3}{-1}} , \ldots\ldots , \frac{7}{3} \right\} = \frac{7}{3}$$

مخرج منفی قبول نمی کنیم

کوچکترین جواب

عضو لولا:

تقاطع متغیرهای وارد شونده و خارج شونده را عضو لولا می گوییم برای ادامه مراحل جدول سیمپلکس بایستی آن متغیر وارد شونده را به صورت متغیر پایه ای درآوریم یعنی عضو لولا را به 1 و مابقی درایه های بالا و پایین آن را به صفر تبدیل کنیم. با استفاده از عملیات سطری و ستونی و جدول را به ترتیب تا رسیدن به جواب بهینه ادامه می دهیم

طیبان

مثال ۱)

استاندارد سازی

$$\text{MAX } Z = 2x_1 - x_2 \qquad 2x_1 - x_2 + 0S_1 + 0S_2$$

$$x_1 - 3x_2 \leq 12 \qquad x_1 - 3x_2 + S_1 + \quad = 12$$

$$5x_1 - 2x_2 \leq 10 \qquad 5x_1 - 2x_2 + \quad + S_2 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad S_1, S_2, x_1, x_2 \geq 0$$

	x_B	C_B	x_1	x_2	S_1	S_2	R.H.S
			۲	-۱	۰	۰	
سطر قدیم	S_1	۰	۱	-۳	۱	۰	۱۲
	S_2	۰	۵ لولا	۲	۰	۱	۱۰
	$Z_j - C_j$		-۲	۱	۰	۰	۰
سطر جدید	S_1	۰	۰	$-\frac{17}{15}$	۱	$-\frac{1}{5}$	۱۰
سطر لولای جدید	x_1	۲	۱	$\frac{2}{5}$	۰	$\frac{1}{5}$	۲
	$Z_j - C_j$		۰	$\frac{9}{5}$	۰	$\frac{2}{5}$	۴

$$Z_1 - C_1 = C_B B^{-1} y_1 - C_1 = (0,0)\binom{1}{5} - 2 = -2$$

$$= (0,0)\binom{-3}{0} - (-1) = 1$$

$$\min\left\{ \underset{\text{قید اول}}{\frac{12}{1}} , \underset{\text{قید دوم}}{\frac{10}{5}} \right\} = 2$$

سطر جدید ← [سطر قدیم] + [(سطر لولای جدید) × (قرینه عدد)]

-1	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{1}{5}$	-2
1	-3	1	0	12
0	$-\frac{17}{5}$	1	$-\frac{1}{5}$	10

$Z^* = 4 \quad S_1^* = 10 \quad x_1^* = 2 \quad x_2^* = S_2^* = 0$

غیر پایه ای

مثال ۲)

$$\text{MAX}: Z_1 = 3x_1 + 4x_2$$
$$-x_1 + 3x_2 \leq 7$$
$$5x_1 - 6x_2 \leq 9$$
$$2x_1 + 4x_2 \leq 5$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

$$\text{MAX}: Z = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$
$$\text{s.t} \quad -x_1 + 3x_2 + S_1 = 7$$
$$5x_1 - 6x_2 + S_2 = 9$$
$$2x_1 + 4x_2 + S_3 = 5$$
$$S_1, S_2, S_3, x_1, x_2 \geq 0$$

$$Z_1 - C_1 = (0,0,0)\begin{pmatrix}-1\\5\\2\end{pmatrix} - 3 = -3$$
$$Z_2 - C_2 = (0,0,0)\begin{pmatrix}3\\-6\\4\end{pmatrix} - 4 = -4$$

$$\min\left\{\frac{7}{3}, \frac{9}{-6}, \frac{5}{4}\right\} = 1.25$$

[illegible] خارج شونده

$$\min\left\{\frac{\frac{33}{4}}{\frac{-10}{4}}, \frac{\frac{32}{2}}{8}, \frac{\frac{5}{4}}{\frac{2}{4}}\right\} = \{2{,}1, 2{,}1{,}5\} = 2{,}1$$

خارج شونده

قرینه عدد

$$6\left(\frac{2}{4}, 1, 0, 0, \frac{1}{4} \,\middle|\, \frac{5}{4}\right)$$
$$+\ (5, -6, 0, 1, 0 \mid 9)$$
$$\left(8, 0, 0, 1, \frac{6}{4} \,\middle|\, \frac{33}{2}\right)$$

$$-3\left(\frac{2}{4}, 1, 0, 0, \frac{1}{4} \,\middle|\, \frac{5}{4}\right)$$
$$(-1, 3, 1, 0, 0 \mid 7)$$
$$\left(\frac{-1}{4}, 0, 1, 0, \frac{-3}{4} \,\middle|\, \frac{13}{4}\right)$$

۲/۴ = ۱/۲

۱۰/۴ (۱ و ۰ و ۰ و ۰ و ۱/۸ و ۳/۱۴ | ۳۳/۱۴)
+ (−۱۰/۴ و ۰ و ۱ و ۰ و −۳/۴ | ۱۳/۴)

(۰ و ۰ و ۱ و ۵/۱۴ = ۱۰/۳۲ و ۹/۳۱ | ۲۶۹/۳۲)

−۱/۲ (۱ و ۰ و ۰ و ۰ و ۱/۸ و ۳/۱۴ | ۳۳/۱۴)
(۱/۲ و ۱ و ۰ و ۰ و ۱/۴ | ۵/۴)

(۰ و ۱ و ۰ و −۱/۱۴ و ۵/۳۲ | ۷/۳۲)

۳/۸ − ۱/۴ − ۰ =   ۹/۱۴ + ۲۰/۳۲ − ۰   ۹۹/۱۴ + ۲۸/۳۲ =

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	R.H.S
		۳	۴	۰	۰	۰	
s_1	۰	−۱	۳	۱	۰	۰	۷
s_2	۰	۵	−۶	۰	۱	۰	۹
خارج شونده s_3	۰	۲	۴ عنصر لولا	۰	۰	۱	۵
$Z_j - C_j$		−۳	−۴ وارد شونده	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	−۱۰/۴	۰	۱	۰	−۳/۴	۱۳/۴
s_2	۰	۸	۰	۰	۱	۶/۴	۳۳/۲
x_2	۴	۲/۴ = ۱/۲	۱	۰	۰	۱/۴	۵/۴
$Z_j - C_j$		−۱	۰	۰	۰	۱	۵
s_1	۰	۰	۰	۱	۵/۱۴	−۹/۳۲	۲۶۹/۳۲
x_1	۳	۱	۰	۰	۱/۸	۶/۳۲	۳۳/۱۴
x_2	۴	۰	۱	۰	−۱/۱۴	۵/۳۲	۷/۳۲
$Z_j - C_j$		۰	۰	۰	۱/۸	۳۸/۳۲	۲۲۴/۳۲

Z^* = ۲۲۴/۳۲ s_1^* = ۲۶۹/۳۲ x_1^* = ۳۳/۱۴ x_2^* = ۷/۳۲

مثال ۳)

$\min: Z = x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4$ $\min: x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 + 0s_1 + 0s_2 + 0s_3$

s.t $x_1 + x_3 - 2x_4 \leq 5$ s.t $x_1 + 0 + x_3 - 2x_4 + s_1 = 5$

$3x_1 - 4x_2 - 7x_3 + x_4 \leq 12$ $3x_1 - 4x_2 - 7x_3 + x_4 + s_2 = 12$

$2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 5$ $2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 + s_3 = 5$

$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$ $s_1, s_2, s_3, x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	R.H.S
		1	-3	4	-1	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	-2	1	0	0	5
s_2	0	3	-4	-7	1	0	1	0	12
خارج شونده s_3	0	2	3 لولا	1	2	0	0	1	5
$Z_j - C_j$		-1	3 وارد شونده	-4	1	0	0	0	
s_1	0	1	0	1	-2	1	0	0	5
s_2	0	$\frac{17}{3}$	0	$\frac{-17}{3}$	$\frac{11}{3}$	0	1	$\frac{4}{3}$	$\frac{56}{3}$
x_2	-3	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{3}=1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
		-3	0	-5	-1	0	0	-1	-5

$Z^* = -5$ $s_1^* = 5$ $s_2^* = \frac{56}{3}$ $x_2^* = \frac{5}{3}$

$Z_1 - C_1 = (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} - 1 = -1$ $\quad$ $Z_2 - C_2 = (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\-7\\1\end{pmatrix} - 4 = -4$

$Z_3 - C_3 = (0,0,0)\begin{pmatrix}0\\-4\\2\end{pmatrix} - 3 = 3$ $\quad$ $Z_4 - C_4 = (0,0,0)\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} - (-1) = 1$

$$\text{Min}\left\{\frac{5}{0}, \cancel{\frac{12}{-4}}, \frac{5}{3}\right\} = \frac{5}{3}$$

$$4\left\{\frac{2}{3}, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, 0, \frac{1}{3} \;\Big|\; \frac{5}{3}\right\}$$

$$3, -4, -7, 1, 0, 1, 0 \;|\; 12\}$$

$$\left\{\frac{17}{3}, 0, \frac{-17}{3}, \frac{11}{3}, 0, 1, \frac{4}{3} \;\Big|\; \frac{56}{3}\right\}$$

$$Z_1 - C_1 = (0,0,-3)\begin{pmatrix}1\\ \frac{17}{3}\\ \frac{2}{3}\end{pmatrix} - 1 = -3\left(\frac{2}{3}\right) = -2-1 = -3$$

$$Z_2 - C_2 = (0,0,-3)\begin{pmatrix}1\\ \frac{-17}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} - 4 = -3\left(\frac{1}{3}\right) - 4 - 1 = -5$$

$$Z_3 - C_3 = (0,0,-3)\begin{pmatrix}0\\ \frac{2}{3}\\ \frac{1}{3}\end{pmatrix} - 0 = -3\left(\frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{-3}{3} = -1$$

$$Z_4 - C_4 = (0,0,-3)\begin{pmatrix}5\\ \frac{56}{3}\\ \frac{5}{3}\end{pmatrix} = -5$$

مثال ۴)

$$\text{Min} = -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 \qquad \text{Min}: -4x_1 - 3x_2 - 3x_3 - 2x_4 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3$$

$$-x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \leq 7 \qquad -x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + S_1 = 7$$

$$3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 \leq 5 \qquad 3x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 + \quad + S_2 = 5$$

$$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 9 \qquad 5x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 5x_4 + \quad + S_3 = 9$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \qquad x_1, x_2, x_3, x_4, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

$$Z_1 - C_1 = (0,0,0)\begin{pmatrix}-1\\3\\5\end{pmatrix} - 4 = 4 \qquad Z_3 - C_3 = (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - 3 = 3$$

$$Z_2 - C_2 = (0,0,0)\begin{pmatrix}3\\-4\\2\end{pmatrix} - 3 = 3 \qquad Z_4 - C_4 = (0,0,0)\begin{pmatrix}1\\-1\\5\end{pmatrix} - 2 = 2$$

$$\min = \left\{ \frac{7}{-1}, \frac{5}{3}, \frac{9}{5} \right\} = \frac{5}{3}$$

$$+1\left(1, \frac{-4}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}, 0 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right)$$

$$-1, 3, 1, 1, 1, 0, 0 \mid 7)$$

$$0, \frac{5}{3}, 2, \frac{4}{3}, 1, \frac{1}{3}, 0 \,\Big|\, \frac{26}{3})$$

$$-5\left(1 \quad -\frac{4}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{3} \quad 0 \,\middle|\, \frac{5}{3}\right.$$

$$5 \quad 2 \quad 4 \quad 5 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \mid 9$$

$$0 \quad \frac{26}{3} \quad -1 \quad \frac{20}{3} \quad 0 \quad \frac{-5}{3} \quad 1 \,\Big|\, \frac{-20}{3}$$

پایان

x_B	C_B	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2	s_3	R.H.S
		-۴	-۳	-۳	-۲	۰	۰	۰	
s_1	۰	-۱	۳	۱	۱	۱	۰	۰	۷
خارج شونده s_2	۰	۳ لولا	-۴	۳	۱	۰	۱	۰	۵
s_3	۰	۵	۲	۴	۵	۰	۰	۱	۹
$Z_j - C_j$		۴ وارد شونده	۳	۳	۲	۰	۰	۰	۰
s_1	۰	۰	$\frac{۵}{۳}$	۲	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۲۶}{۳}$
x_1	-۴	$\frac{۳}{۳}=۱$	$\frac{-۴}{۳}$	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۵}{۳}$
s_3	۰	۰	$\frac{۲۶}{۳}$	-۱	$\frac{۲۰}{۳}$	۰	$\frac{-۵}{۳}$	۱	$\frac{-۲۰}{۳}$
$Z_j - C_j$		۰	$\frac{۲۵}{۳}$	-۱	$\frac{۱۰}{۳}$	۰	$\frac{-۴}{۳}$	۰	$\frac{-۲۰}{۳}$

$Z = \frac{-۱۸۴}{۱۷}$ $\quad x_1^* = \frac{۱۳}{۱۷}$ $\quad x_2^* = \frac{۴۴}{۱۷}$ $\quad s_2^* = \frac{۲۲۳}{۱۷}$

حالات خاص روش سیمپلکس

۱) جواب بهینه چندگانه

زمانی که در سطر $C_j - Z_j$ همه ی جواب ها بهینه باشد ولی متغیر غیراساسی نیز ۰ باشد در این صورت جواب بهینه چندگانه رخ خواهد داد لذا همان متغیر غیراساسی که ۰ بوده آن را به عنوان ورودی انتخاب کرده پس جدول را ادامه می دهیم.

مثال:)

$$MAX: Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 10$$

$$x_1 + x_2 \leq 5$$

$$x_1 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

۲) ناحیه جواب بی کران

زمانی که وارد شونده داشته باشیم ولی خارج شونده نداشته باشیم (ستون متغیر وارد شونده ۰ یا منفی باشد)

الف) وارد شونده باشد ولی خارج شونده نباشد در این صورت ناحیه جواب بی کران و نقطه بهینه بی کران خواهد بود

ب) وارد شونده نباشد و خارج شونده باشد در این صورت ناحیه جواب بی کران و نقطه بهینه کران دار است

الف) $Max: Z = 2x_1 + x_2$

s.t

$$x_1 - x_2 \le 10$$
$$2x_1 - x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

ب) $Max: Z = 6x_1 - 2x_2$

s.t

$$2x_1 - x_2 \le 2$$
$$x_1 \le 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۳) مسئله فاقد جواب است

در صورتیکه در مرحله آخر جدول سیمپلکس متغیر تصنعی باقی بماند و مقدار بزرگتر از صفر داشته باشد در این صورت مدل فاقد ناحیه ی جواب خواهد بود

$Max: Z = 4x_1 + 3x_2$

s.t

$$x_1 + x_2 \le 3$$
$$2x_1 - x_2 \le 3$$
$$x_1 \ge 4$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

۴) جواب تبهگن

در صورتی این امکان پذیر است که در R.H.S یک مقدار صفر را داشته باشد.

$Max: Z = 4x_1 + 6x_2$

$$6x_1 + 4x_2 \le 24$$
$$x_2 \le 3$$
$$5x_1 + 10x_2 \le 40$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

روش M بزرگ

در برخی از اوقات در مسئله‌ای به حل یکی از قیدها نامساوی به صورت بزرگتر مساوی باشد از روش هایی مانند روش M بزرگ، دوفازی و سیمپلکس دوآل استفاده می کنیم برای این منظور ابتدا قیدها را به صورت استاندارد می نویسیم از جدول زیر کمک می گیریم

استاندارد	قیدها
$+S_i$	$\leq$
$+R_j$	$=$
$-S_i+R_j$	$\geq$

در صورتی که تابع از نوع MAX باشد ضریب S ها در تابع هدف صفر و ضریب R ها منفی M می باشد و همچنین در صورتی که تابع Min سازی باشد در این صورت ضریب R ها $+M$ در نظر می گیریم و مسئله را همانند روش سیمپلکس حل می کنیم.

نکته:) در صورتی که در مرحله نهایی جدول سیمپلکس R باقی بماند مسئله نشدنی است و اگر R باقی نماند در این صورت جواب مسئله را می نویسیم

مثال:) با استفاده از روش M بزرگ مسئله زیر را حل کنید.

$$MAX: Z = 3x_1 + 4x_2 \qquad MAX: Z = 3x_1 + 4x_2 + 0S_1 + 0S_2 - MR_1$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6 \qquad 2x_1 + 3x_2 + S_1 = 6$$

$$x_1 + 5x_2 \geq 10 \qquad x_1 + 5x_2 - S_2 + R_1 = 10$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \qquad x_1, x_2, S_1, S_2, R_1 \geq 0$$

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R.H.S
		۳	۴	۰	۰	-M	
s_1	۰	۲	۳	۱	۰	۰	۶
R_1	-M	۱	۵	۰	-۱	۱	۱۰
Z_j-C_j		-M-۳	-۵M-۴	۰	M	۰	-۱۰M
s_1	۰	۷/۵	۰	۱	۳/۵	-۳/۵	۰
x_2	۴	۱/۵	۱	۰	-۱/۵	۱/۵	۲
Z_j-C_j		-۱۱/۵	۰	۰	-۴/۵	۴/۵+M	۸
x_1	۳	۱	۰	۵/۷	۳/۷	-۳/۷	۰
x_2	۴	۰	۱	-۱/۷	-۲/۷	۲/۷	۲
Z_j-C_j		۰	۰	۱۱/۷	۱/۷	-۱/۷+M	۸

$Z^* = ۸ \quad x_1^* = ۰ \quad x_2^* = ۲ \quad s_1^* = s_2^* = R_1^* = ۰$

-۳/۵ , -۳ , ۰ , ۳/۵ , -۳/۵	-۶
۲ , ۳ , ۱ , ۰ , ۰	۶
۷/۵ , ۰ , ۱ , ۳/۵ , -۳/۵	۰

-۱/۵ , ۰ , -۱/۷ , -۳/۳۵ , ۳/۵	۰
۱/۵ , ۱ , ۰ , ۲/۳ , ۲/۳	۲
۰ , ۱ , -۱/۷ , -۲/۷ , ۲/۷	۲

طاها

$\text{Min}: Z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$ $\qquad$ $5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 0S_1 + 0S_2 + 0S_3 + MR_1 + MR_2$

$2x_1 + 4x_2 + x_3 \leq 7$ st $\qquad$ $2x_1 + 4x_2 + x_3 + S_1 = 7$

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geq 5$ $\qquad$ $x_1 + 2x_2 + 3x_3 - S_2 + R_1 = 5$

$5x_1 + 2x_2 + 4x_3 \geq 21$ $\qquad$ $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 - S_3 + R_2 = 21$

$x_1, x_2, x_3 \geq 0$ $\qquad$ $x_1, x_2, x_3, S_1, S_2, S_3, R_1, R_2 \geq 0$

$$\min\left\{\frac{7}{1}, \frac{5}{3}, \frac{21}{4}\right\} = \frac{5}{3}$$

$-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -1,\ 0,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0$	$-\frac{5}{3}$
$2,\ 4,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$	7
$\frac{5}{3},\ \frac{10}{3},\ 0,\ 1,\ \frac{1}{3},\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0$	$\frac{14}{3}$

$-\frac{4}{3},\ -\frac{8}{3},\ -4,\ 0,\ \frac{4}{3},\ 0,\ -\frac{4}{3},\ 0$	$-\frac{20}{3}$
$5,\ 3,\ 4,\ 0,\ 0,\ -1,\ 0,\ 1$	21
$\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{3},\ -1,\ -\frac{4}{3},\ 1$	$\frac{43}{3}$

$$\min\left\{\frac{\frac{14}{3}}{\frac{5}{3}}, \frac{\frac{20}{3}}{\frac{4}{3}}, \frac{\frac{43}{3}}{\frac{11}{3}}\right\} = \frac{14}{5},\ 5,\ \frac{43}{11} = \frac{14}{5}$$

$-\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{1}{5},\ 0$	$-\frac{16}{15}$	$-\frac{11}{3},\ -\frac{22}{3},\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{5},\ -\frac{11}{5},\ 0,\ 0,\ \frac{11}{5},\ 0$	$-\frac{1760}{15}$
$\frac{11}{3},\ \frac{2}{3},\ 1,\ 0,\ 0,\ \frac{5}{15},\ 0,\ \frac{6}{15},\ 0$		$\frac{11}{3},\ \frac{1}{3},\ 0,\ 0,\ 0,\ \frac{4}{3},\ -1,\ -\frac{4}{3},\ 1$	$\frac{430}{3}$
$0,\ 0,\ 0,\ 1,\ -\frac{1}{5},\ -\frac{6}{5},\ 0,\ \frac{6}{15},\ 0$	$\frac{25}{15}$	$0,\ -7,\ 0,\ 0,\ -\frac{11}{5},\ \frac{3}{5},\ -1,\ -\frac{3}{5},\ 1$	$\frac{13}{5}$

x_B	C_B	$x_۱$	$x_۲$	$x_۳$	$s_۱$	$s_۲$	$s_۳$	$R_۱$	$R_۲$	
		۵	۶	۳	۰	۰	۰	M	M	
$s_۱$	۰	۲	۴	۱	۱	۰	۰	۰	۰	۷
$R_۱$	M	۱	۲	۳	۰	-۱	۰	۱	۰	۵
$R_۲$	M	۵	۳	۴	۰	۰	-۱	۰	۱	۲۱
z_j-c_j		۶m-۵	۵m-۶	۷m-۳	۰	-M	-M	۰	۰	۲۶m
$s_۱$	۰	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۱۰}{۳}$	۰	۱	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{-۱}{۳}$	۰	$\frac{۱۶}{۳}$
$x_۳$	۳	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	۰	$\frac{-۱}{۳}$	۰	$\frac{۱}{۳}$	۰	$\frac{۵}{۳}$
$R_۲$	M	$\frac{۱۱}{۳}$	$\frac{۱}{۳}$	۰	۰	$\frac{۴}{۳}$	-۱	$\frac{-۴}{۳}$	۱	$\frac{۴۳}{۳}$
z_j-c_j		$\frac{۱۱}{۳}$M-۴	$\frac{۱}{۳}$M-۴	۰	۰	$\frac{۴}{۳}$M-۱	-M	$\frac{-۷}{۳}$m+۱	۰	$\frac{۴۳}{۳}$m+۵
$x_۱$	۵	۱	۲	۰	$\frac{۳}{۵}$	$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{-۱}{۵}$	۰	$\frac{۱۶}{۵}$
$x_۳$	۳	۰	۰	۱	$\frac{-۱}{۵}$	$\frac{-۲}{۵}$	۰	$\frac{۲}{۵}$	۰	$\frac{۳}{۵}$
$R_۲$	M	۰	-۷	۰	$\frac{-۱۱}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$	-۱	$\frac{-۳}{۵}$	۱	$\frac{۱۳}{۵}$
z_j-c_j		۰	-۷m+۴	۰	-۷m+$\frac{۱۲}{۵}$	$\frac{۳}{۵}$m-$\frac{۱}{۵}$	-M	-$\frac{۸}{۵}$m+$\frac{۱}{۵}$	۰	$\frac{۱۳}{۵}$m+۵

$Max: Z = -4x_1 + x_2$ $\quad$ $-4x_1 + x_2 - MR_1 - MR_2$

$3x_1 + x_2 = 3$ $\quad$ $3x_1 + x_2 + R_1 = 3$

$4x_1 + 3x_2 \geq 6$ $\quad$ $4x_1 + 3x_2 - S_1 + R_2 = 6$

$x_1 + 2x_2 \leq 4$ $\quad$ $x_1 + 2x_2 + S_2 = 4$

$x_1 , x_2 \geq 0$ $\quad$ $x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2, MR_1, MR_2$

$\min = \frac{3}{3}, \frac{6}{4}, \frac{4}{1} = 1, 1.5, 4 = 1$

$-4(1, \frac{1}{3}, 0, 0, 0, \frac{1}{3}, 0 \mid 1$

$4, 3, -1, 0, 0, 0, 1 \mid 6$

$0, \frac{5}{3}, -1, 0, -\frac{4}{3}, 1 \mid +2$

$-1(1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3}, 0 \mid 1$

$1, 2, 0, 1, 0, 0 \mid 4$

$0, \frac{5}{3}, 0, 1, \frac{-1}{3}, 0 \mid 5$

$-4(\frac{1}{3}) \times \frac{-5}{3} M + 1 \Rightarrow$

$-4(\frac{1}{3}) \times -M \times (-\frac{5}{3}) - (-M) =$

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R_2	R.H.S.
		-۴	۱	۰	۰	-M	-M	
R_1	-M	۳	۱	۰	۰	۱	۰	۳
R_2	-M	۴	۳	-۱	۰	۰	۱	۶
s_2	۰	۱	۲	۰	۱	۰	۰	۴
$z_j - c_j$		-۷m+۴	۴m+۱	M	۰	۰	۰	-۹M
x_1	-۴	۱	۱/۳	۰	۰	۱/۳	۰	۱
R_2	-M	۰	۵/۳	-۱	۰	-۴/۳	۱	۲
s_2	۰	۰	۵/۳	۰	۱	-۱/۳	۰	۵
$z_j - c_j$		۰	-۵/۳ m - ۷/۳	M	۰			

روش دوفازی

درصورتی که حداقل یکی از محدودیت ها دارای جهت بزرگتر مساوی باشد از آن استفاده می کنیم روش کار به این صورت است که مساله را در دو فاز جداگانه حل می کنیم در فاز اول تابع هدف را به صورت Min با ضرایب ۱+ برای Rها در نظر می گیریم و برای مابقی متغیرها ۰ می نویسیم مساله را در فاز اول تا از پایه خارج شدن Rها ادامه می دهیم سپس جدول مرحله نهایی را برای فاز دوم با ضرایب تابع هدف اولیه در نظر می گیریم سپس جدول را تا بهینه شدن ادامه می دهیم

مثال) با استفاده از روش دوفازی مسائل برنامه ریزی خطی زیر را حل کنید

$$MAX: Z = 2x_1 + x_2$$

$$x_1 + x_2 \geq 2$$

$$2x_1 + 3x_2 \leq 6$$

$$\min \quad R_1$$

$$x_1 + x_2 - s_1 + R_1 = 2$$

$$2x_1 + 3x_2 + s_2 = 6$$

$$x_1, x_2, s_1, s_2, R_1 \geq 0$$

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	R_1	R.H.S
		۰	۰	۰	۰	۱	
R_1	۱	۱	۱	-۱	۰	۱	۲
s_2	۰	۲	۳	۰	۱	۰	۶
$Z_j - C_j$		۱	۱	-۱	۰	۰	۲
x_1	۰	۱	۱	-۱	۰	۱	۲
s_2	۰	۰	۱	۲	۱	-۲	۲
		۰	۰	۰	۰	-۱	۰

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	R.H.S
		۲	-۱	۰	۰	
x_1	۲	۱	۱	-۱	۰	۲
s_2	۰	۰	۱	۲	۱	۲
$Z_j - C_j$		۰	۳	-۲	۰	۴
x_1	۲	۱	$\frac{۳}{۲}$	۰	$\frac{۱}{۲}$	۳
s_2	۰	۰	$\frac{۱}{۲}$	۱	$\frac{۱}{۲}$	۱
$Z_j - C_j$		۰	$\frac{۸}{۲} = ۴$	۰	۱	۶

$Z^* = ۶ \quad x_1^* = ۳ \quad s_1^* = ۱ \quad x_2^* = s_2^* = ۰$

طاها

$Max: Z = 3x_1 + 4x_2$

$2x_1 + 3x_2 \geq 6$

$x_1 + 5x_2 \geq 10$

$x_1, x_2 \geq 0$

$Min = R_1 + R_2$

$2x_1 + 3x_2 - S_1 + R_1 = 6$

$x_1 + 5x_2 - S_2 + R_2 = 10$

$x_1, x_2, S_1, S_2, R_1, R_2$

x_B	C_B	x_1	x_2	S_1	S_2	R_1	R_2	
		0	0	0	0	1	1	
R_1	1	2	3	-1	0	1	0	6
R_2	1	1	5	0	-1	0	1	10
$Z_j - C_j$		3	8	-1	-1	0	0	16
x_2	0	$\frac{2}{3}$	1	$\frac{-1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	2
R_2	1	$\frac{-7}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-1	$\frac{-5}{3}$	1	0
$Z_j - C_j$		$\frac{-7}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	-1	$-\frac{8}{3}$	0	0
x_2	0	$\frac{1}{5}$	1	0	$\frac{-1}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	2
S_1	0	$\frac{-7}{5}$	0	1	$-\frac{3}{5}$	-1	$\frac{3}{5}$	0
$Z_j - C_j$		0	0	0	0	-1	-1	0

x_B	C_B	x_1	x_2	s_1	s_2	RHS
		۳	۴	۰	۰	
x_2	۴	$\frac{1}{5}$	۱	۰	$-\frac{1}{5}$	۲
s_1	۰	$-\frac{7}{5}$	۰	۱	$-\frac{3}{5}$	۰
$Z_j - C_j$		$-\frac{11}{5}$	۰	۰	$-\frac{4}{5}$	۸
x_1	۳	۱	۵	۰	۱-	۱۰
s_1	۰	۰	۷	۱	۲-	۱۴
$Z_j - C_j$		۰	۱۱	۰	۳-	۳۰

$Z^* = ۳۰$ $\quad x_1^* = ۱۰$ $\quad s_1^* = ۱۴$ $\quad x_2^* = s_2^* = 0$

دوگان (ثانویه یا دوآل)

هر مساله برنامه ریزی خطی یک مساله دوگان وابسته به خود دارد خود مساله را اولیه (پرایمال) و مساله دیگر را ثانویه (دوآل) می نامیم این مساله خواص بسیار نزدیکی به هم دارد به طوریکه جواب بهینه یکی جواب بهینه دیگری می باشد:

روش کلی برای نوشتن دوآل یک مساله LP

فرض کنیم صورت اصلی یک مساله LP در MAX سازی باشد و به فرم روبه رو نوشته شود M

$$\text{MAX } Cx$$
$$\text{s.t. } Ax \le b$$
$$x \ge 0$$

۱) تابع هدف دوگان به صورت Min سازی است

۲) تعداد متغیرهای دوگان برابر تعداد قیدهای مساله اولیه است

۳) تعداد قیود مساله دوگان برابر تعداد متغیرهای مساله اولیه است

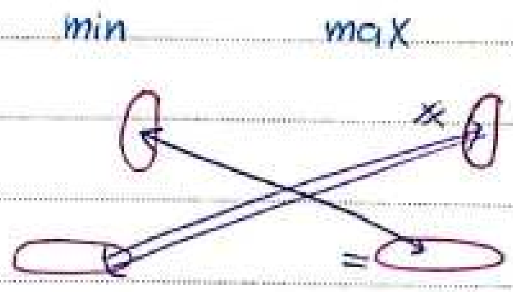
۴) بردار سود مساله اولیه برابر با مقادیر سمت راست مساله دوگان را تشکیل می دهد

۵) بردار سمت راست مساله اولیه ضرایب هدف مساله ثانویه را تشکیل می دهد

۶) ترانهاده ی ماتریس ضرایب تکنولوژیکی برابر با ماتریس ضرایب تکنولوژیکی مساله ثانویه خواهد بود

Min	⇔	MAX
A	⇔	A^t
c	⇔	b
b	⇔	c
تعداد قید	⇔	تعداد متغیر
تعداد متغیر	⇔	تعداد قید

$$\text{MAX } cx \qquad (D): \min\ by$$
$$\text{st } Ax \leq b \qquad A^t y \geq c$$
$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$



مثال ۱) دوگان (دوآل) برای مسائل برنامه ریزی خطی زیر بنویسید.

$$\min\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \qquad \text{MAX } 5y_1 + 4y_2$$
$$\text{st} \quad x_1 + x_3 \geq 5 \qquad 1y_1 + 1y_2 \leq 2$$
$$x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 4 \qquad 0y_1 + 2y_2 - 3$$
$$x_1 \geq 0 ,\ x_2 \text{ آزاد} ,\ x_3 \leq 0 \qquad 1y_1 - 1y_2 \geq 1$$

$$y_1 \leq 0 ,\ x_2 = 0 \quad x_3 \geq 0$$

مثال:

$$\begin{aligned}
\min:\ & x_1+2x_2+3x_3-x_4 \\
\text{s.t.}\ & x_1-x_2-x_3+2x_4 \geq 5 \\
& -2x_1 + x_3 - 2x_4 = 3 \\
& 3x_1 + x_2 + x_3 - x_4 \leq 7 \\
& x_1 \geq 0,\ x_2 \leq 0,\ x_3\ \text{آزاد},\ x_4 \leq 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
MAX:\ & 5y_1+3y_2+7y_3 \\
& 1y_1-2y_2+3y_3 \leq 1 \\
& -y_1+0y_2+1y_3 \geq 2 \\
& -y_1+1y_2+1y_3 = 3 \\
& 2y_1-2y_2-1y_3 \geq -1 \\
& y_1 \geq 0,\ y_2\ \text{آزاد},\ y_3 \leq 0
\end{aligned}$$

در تبدیل min به MAX جهت های RHS برابر است با جهت های متغیرهای تصمیم دوگان و جهت متغیرهای تصمیم مخالف جهت قیدها برای دوگان خواهد بود

مثال:

$$\begin{aligned}
MAX:\ & 5x_1+7x_2+6x_3 \\
& x_1-x_2+x_3 \leq 4 \\
& 2x_2+4x_3 \geq 8 \\
& x_1 \leq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3\ \text{آزاد}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\min\ & 4y_1+8y_2 \\
& 1y_1+0y_2 \leq 5 \\
& -y_1+2y_2 \geq 7 \\
& 1y_1+4y_2 = 6 \\
& y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0
\end{aligned}$$

قضیه: دوگان دوگان مسئله اولیه خود مسئله اولیه می باشد

$$\begin{array}{llll}
\min\ cx & MAX: wb & \min\ (-b)^t w^t & \\
Ax \geq b \Rightarrow & \text{s.t. } wA \leq c \Rightarrow & \text{s.t. } (-A)^t w^t \geq -c^t & \Rightarrow \\
x \geq 0 & w \geq 0 & w^t \geq 0 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} MAX: x^t(-c)^t & \\ s.t \quad x^t(-A)^t \leq -b^t & \Longrightarrow \\ \quad x^t \geq 0 & \end{array} \quad \begin{array}{l} Min: cx \\ st \quad Ax \geq b \\ \quad x \geq 0 \end{array}$$

قضیه ضعیف دوآلیتی: اگر دو مساله دوآل هم باشند همواره مقدار تابع هدف مساله max سازی کوچکتر مساوی مقدار تابع هدف مساله min سازی به ازای نقاط شدنی مسائل متناظر خود هستند (یعنی $cx \leq by$)

$$\begin{array}{lll} MAX \quad cx & , \quad min \quad by & \\ s.t \quad Ax \leq b & st \quad yA \geq C & \\ \quad x \geq 0 & \quad y \geq 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{l} Ax \leq b \\ yA \geq C \end{array} \xrightarrow[xx]{xy}$$

$$\begin{array}{l} yAx \leq by \\ yAx \geq cx \end{array} \Longrightarrow cx \leq yAx \leq by \Rightarrow cx \leq by$$

قضیه قوی دوآلیتی: اگر مساله اولیه شدنی و متناهی باشد آنگاه جوابهای بهینه مساله دوآل موجودند به طوریکه $cx^* = by^*$ که در آن x^* و y^* جوابهای بهینه مسائل اولیه و ثانویه هستند.